المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2023

NS 24	الموضوع	SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSS

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

تعليمات:

- مدة الاختبار هي أربع ساعات.
- يتضمن موضوع الاختبار خمسة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن أن تنجز التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالتحليل..(7.75 نقطة)
- التمرين 2 يتعلق بالتحليل..(2.25 نقطة)
- التمرين 3 يتعلق بالأعداد العقدية................................(3.5 نقطة)
- التمرين 4 يتعلق بالحسابيات......................................(3 نقط)
- التمرين 5 يتعلق بالبنيات الجبرية.................................(3.5 نقطة)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر

التمرين 1: (7.75 نقطة)

الجزء I

0.5 | 1- أ) بين أن: $\dfrac{4}{(2+t)^2} \le \dfrac{1}{1+t} \le \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{(1+t)^2}\right) \quad ; \quad \forall t \in [0,+\infty[$

0.5 | ب) استنتج أن: $\dfrac{2x}{2+x} \le ln(1+x) \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+2x}{1+x}\right) \quad ; \quad \forall x \in [0,+\infty[$

2- لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي:

$$g(x) = \frac{ln(1+x)}{x}$$

0.5 | بين أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{g(x)-1}{x} = \dfrac{-1}{2}$

الجزء II

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$f(0)=1 \quad \text{و} \quad f(x)=g(x)e^{-x} \quad ; \quad \forall x \in]0,+\infty[$$

و ليكن (C) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5 | 1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.25 | 2- أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0

0.25 | ب) تحقق أن: $\dfrac{f(x)-1}{x} = \left(\dfrac{e^{-x}-1}{x}\right)g(x) + \left(\dfrac{g(x)-1}{x}\right) \quad ; \quad \forall x \in]0,+\infty[$

0.5 | ج) استنتج أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و حدد $f'_d(0)$

0.75 | 3- بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم أن:

$$\forall x \in]0,+\infty[\; ; \; f'(x) = \frac{x-(1+x)^2 ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}$$

0.5 | 4- أ) بين أن: $-\dfrac{3}{2} < \dfrac{x-(1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0 \quad ; \quad \forall x \in]0,+\infty[$

0.25 | ب) استنتج أن: $-\dfrac{3}{2} < f'(x) < 0 \quad ; \quad \forall x \in]0,+\infty[$

0.25 | 5- أ) اعط جدول تغيرات الدالة f

0.75 | ب) أنشئ المنحنى (C) مبرزا نصف المماس على اليمين في النقطة ذات الأفصول 0

(نأخذ $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$)

الجزء III

0.5 — 1- بين أن المعادلة ذات المجهول x : $f(x)=3x$ ، تقبل حلا وحيدا α في $]0,+\infty[$

2- ليكن $\beta \in \mathbb{R}^+$ و $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$u_0=\beta \quad \text{و} \quad \forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}=\frac{1}{3}f(u_n)$$

0.5 — أ) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n\geq 0$

0.5 — ب) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|\leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0.5 — ج) بين بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ |u_n-\alpha|\leq \frac{1}{2^n}|\beta-\alpha|$

0.25 — د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تؤول إلى α

<u>التمرين 2</u>: (2.25 نقطة)

نعتبر الدالة العددية: $x\mapsto e^x$ و ليكن (Γ) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

لكل $n\in\mathbb{N}^*$ و لكل $k\in\{0;1;\ldots;n\}$ ، نشير بالرمز M_k إلى نقطة المنحنى (Γ) ذات الإحداثيات $\left(\frac{k}{n}\,;\,e^{\frac{k}{n}}\right)$

0.5 — 1- أ) بين أن: $e^{\frac{k+1}{n}}-e^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}e^{c_k}\ :\ \exists c_k\in\left]\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[\quad \forall k\in\{0;1;\ldots;(n-1)\}$

0.25 — ب) بين أن: $\forall k\in\{0;1;\ldots;(n-1)\}\ ;\ M_kM_{k+1}=\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}}$

(M_kM_{k+1} هي المسافة من M_k إلى M_{k+1})

0.5 — ج) استنتج أن: $\forall k\in\{0;1;\ldots;(n-1)\}\ ;\ \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}\leq M_kM_{k+1}\leq \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2- لتكن $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ S_n=\sum_{k=0}^{n-1}M_kM_{k+1}$

0.5 — أ) تحقق أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}\leq S_n\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

0.5 — ب) استنتج أن: $\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

<u>التمرين 3</u>: (3.5 نقطة)

