

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الاشتقاق / دراسة الدوال / المتتاليات	استعدادا لاجتياز فروضك									
فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان											
تمرين 1 :											
$\forall x \in]-1; +\infty[\quad g(x) = 2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x}{x^2 + 2x + 2}$											
$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2 \times 0 - 0 = 0$	$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x) = 2 \times \frac{p}{2} - \frac{-1}{1} = p + 1$	1									
لدينا لكل : $\forall x \in]-1; +\infty[$ $g(x)' = 2 \frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)'}{1 + \left(\frac{1}{x+1}\right)^2} - \frac{x^2 + 2x + 2 - x(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} = 2 \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{x^2 + 2x + 2 - 2x^2 - 2x}{(x^2 + 2x + 2)^2}$ $g(x)' = \frac{-2}{(x+1)^2 + 1} - \frac{2 - x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{-2(x^2 + 2x + 2) - 2 + x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2}$ $g(x)' = \frac{-2x^2 - 4x - 4 - 2 + x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{-(x^2 + 4x + 6)}{(x^2 + 2x + 2)^2} < 0$ (لأن : $\Delta = 16 - 24 < 0$) منه: <table border="1" data-bbox="336 1052 1198 1317"> <tr> <td>x</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$g'(x)$</td><td></td><td>$-$</td></tr> <tr> <td>$g(x)$</td><td>$p+1$</td><td>0</td></tr> </table>			x	-1	$+\infty$	$g'(x)$		$-$	$g(x)$	$p+1$	0
x	-1	$+\infty$									
$g'(x)$		$-$									
$g(x)$	$p+1$	0									
حسب جدول التغيرات نستنتج أن : $\forall x \in]-1; +\infty[\quad g(x) > 0$ (لأن : $g([-1; +\infty]) =]0, p+1[$)											
نعتبر الدالتين : $p(x) = x - \operatorname{Arctan} x$ و $q(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \operatorname{Arctan} x$ الدالتان قابلتان للشتقاق على IR. ولدينا : $\forall x \in IR \quad p(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1} \geq 0$ و $\forall x \in IR \quad q(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^4}{x^2 + 1} \geq 0$ إذن فهما تزايديتان منه : $\begin{cases} p(x) \geq p(0) \\ q(x) \geq q(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \end{cases}$: منه $x \geq 0 \Rightarrow$ $\forall x \in [0; +\infty[\quad 0 \leq x - \operatorname{Arctan} x \leq \frac{1}{3}x^3$ وهذا يعني : مبرهنة التزايديات المنتهية غير مفيدة في هذه الحالة بسبب عدم نجاعة التأطير بعد حساب المشتقة.											
بما أن : $0 \leq \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^2} \leq \frac{1}{3}x$ و $\forall x > 0 \quad 0 \leq \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^2} \leq \frac{1}{3}x$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ فإن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^2} = 0$											

