

الصفحة		الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة العادية 2021 - الموضوع -		 الجمهورية المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والامتحانات	
1	4				
**					
SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS					
4h	مدة الإنجاز	الرياضيات		المادة	
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		الشعبة أو المسلك	

١٠ - مدة الاختبار هي أربع ساعات.

- يتضمن موضوع الاختبار 3 تمارين مستقلة فيما بينها.

- يمكن أن تعالج التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالتحليل.....(12 نقط)

- التمرين 2 يتعلق بالأعداد العقدية.....(4 نقطة)

- التمرين 3 يتعلق بالحسابيات.....(4 نقط)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر في الكتابة

الصفحة	2	NS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2021 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
4			

التمرين 1: (12 نقط)

لكل عدد صحيح طبيعي n ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f_n(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx$
و ليكن (C_n) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (نأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

الجزء I:

- 1- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - nx + 2)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5
- ب) بين أن المنحنى (C_n) يقبل، في $-\infty$ ، مقاربا (Δ_n) يتم تحديد معادلة ديكراتية له. 0.5
- 2- أ) بين أن الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن: $f'_n(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ 0.5
- ب) بين أن: $\frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ 0.5
- ج) استنتج تغيرات الدالة f_n على $\mathbb{R}$ (نفصل بين الحالتين: $n=0$ و $n \geq 1$) 0.5
- 3- أ) حدد معادلة المماس للمنحنى (C_n) في النقطة I ذات الأفصول 0 0.5
- ب) بين أن النقطة I هي نقطة الانعطاف الوحيدة للمنحنى (C_n) 0.5
- 4- مثل مبيانيا في نفس المعلم، المنحنيين (C_0) و (C_2) 0.5
- 5- لكل عدد حقيقي $t > 0$ ، نضع $A(t)$ مساحة الحيز المستوي المحصور بالمنحنى (C_n) و المستقيمت ذات المعادلات بالتوالي: $y = nx - 2$ و $x = 0$ و $x = t$ 0.5
- أ) احسب $A(t)$ لكل $t > 0$ 0.5
- ب) احسب $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$ 0.5

الجزء II:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = f_0(u_n)$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

- 1- أ) بين أن المعادلة $f_0(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ 0.5
- ب) بين أن: $|f'_0(x)| \leq \frac{1}{2}$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ 0.5
- 2- أ) بين أن: $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ 0.5
- ب) استنتج أن: $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ 0.5
- ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تؤول إلى α 0.5

الصفحة	NS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2021 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	
3			
4			

الجزء III:		
نفترض في هذا الجزء أن $n \geq 2$		
0.5	1- أ) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد x_n هو حل للمعادلة $f_n(x) = 0$	
0.5	ب) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، $0 < x_n < 1$ (نأخذ $\frac{2e}{1+e} < 1.47$)	
0.5	2- أ) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، $f_{n+1}(x_n) > 0$	
0.5	ب) استنتج أن المتتالية $(x_n)_{n \geq 2}$ تناقصية قطعاً.	
0.5	ج) بين أن المتتالية $(x_n)_{n \geq 2}$ متقاربة.	
0.5	3- أ) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n} \left(\frac{2e}{1+e} \right)$	
0.5	ب) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ ثم بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$	
0.5	4- أ) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، لدينا: $x_n \leq x_2$	
0.5	ب) استنتج: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n$	

التمرين 2: (4 نقطة)		
لتكن a و b و c ثلاثة أعداد عقدية غير منعدمة بحيث: $a+b \neq c$		
0.5	1- أ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - (a+b+c)z + c(a+b) = 0$: (E)	
0.5	ب) نفترض في هذا السؤال أن: $a=i$ و $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $c=a-b$ اكتب حلي المعادلة (E) على الشكل الأسّي.	
2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$		
نعتبر النقط الثلاث $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ التي نفترض أنها غير مستقيمية.		
ليكن $P(p)$ مركز الدوران الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$ ويحول B إلى A و $Q(q)$ مركز الدوران الذي زاويته		
$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ويحول C إلى A و $D(d)$ منتصف القطعة $[BC]$		
1	أ) بين أن: $2p = b + a + (a-b)i$ و $2q = c + a + (c-a)i$	
0.5	ب) احسب: $\frac{p-d}{q-d}$	
0.5	ج) استنتج طبيعة المثلث PDQ	

الصفحة	4	NS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2021 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
4			

3- لتكن E ممثلة B بالنسبة للنقطة P و F ممثلة C بالنسبة للنقطة Q و K منتصف القطعة $[EF]$

0.5 (أ) بين أن لحيق K هو $k = a + \frac{i}{2}(c-b)$

0.5 (ب) بين أن النقط K و P و Q و D متداورة.

التمرين 3: (4 نقط)

الجزء I: نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $(E) : 47x - 43y = 1$

0.25 1- تحقق أن الزوج $(11, 12)$ حل خاص للمعادلة (E)

0.75 2- حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E)

الجزء II: نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة $(F) : x^{41} \equiv 4 \pmod{43}$

1- ليكن $x \in \mathbb{Z}$ حلا للمعادلة (F)

0.5 (أ) بين أن x و 43 أوليان فيما بينهما ثم استنتج أن: $x^{42} \equiv 1 \pmod{43}$

0.5 (ب) بين أن: $x \equiv 11 \pmod{43}$ $4x \equiv 1 \pmod{43}$ ثم استنتج أن: $x \equiv 11 \pmod{43}$

0.5 2- حدد مجموعة حلول المعادلة (F) في $\mathbb{Z}$

الجزء III: نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظام من معادلتين: $(S) : \begin{cases} x^{41} \equiv 4 \pmod{43} \\ x^{47} \equiv 10 \pmod{47} \end{cases}$

1- ليكن x حلا للنظمة (S) .

0.5 (أ) بين أن x حل للنظمة: $(S') : \begin{cases} x \equiv 11 \pmod{43} \\ x \equiv 10 \pmod{47} \end{cases}$

0.5 (ب) استنتج أن: $x \equiv 527 \pmod{2021}$ (يمكنك استعمال الجزء I)

0.5 2- حدد في $\mathbb{Z}$ مجموعة حلول النظمة (S)

انتهى