المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2020
- عناصر الإجابة -

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | NR 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

إنتباه:إذا أنجز المترشح التمرينين الاختياريين (بشكل كلي أو جزئي) تحتسب له فقط أحسن نقطة محصلة من بين النقطتين و ليس مجموع النقطتين.

التمرين1		عناصر الإجابة	سلم التنقيط
-1	أ)	إذا كان d قاسما مشتركا موجبا للعددين x و 13 فإنه قاسم مشترك للعددين 13 و 5 ، و منه $d=1$	0.5
	ب)	13 أولي و لا يقسم x و نطبق مبرهنة فيرما	0.5
	ج)	لدينا: $7x^3 \equiv 5\ [13]$ إذن $x^3 \equiv 2\times 5\ [13]$ لأن: $2\times 7 \equiv 1\ [13]$	1
	د)	لدينا: $x^3 \equiv 10\ [13]$ إذن $\left(x^3\right)^4 \equiv 10^4\ [13]$ و منه $x^{12} \equiv 3\ [13]$	0.5
-2		إذا كان $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ حلا للمعادلة (D) فإنه حسب السؤال 1- لدينا $x^{12} \equiv 1\ [13]$ و $x^{12} \equiv 3\ [13]$ إذن $3 \equiv 1\ [13]$ و هذا غير ممكن.	1

التمرين2		عناصر الإجابة	سلم التنقيط
-1	أ)	استقرار E في $\left(M_2(\mathbb{R}),\times\right)$	0.5
	ب)	البرهان على عدم تبادلية الضرب في E	0.5
	ج)	التحقق	0.5
-2		$(E,\times)$ زمرة غير تبادلية	0.5
-3	أ)	φ تشاكل	0.5
	ب)	φ تشاكل و $F=\varphi\left(\mathbb{R}^*\right)$ و $\left(\mathbb{R}^*,\times\right)$ زمرة تبادلية..................................0.5	1
		العنصر المحايد هو $I=\varphi(1)$..0.5	

التمرين3	عناصر الإجابة	سلم التنقيط
الجزء الأول:		
-1	لدينا: $(E) \Leftrightarrow (z-m)\left(z^2-mz+m^2\right)=0$ بالإضافة إلى الحل m نجد الحلين: $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}m=e^{i\frac{\pi}{3}}m$ و $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}m=e^{-i\frac{\pi}{3}}m$	

-2	أ)	لدينا: $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}=\frac{m}{m^2}$	0.25
	ب)	نجد $z_1=i\sqrt{3}$ و $z_2=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$	0.5
الجزء الثاني:			
-1		النقط O و A و B غير مستقيمية	0.25
-2	أ)	حساب p .... 0.5 حساب r 0.5	1
	ب)	حساب q	0.5
-3		لدينا: $\frac{p-r}{q}=i$ و نستنتج أن: $OQ=PR$ .... 0.25 $(OQ)\perp(PR)$ 0.25	0.5

التمرين4		عناصر الإجابة	سلم التنقيط
الجزء الأول:			
-1		$\frac{1}{c_x}=\ln(x+1)-\ln x$; $\exists c_x \in]x;x+1[$ .... 0.25 التأطير: $\frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$ 0.25	0.5
-2	أ)	لدينا: $\frac{x^2}{1+x}<\frac{f(x)}{x}<x$ إذن $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$	0.5
	ب)	لدينا: $\frac{x^2}{1+x}<\frac{f(x)}{x}$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب	0.5
-3	أ)	الدالة قابلة للاشتقاق .... 0.25 حساب $f'(x)$ 0.25	0.75
	ب)	لدينا: $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}>\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}>0$ إذن: $f'(x)>0$	0.5
	ج)	جدول تغيرات f	0.25
-4	أ)	حساب $g'(x)$ 0.5	0.75

السؤال	الفرع	عناصر الإجابة	التنقيط
		لدينا: $0 < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(1+x)}$ إذن: $g'(x) > 0$ 0.25	
	ب)	مبرهنة القيم الوسيطية تعطي وجود α و الرتابة القطعية للدالة g تعطي وحدانيته أو كذلك g تقابل من $]0;+\infty[$ إلى $]0;+\infty[$ ....0.25 ; نتحقق من $g(1) < 1 < g(2)$ 0.25	0.5
	د)	حلول المعادلة: $f(x)=x \Leftrightarrow x=0$ أو $x=\alpha$	0.5
-5	أ)	إنشاء المنحنى	0.5
	ب)	f تقابل من I نحو I	0.25
الجزء الثاني:			
-1		الترجع و f^{-1} تزايدية و كون $f^{-1}(\alpha)=\alpha$ و $f^{-1}(0)=0$	0.5
-2	أ)	$g(]0;\alpha[)=]0;1[$	0.5
	ب)	من أجل $0<x<\alpha$، لدينا $0<g(x)<1$; بما أن $0<u_n<\alpha$ فإن $0<f(u_n)<u_n$ إذن: $0<u_n<f^{-1}(u_n)=u_{n+1}$	0,5
	ج)	متتالية تزايدية و مكبورة	0.25
-3		إذا وضعنا: $l=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ فإن $0<u_0\le l\le\alpha$ لأن $(\forall n\ge 1)\ ;\ 0<u_0<u_n<\alpha$; و بما أن f^{-1} متصلة على $[0;\alpha]$ (و بالخصوص في l) فإن l هي حل المعادلة $f(x)=x$; إذن $l=\alpha$	0.5
الجزء الثالث:			
-1	أ)	لدينا $f(x)\ge 0$ اذن F موجبة من أجل $0\le x\le 1$ و سالبة من أجل $x\ge 1$	0.5
	ب)	F قابلة للاشتقاق على I ....0.25 ; و $F'(x)=-f(x)\ ;\ (\forall x\in I)$ 0.25	0.5
	ج)	$F'(x)=-f(x)<0\ ;\ (\forall x\in I)$ و $F'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$	0.25
-2	أ)	لدينا: $f(x)\ge \ln 2\ ;\ \forall x\ge 1$ ادن $\int_1^x f(t)dt \ge (x-1)\ln 2$	0.5
	ب)	$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$	0.25
-3	أ)	مكاملة بالأجزاء	0.5
	ب)	$\int_x^1 \frac{t^3}{t+1}dt=\frac{5}{6}-\ln 2-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+\ln(1+x)$	0.5
	ج)	المتساوية	0.5

	د)	$\lim_{x\to 0^+} F(x)=\frac{5}{24}$ ....0.25 F متصلة على اليمين في 0 إذن: $\int_0^1 f(t)dt=F(0)=\lim_{x\to 0^+} F(x)=\frac{5}{24}$ 0.25	0.5
-4	أ)	تطبيق مبرهنة أو متفاوتة التزايدات المنتهية على الدالة F في المجال $\left[\frac{k}{n},\frac{2k+1}{2n}\right]$ مع $f\left(\frac{k}{n}\right)\le f(x)\le f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$; $\left(\forall x\in\left[\frac{k}{n},\frac{2k+1}{2n}\right]\right)$	0.5
	ب)	نلاحظ أن: $\frac{2k+1}{2n}<\frac{k+1}{n}$	0.5
	ج)	$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ و $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$ مجاميع ريمان المرتبطة بالدالة f المتصلة على القطعة $[0,1]$ اذن المتتاليتين $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_n$ و $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_n$ متقاربتين و لهما نفس النهاية التي هي $F(0)=\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{24}$ و منه المتتالية (v_n) متقاربة (خاصية تلأطير النهايات) و نهايتها $-\frac{1}{2}F(0)=-\frac{5}{48}$	0.25