	$\begin{cases} f(x) = \frac{-2}{p} x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 2 & ; x > -1 \\ f(x) = -\sqrt[3]{-x^3 - x^2} + 1 & ; x \leq -1 \end{cases}$ 1 لدينا : $Df = \{x \in]-1; +\infty[/ x+1 \neq 0\} \cup \{x \in]-\infty; -1] / -x^3 - x^2 \geq 0\}$ $Df =]-1; +\infty[\cup \{x \in]-\infty; -1] / -x^2(x+1) \geq 0\}$ $Df =]-1; +\infty[\cup \{x \in]-\infty; -1] / (x+1) \leq 0\}$ $Df =]-1; +\infty[\cup]-\infty; -1]$ $Df = \mathbb{R}$	
	لدينا الدالة $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ متصلة على $] -1; +\infty[$ و $h(]-1; +\infty[) \subset \mathbb{R}$ و الدالة $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذن الدالة $x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)$ متصلة على $] -1; +\infty[$ ، ولدينا أيضا الدالة $x \mapsto \frac{-2}{p} x^2$ متصلة على $] -1; +\infty[$ إذن f متصلة على $] -1; +\infty[$ ولدينا الدالة الحدودية $s: x \mapsto -x^3 - x^2$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $s(]-\infty; -1]) \subset [0; +\infty[$ و الدالة $x \mapsto -\sqrt[3]{x}$ متصلة على $] -\infty; -1]$ إذن f متصلة على $] -\infty; -1]$ من جهة أخرى لدينا : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{-2}{p} x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 2 = \frac{-2}{p} \times 1 \times \frac{p}{2} + 2 = -1 + 2 = 1$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} -\sqrt[3]{-x^3 - x^2} + 1 = 1$ منه : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = f(-1)$ بالتالي f متصلة على $\mathbb{R}$	III
	3 لدينا : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{\frac{-2}{p} x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{\frac{-2}{p} x^2 \left(\frac{p}{2} - \operatorname{Arctan}(x+1)\right) + 1}{x+1}$ $= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{-x^2 + \frac{2}{p} \operatorname{Arctan}(x+1) + 1}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1-x^2}{x+1} + \frac{\frac{2}{p} \operatorname{Arctan}(x+1)}{x+1}$ $= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} 1-x + \frac{2}{p} \frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{x+1} = 1 - (-1) + \frac{2}{p} \times 1 = 2 + \frac{2}{p}$ بالتالي f قابلة للاشتقاق يمين -1 و لدينا : $f'_d(-1) = 2 + \frac{2}{p}$	3
	4 إذن f غير قابلة للاشتقاق يسار -1 ، لكن (Cf) يقبل نصف مماس عمودي في النقطة ذات الأفضول -1 . 🍌 وضعنا $t = -x$ تفاديا لأخطاء الإشارة داخل الجذر مكعب. $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{-\sqrt[3]{-x^3 - x^2}}{x+1} = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} \frac{-\sqrt[3]{t^3 - t^2}}{-t+1} = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} \frac{\sqrt[3]{t^2(t-1)}}{t-1} = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} \sqrt[3]{\frac{t^2}{(t-1)^2}} = +\infty$	4

	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \frac{2}{p}x - \frac{2}{p} - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{p}x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 2 + \frac{2}{p}x - \frac{2}{p} - 2$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{p}x \left(-x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) + 1 \right) - \frac{2}{p}$ $= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{2}{p} \left(\frac{1}{t} - 1 \right) \left(\left(1 - \frac{1}{t} \right) \operatorname{Arctan}(t) + 1 \right) - \frac{2}{p}$ $= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{2}{p} \left(\frac{1-t}{t} \right) \left(\operatorname{Arctan}(t) + \frac{t - \operatorname{Arctan}(t)}{t} \right) - \frac{2}{p} \quad \text{لدينا :}$ $= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{2}{p} (1-t) \left(\frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} + \frac{t - \operatorname{Arctan}(t)}{t^2} \right) - \frac{2}{p}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \frac{2}{p}x - \frac{2}{p} - 2 = \frac{2}{p} \times (1-0)(1+0) - \frac{2}{p} = 0$ بالتالي : (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y = \frac{-2}{p}x + \frac{2}{p} + 2$ جوار (Δ_1) جوار $+\infty$	5	
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt[3]{-x^3 - x^2} + 1 - x - \frac{4}{3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\sqrt[3]{t^3 - t^2} + t - \frac{1}{3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t - \sqrt[3]{t^3 - t^2} - \frac{1}{3}$ $= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 - (t^3 - t^2)}{t^2 + t\sqrt[3]{t^3 - t^2} + (\sqrt[3]{t^3 - t^2})^2} - \frac{1}{3}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt[3]{-x^3 - x^2} + 1 - x - \frac{4}{3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{t^2 \left[1 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{t}} + \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{t}} \right)^2 \right]} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ إذن : (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y = x + \frac{4}{3}$ جوار (Δ_2) جوار $-\infty$	6	
	$f'(x) = \frac{-2}{p} \left(2x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) + x^2 \frac{\frac{-1}{(x+1)^2}}{1 + \left(\frac{1}{x+1}\right)^2} \right)$ لدينا لكل $x > -1$: $f'(x) = \frac{-2}{p} \left(2x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) + x^2 \frac{-1}{1 + (x+1)^2} \right)$ $f'(x) = \frac{-2x}{p} \left(2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x}{1 + (x+1)^2} \right)$ $f'(x) = \frac{-2x}{p} g(x)$ ولكل $x < -1$: $f'(x) = \left(-(-x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{-1}{3} (-x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}-1} \times (-x^3 - x^2)' = \frac{x(3x+2)}{3(\sqrt[3]{-x^3 - x^2})^2}$	7	

