**I

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2022
– الموضوع –

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SS | NS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	مسلك العلوم الرياضية – أ و ب	المعامل	9

تعليمات:

- مدة الاختبار هي أربع ساعات.
- يتضمن موضوع الاختبار أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن أن تنجز التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين1 يتعلق بالتحليل...(10 نقط)
- التمرين2 يتعلق بالأعداد العقدية...................................(3.5 نقطة)
- التمرين3 يتعلق بالحسابيات.......................................(3 نقط)
- التمرين4 يتعلق بالبنيات الجبرية...................................(3.5 نقطة)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر

التمرين 1: (10 نقط)

A. 1- تحقق أن: $0 \leq 1 - x + x^2 - \dfrac{1}{x+1} \leq x^3 \quad ; \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$ 0.25

2- استنتج أن: $0 \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - ln(1+x) \leq \dfrac{x^4}{4} \quad ; \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$ 0.25

B. نعتبر الدالة f المعرفة على $I = [0,+\infty[$ بما يلي:

$f(0) = \dfrac{1}{2}$ و لكل x من $]0,+\infty[$ ؛ $f(x) = \dfrac{x - ln(1+x)}{x^2}$

و ليكن (C) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0 0.5

ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 0.5

ج) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

2-أ) بين أن: $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{x^3} \quad ; \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

حيث: $g(x) = x + \dfrac{x}{x+1} - 2ln(1+x)$ 0.5

ب) بين أن: $0 \leq g'(x) \leq x^2 \quad ; \quad (\forall x \in I)$ 0.5

ج) استنتج أن: $0 \leq g(x) \leq \dfrac{x^3}{3} \quad ; \quad (\forall x \in I)$ 0.25

د) حدد منحى تغيرات الدالة f على I 0.25

3-أ) اعط جدول تغيرات الدالة f 0.25

ب) مثل مبيانيا المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

(نأخذ $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm$) 0.5

C. 1- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0;1[$ بحيث $f(\alpha) = \alpha$ 0.5

2- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$u_0 = \dfrac{1}{3}$ و $u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

أ) بين أن: $u_n \in [0;1] \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ 0.5

ب) بين أن: $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)|u_n - \alpha| \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ 0.5

0.5 ج) بين بالترجع أن: $|u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

0.25 د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تؤول إلى α

D. لكل x من I، نضع: $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$

0.5 1- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على I و احسب $F'(x)$ لكل x من I

2- أ) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء، بين أن:

0.5 $$F(x)=2\ln 2-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x) \quad ; \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$$

0.5 ب) احسب $\lim_{x\to 0^+}F(x)$ ، ثم استنتج أن: $\int_0^1 f(t)dt = 2\ln(2)-1$

0.5 ج) احسب ، بالسنتمتر مربع (cm^2)، مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و محور الأراتيب و المستقيم ذي المعادلة $x=1$.

E. نضع: لكل k من $\mathbb{N}$ ، $\Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt$

و لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\Delta_k$

0.25 1-أ) تحقق أن: $0\le \Delta_k \le f(k)-f(k+1) \quad ; \quad (\forall k\in\mathbb{N})$

0.5 ب) استنتج أن: $0\le S_n\le \frac{1}{2} \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$

0.25 2 -أ) بين أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ رتيبة.

0.25 ب) استنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة.

0.25 ج) بين أن النهاية l للمتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تحقق: $\frac{3}{2} - 2\ln 2 \le l \le \frac{1}{2}$

التمرين 2 : (3.5 نقط)

ليكن m **عددا عقديا معلوما وغير منعدم** و $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z

$$(E_m) : \quad z^2+mj^2z+m^2j=0$$

0.5 1- تحقق أن: $j^3=1$ و $1+j+j^2=0$

0.25 2-أ) بين أن مميز المعادلة (E_m) هو: $\Delta=[m(1-j)]^2$

0.5 ب) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_m)

3- نفترض في هذا السؤال أن : $m=1+i$ — 0.5

بين أن $(z_1+z_2)^{2022}$ عدد تخيلي صرف.

II. المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

ليكن φ التحويل في المستوى العقدي الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث:

$$z'=(1+j)z$$

1- حدد طبيعة التطبيق φ وعناصره المميزة. — 0.25

2- نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي m و mj و mj^2

و لتكن $A'(a')$ و $B'(b')$ و $C'(c')$ صور النقط A و B و C على التوالي بالتطبيق φ ولتكن

$P(p)$ و $Q(q)$ و $R(r)$ منتصفات القطع $[BA']$ و $[CB']$ و $[AC']$ على التوالي.

أ) بين أن: $a'=-mj^2$ و $b'=-m$ و $c'=-mj$ — 0.75

ب) بين أن: $p+qj+rj^2=0$ — 0.25

ج) استنتج أن المثلث PQR متساوي الأضلاع. — 0.5

<u>التمرين3: (3 نقط)</u>

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E_n)\quad : \quad (x+1)^n - x^n = ny$

ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E_n) في $\mathbb{Z}^2$ و ليكن p **أصغر قاسم أولي** للعدد n

1- أ) بين أن: $(x+1)^n \equiv x^n\ [p]$ — 0.25

ب) بين أن p أولي مع x و مع $(x+1)$ — 0.25

ج) استنتج أن $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1}\ [p]$ — 0.25

2- بين أنه إذا كان n عددا زوجيا فإن المعادلة (E_n) لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ — 0.5

3- نفترض أن n عدد فردي.

أ) بين أنه يوجد زوج (u,v) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $nu+(p-1)v=1$ — 0.5

(نذكر أن p أصغر قاسم أولي للعدد n)

ب) ليكن q و r بالتوالي خارج و باقي القسمة الاقليدية للعدد u على العدد $(p-1)$.

تحقق أن : $nr=1-(p-1)(v+nq)$ — 0.25

ج) نضع: $v'=-(v+nq)$. بين أن: $v'\geq 0$ — 0.5

د) بين أن المعادلة (E_n) لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ — 0.5

التمرين4: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية غير تبادلية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية و كاملة.

ليكن: $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

0.25 1- أ) بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0.25 ب) تحقق أن لكل a و b و c و d من $\mathbb{Z}$، لدينا:

$$M(a,b)\times M(c,d)=M(ac+3bd,ad+bc)$$

0.5 ج) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية.

2- ليكن φ التطبيق من E نحو $\mathbb{Z}$ المعرف بما يلي:

$$\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2\quad;\quad\varphi(M(a,b))=\left|a^2-3b^2\right|$$

0.5 بين أن φ تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\times)$

3- لتكن $M(a,b)$ من E

0.25 أ) بين أن: $M(a,b)\times M(a,-b)=(a^2-3b^2).I$

0.5 ب) بين أنه إذا كانت $M(a,b)$ تقبل مقلوبا في $(E,\times)$ فإن : $\varphi(M(a,b))=1$

0.5 ج) نفترض أن $\varphi(M(a,b))=1$.
بين أن $M(a,b)$ تقبل مقلوبا في $(E,\times)$ و حدد مقلوبها.

0.25 4- أ) بين أن: $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2\quad;\quad\varphi(M(a,b))=0\Leftrightarrow a=b=0$

0.25 ب) استنتج أن الحلقة $(E,+,\times)$ كاملة.

0.25 ج) هل $(E,+,\times)$ جسم ؟ (علل جوابك).

انتهى