نعتبر العدد العقدي: $u=1+\left(2-\sqrt{3}\right)i$

0.5 — 1- أ) اكتب على الشكل الأسي الأعداد العقدية: $1-i$ و $1+\sqrt{3}i$

0.25 — ب) بين أن: $\frac{(1-i)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{12}}$

ج) استنتج أن: $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$ 0.25

د) بين أن: $u=(\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$ 0.5

2- نعتبر المتتاليتين العدديتين $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي:

$$x_0=1 \quad ، \quad y_0=0 \quad \text{و} \quad \begin{cases} x_{n+1}=x_n-\left(2-\sqrt{3}\right)y_n \\ y_{n+1}=\left(2-\sqrt{3}\right)x_n+y_n \end{cases} \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N})$$

أ) بين بالترجع أن لكل $n\in\mathbb{N}$ ، $x_n+iy_n=u^n$ 0.5

ب) استنتج أن لكل $n\in\mathbb{N}$: $x_n=\dfrac{\cos\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^n}$ و $y_n=\dfrac{\sin\left(\dfrac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{12}\right)^n}$ 0.5

3- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

لكل عدد صحيح طبيعي n، نشير بالرمز A_n إلى النقطة ذات اللحق u^n

أ) حدد الأعداد الصحيحة n التي تكون من أجلها النقط O و A_0 و A_n مستقيمية. 0.5

ب) بين أن لكل عدد صحيح n، المثلث OA_nA_{n+1} قائم الزاوية في A_n 0.5

التمرين4: (3 نقط)

ليكن p **عددا أوليا فرديا**. نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة: $(E)\ :\ x^2\equiv 2\ [p]$

1- أ) بين أن: $2^{p-1}\equiv 1\ [p]$ 0.25

ب) استنتج أن: $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ [p]$ أو $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1\ [p]$ 0.25

(نلاحظ أن: $(2^{\frac{p-1}{2}}-1)(2^{\frac{p-1}{2}}+1)=2^{p-1}-1$)

2- ليكن x حلا للمعادلة (E)

أ) بين أن p و x أوليان فيما بينهما. 0.5

ب) استنتج أن: $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ [p]$ (يمكن استعمال مبرهنة فيرما Fermat) 0.5

3- بين أن لكل $k\in\{1,2,...,p-1\}$، p يقسم C_p^k 0.25

(نذكر أن لكل $k\in\{1,2,...,p-1\}$: $C_p^k=\dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ و $kC_p^k=pC_{p-1}^{k-1}$)

4- أ) باستعمال صيغة موافر (Moivre)، بين أن: 0.25

$$(1+i)^p=2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right)+i\,2^{\frac{p}{2}}\sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$$

(i هو العدد العقدي بحيث: $i^2=-1$)

ب) نقبل أن: $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$ 0.5

بين أن: $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$ و $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1 \; [p]$ (يمكن استعمال السؤال 3-)

5- استنتج أنه إذا كان $p \equiv 5 \; [8]$ فإن المعادلة (E) لا تقبل حلا في $\mathbb{Z}$ 0.5

التمرين 5: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة غير تبادلية صفرها المصفوفة $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و وحدتها المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$، و أن $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.

نعتبر المجموعة $E = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

الجزء I:

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$ 0.5

2- بين أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ 0.25

3- أ) تحقق أن: $\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4 \;;\; M(x,y) \times M(x',y') = M(xx'+3yy', xy'+yx')$ 0.25

ب) استنتج أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية. 0.5

4- أ) تحقق أن: $M(\sqrt{3},1) \times M(-\sqrt{3},1) = O$ 0.25

ب) استنتج أن $(E,+,\times)$ ليس جسما. 0.25

الجزء II:

ليكن $F = \left\{ x + y\sqrt{3} \;/\; (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$ و $G = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$

1- بين أن: $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \;;\; x + y\sqrt{3} = 0$ يكافئ $(x = 0$ و $y = 0)$ 0.25

2- بين أن $F - \{0\}$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}^*,\times)$ 0.25

3- ليكن φ التطبيق المعرف من $F - \{0\}$ نحو E بما يلي:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2 - \{(0,0)\} \;;\; \varphi\left(x + y\sqrt{3}\right) = M(x,y)$$

أ) تحقق أن: $\varphi(F - \{0\}) = G - \{O\}$ 0.25

ب) بين أن φ تشاكل من $(F - \{0\},\times)$ نحو $(E,\times)$ 0.25

ج) استنتج أن $(G - \{O\},\times)$ زمرة تبادلية. 0.25

4- بين أن $(G,+,\times)$ جسم تبادلي. 0.25

انتهى