

التمرين الأول :

نعتبر الدالة العدية f المعرفة بما يلي : $f(x) = x \arctan x$

(I) 1 أ- أدرس زوجية الدالة f

ب- أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

(2) أحسب المشتقة $f'(x)$ و بين أن f تزايدية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$

(3) أرسم المنحنى (C_f)

(II) 1 حل في $\mathbb{R}^+$ المتراجحة $f(x) > x$

(2) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة بما يلي : $U_0 = \sqrt{3}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أن $U_n \geq \sqrt{3} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ (نعطي $\tan(1) \approx 1,56$)

ب- بين أن $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq \frac{\pi}{3} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ و استنتج أن (U_n) تزايدية

ج- بين أن $U_n \geq \left(\frac{\pi}{3}\right)^n \sqrt{3} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ و حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(III) 1 بين أن المعادلة $f(x) = \frac{\pi n}{4n+1}$ تقبل في المجال $[0, +\infty[$ حلاً وحيداً x_n

(2) أدرس رتبة المتتالية (x_n)

(3) بين أن $x_n < 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ و استنتج أن (x_n) متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثاني :

ليكن n عدد طبيعي بحيث $n > 2$.

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = x^n - 2 - n(x-1)$

(1) أدرس رتبة الدالة f_n

(2) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلين a_n و b_n مع $0 < a_n < 1 < b_n$

(3) أ- أدرس إشارة الفرق $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

ب- استنتج رتبة المتتالية كل من المتتاليتين (a_n) و (b_n)

(4) بين أن $\frac{-2}{n} < a_n - 1 < \frac{-1}{n} \quad (\forall n > 2)$ و استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

(5) أ- بين أن $(1+x)^n \geq 1 + nx + C_n^2 x^2 \quad (\forall x > 0) \quad (\forall n > 2)$

ب- استنتج إشارة $f_n\left(1 + \frac{2}{n}\right)$ ثم أن (b_n) متقاربة و حدد نهايتها

بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n}) = 1$