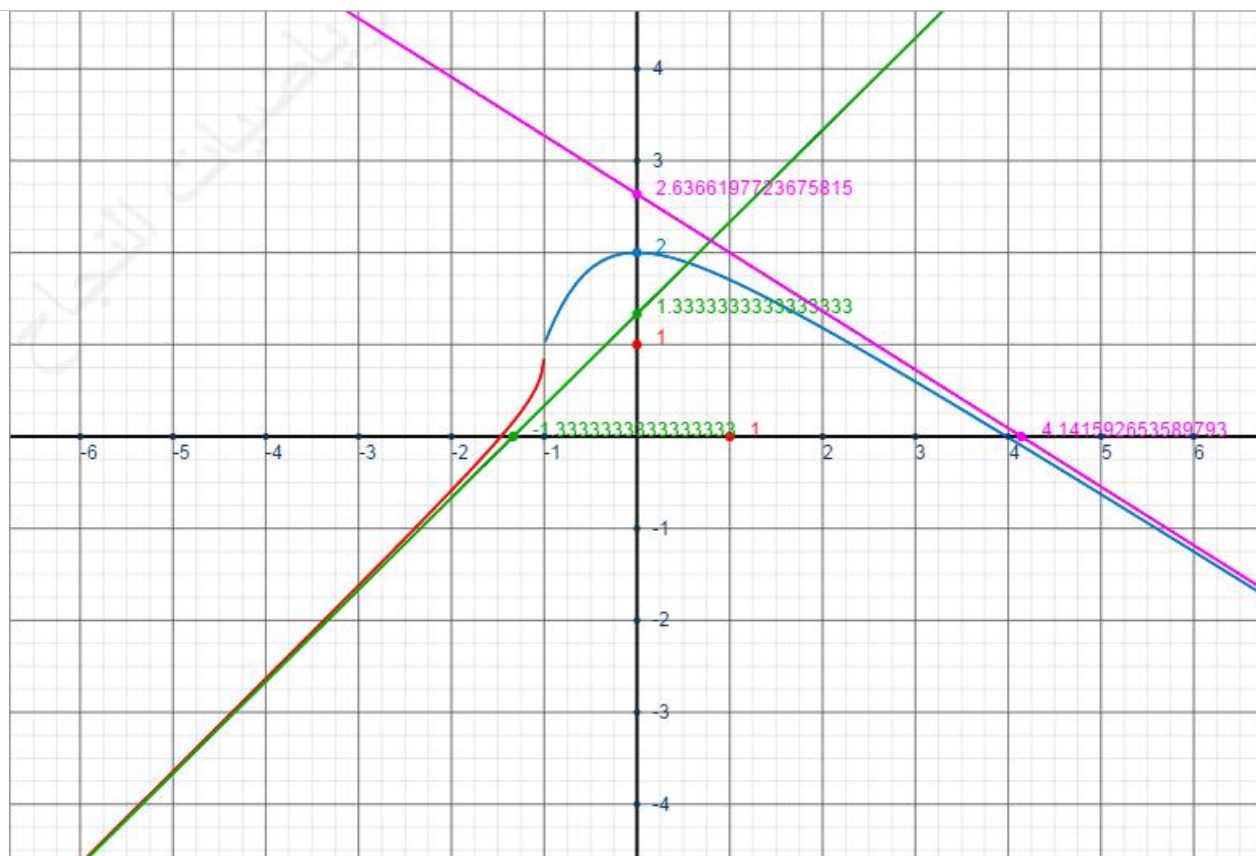
بما أن : $g(x) > 0 \quad \forall x > -1$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة x على $]-1; +\infty[$

$$x < -1 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3x + 2 < -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow x(3x + 2) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$$

