

التمرين الأول :

أحسب النهايات التالية : (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) \sin\left(\frac{E(x)}{x^2}\right)$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 + x^2} \cos x}{x^2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^3} (\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x})$ (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{x^2} - \sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt[4]{x^2} + \sqrt{x}}$

التمرين الثالث :

(1) باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية بين أن :
 $\left(\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\right) : \sin x \leq x \text{ و } x \leq \tan x$

(2) بين أن $\left(\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\right) : 0 \leq \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \leq \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

(3) أستنتج $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$

التمرين الثاني :

(1) بين أن $(\forall x \geq 0) \left(\exists! \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right) x = \tan^2 \alpha$

(2) استنتج أن :

(3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :
 $\arctan x - 2 \arctan\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

التمرين الرابع :

لتكن f دالة متصلة على المجال $]a, b[$ وبحيث : $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

نعتبر الدالة g المعرفة على $]a, b[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \arctan(f(x)) ; & x \in]a, b[\\ g(a) = -\frac{\pi}{2} ; & g(b) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

أ) أدرس اتصال الدالة g المعرفة على $]a, b[$

ب) استنتج أن : $(\exists c \in]a, b[) f(c) = 0$

(2) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$g(0) = 0 \text{ و } g(x) = \frac{f(x)}{x} ; x > 0$$

أ- بين أن g متصلة على $\mathbb{R}^+$

ب- بين أن g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

(3) استنتج أن $(\exists c \in]0, b[) \frac{f(c)}{c} = f'(c)$

التمرين الخامس :

لتكن f دالة عددية معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و f' متصلة وبحيث :

$$\begin{cases} f(0) = 0 ; & f'_d(0) = 0 \\ (\exists a \in \mathbb{R}^{+*}) : & f(a) < 0 ; f'(a) > 0 \end{cases}$$

(1) بين أن : $(\exists b \in]0, a[) f(b) = 0$

التمرين السادس :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي : $f(x) = \sin x$

(1) بين أن f تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

(2) ليكن التقابل العكسي للدالة f . بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $] -1, 1[$ وأن $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) نعتبر الدالة φ المعرفة على المجال $[-1, 1]$ بما يلي : $\varphi(x) = f^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

أ- بين أن f^{-1} فردية ثم أدرس زوجية الدالة φ

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة φ على المجال $[-1, 1]$ وأحسب المشتقة $\varphi'(x)$

ج- استنتج أن : $\varphi(x) = 2f^{-1}(x)$ $\left(\forall x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \right)$