

2015-14

فرض رقم 1

الثانية علوم رياضية

التمرين الأول :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2\sqrt[3]{1 - x^3} + 1}{3x + \sqrt{x^2 + 1} - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - x - 1}{\sqrt{x + 3} - \sqrt[3]{x} - 1} : \text{أحسب النهايات التالية :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2E(x)}{x + E(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 E\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sqrt{1 + 2x} - 1 - x)}{x^2}$$

التمرين الثاني :

$$(1) \text{ بين أن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{n} \quad (\text{يمكن وضع } t = \sqrt[n]{x+1})$$

$$(2) \text{ استنتج النهايتين } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{x} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} \sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$$

$$(3) \text{ بين أن } (\forall n \geq 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} \sqrt[3]{x+1} \times \dots \times \sqrt[n]{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

التمرين الثالث :

$$\begin{cases} f(x) = \sin\left(\frac{x}{a}\right) E\left(\frac{a}{x}\right) & ; \quad x < 0 \\ f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{2\sqrt{\tan x} - \sqrt{2 \sin 2x}}{x^2 \sqrt{x}} & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

ليكن a عددا من $\mathbb{R}^*$ و نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$(1) \text{ بين أن } (\forall x < 0) \left| f(x) - \frac{a}{x} \sin\left(\frac{x}{a}\right) \right| \leq \left| \sin\left(\frac{x}{a}\right) \right|$$

$$(2) \text{ هل الدالة } f \text{ متصلة في النقطة } 0 ?$$

التمرين الرابع :

$$\text{لتكن } f \text{ دالة متصلة على المجال } [0, 1] \text{ و بحيث } f(0) = f(1) \text{ و نضع } G(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$(1) \text{ أدرس اتصال الدالة } G \text{ على المجال } \left[0, \frac{2}{3}\right]$$

$$(2) \text{ أحسب } G(0) + G\left(\frac{1}{3}\right) + G\left(\frac{2}{3}\right) \text{ و استنتج أن : } f(\alpha) = f\left(\alpha + \frac{1}{3}\right) \quad \left(\exists \alpha \in \left[0, \frac{2}{3}\right]\right)$$

التمرين الخامس :

$$(1) \text{ بين أن : } (\forall a \in \mathbb{R}^{+*}) (\forall b \in \mathbb{R}^{+*}) \arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$$

$$(2) \text{ أحسب النهاية } \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} \left(\arctan \sqrt{x+1} - \arctan \sqrt{x} \right)$$

$$(3) \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة } \arctan(x-1) - \arctan \frac{2013}{x} = \frac{\pi}{4}$$