منه:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	$-\infty$	1	1	$+\infty$

8



9

تمرين 2: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

بالنسبة لـ $n = 0$ لدينا $u_0 \geq 1$

نفترض أن $u_n \geq 1$ و نبين أن : $u_{n+1} \geq 1$

لدينا : $u_{n+1} \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} - 1 = \frac{1}{u_n} > 0 \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$ ، بالتالي بالنسبة بين أن : $u_n \geq 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1

$$v_n = u_{2n} \text{ و } w_n = u_{2n+1}$$

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ و الدالة : $g(x) = f \circ f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$

لدينا : $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(w_n)$ و $w_n = u_{2n+1} = f(u_{2n}) = f(v_n)$

منه : $v_{n+1} = f(w_n) = f(f(v_n)) = g(v_n)$ و $w_{n+1} = f(v_{n+1}) = f(f(w_n)) = g(w_n)$

2

من جهة أخرى لدينا : $\forall (x, y) \in]0; +\infty[\quad x > y \Rightarrow x+1 > y+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{y+1} \Rightarrow \frac{-1}{x+1} > \frac{-1}{y+1} \Rightarrow g(x) < g(y)$

إذن g تزايدية على $]0; +\infty[$

	الآن لدينا : $w_1 < w_0$ و $v_1 > v_0$ منه : $w_1 = u_3 = \frac{5}{3}$ و $v_1 = u_2 = \frac{3}{2}$ و $w_0 = u_1 = 2$ و $v_0 = u_0 = 1$ نفترض أن $w_{n+1} < w_n$ و $v_{n+1} > v_n$ إذن ولكون g تزايدية على $]0; +\infty[$ فإن : $g(w_{n+1}) < g(w_n)$ و $g(v_{n+1}) > g(v_n)$ منه : $w_{n+2} < w_{n+1}$ و $v_{n+2} > v_{n+1}$ بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+2} < w_{n+1}$ و $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} > v_{n+1}$ أي أن (v_n) تزايدية وأن (w_n) تناقصية.	
	لدينا : $v_{n+1} - w_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{1+v_n}\right) - \left(2 - \frac{1}{1+w_n}\right) = \frac{1}{1+w_n} - \frac{1}{1+v_n} = \frac{v_n - w_n}{(1+v_n)(1+w_n)}$ منه : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \begin{cases} v_n \geq 1 \\ w_n \geq 1 \end{cases}$ فإن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq 1$ ولكون : $\left \frac{v_{n+1} - w_{n+1}}{v_n - w_n} \right = \frac{1}{(1+v_n)(1+w_n)}$ منه : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} - w_{n+1} \leq \frac{1}{4} v_n - w_n$ بالتالي : $\frac{1}{(1+v_n)(1+w_n)} \leq \frac{1}{4}$	(ب)
	يمكن أيضا استعمال مبرهنة التزايديات المنتهية، لكن سهولة الحساب تجعل هذه الطريقة أفضل.	
	باستعمال س ب) وبتعويض n بقيم متتالية وبضرب المتفاوتات المحصل عليها طرفا بطرف وبعد الاختزال نجد : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - w_n) = 0$ منه : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n - w_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n v_0 - w_0$ ولكون (v_n) و (w_n) إحداهما تزايدية والأخرى تناقصية فهما متحاذيتان	(ج)
	بما أن (v_n) و (w_n) متحاذيتان فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية ℓ، إذن (u_n) متقاربة نهايتها ℓ ولكون : $u_{n+1} = f(u_n)$ و f متصلة على $[1; +\infty[$ و $f([1; +\infty[) \subset [1; +\infty[$ فإن : $f(\ell) = \ell$ هذه المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والآخر هو العدد الذهبي : $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	(د)
	الاستنتاج هنا اعتمد على الخاصية : إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ و التي نبرهن عنها باستعمال التعريف. (انظر الكتاب المدرسي ص 72 س 5)	