المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2020
- الموضوع -

**ا

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | NS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- المدة الزمنية لإنجاز الموضوع هي 4 ساعات.
- يتكون الموضوع من (5) صفحات مرقمة من 1/5 إلى 5/5
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- **المترشح ملزم بانجاز التمرين3 و التمرين4 و الاختيار بين انجاز إما التمرين1 و إما التمرين2**
- **على المترشح أن ينجز في المجموع ثلاثة (3) تمارين:**

- **التمرين1** و يتعلق بالحسابيات **(اختياري).................................... 3.5 نقط**
  و إما
  التمرين2 ويتعلق بالبنيات الجبرية **(اختياري).................................. 3.5 نقط**

- **التمرين3** و يتعلق بالأعداد العقدية **(إجباري)...................................... 3.5 نقط**

- **التمرين4** و يتعلق بالتحليل **(إجباري)... 13 نقطة**

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

اختر و أنجز إما التمرين1 و إما التمرين2

و أنجز إجباريا التمرين3 و التمرين4

التمرين1: (3.5 نقط/ اختياري) (إذا اخترت إنجاز التمرين1 فلا تنجز التمرين2)

نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $(D)\ :\ 7x^3-13y=5$

1- ليكن (x,y) من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ حلا للمعادلة (D)

0.5	أ) بين أن x و 13 أوليان فيما بينهما.
0.5	ب) استنتج أن: $x^{12}\equiv 1\ [13]$
1	ج) بين أن: $x^3\equiv 10\ [13]$
0.5	د) استنتج أن: $x^{12}\equiv 3\ [13]$

2- استنتج من الأسئلة السابقة أن المعادلة (D) لا تقبل حلا في $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 1

التمرين2: (3.5 نقطة/اختياري) (إذا اخترت إنجاز التمرين2 فلا تنجز التمرين1)

نرمز بالرمز $M_2(\mathbb{R})$ لمجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة غير تبادلية و واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية.

نعتبر المجموعة الجزئية E من $M_2(\mathbb{R})$ المعرفة بما يلي: $E=\left\{\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}\ ;\ y\in\mathbb{R}^*\right\}$

1- أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ 0.5

ب) بين أن الضرب غير تبادلي في E 0.5

ج) تحقق أن: $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{x}{y}\\0&\frac{1}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{x}{y}\\0&\frac{1}{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 0.5

2- بين أن $(E,\times)$ زمرة غير تبادلية. 0.5

3- نعتبر المجموعة الجزئية F من E المعرفة بما يلي: $F=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&x-1\\0&x\end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}^*\right\}$

أ) بين أن التطبيق φ المعرف بما يلي: $\varphi(x)=M(x)\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R}^*)$ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$ 0.5

ب) استنتج أن $(F,\times)$ زمرة تبادلية يجب تحديد عنصرها المحايد. 1

التمرين3: (3.5 نقط/إجباري)

ليكن m عدد عقدي غير منعدم.

الجزء الأول:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z ، $(E)\ :\ z^3-2mz^2+2m^2z-m^3=0$

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) (لاحظ أن m حلا للمعادلة (E)) 0.5

2- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) المخالفين للحل m

أ) تحقق أن: $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{m}$ 0.25

ب) في حالة: $m=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أكتب على الشكل الجبري z_1 و z_2 0.5

الجزء الثاني:

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A و B ذات الألحاق على التوالي: $a=me^{i\frac{\pi}{3}}$ و $b=me^{-i\frac{\pi}{3}}$

ليكن P مركز الدوران الذي زاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و يحول O إلى A

و Q مركز الدوران الذي زاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و يحول A إلى B

و R مركز الدوران الذي زاويته $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ و يحول B إلى O

0.25 — 1- بين أن النقط O و A و B غير مستقيمية.

1 — 2- أ) بين أن لحق P هو: $p=m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ وأن لحق R هو: $r=m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

0.5 — ب) بين أن لحق Q هو: $q=m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

0.5 — 3- بين أن $OQ=PR$ و أن المستقيمين (OQ) و (PR) متعامدان.

التمرين4: (13 نقطة/إجباري)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[0;+\infty[$ بما يلي:

$f(0)=0$ و لكل x من $]0;+\infty[$ ، $f(x)=x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

و ليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$)

0.5 — 1- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t\mapsto \ln(t)$ في المجال $[x,x+1]$ ، بين أن:

$$\frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}\quad ;\quad (\forall x\in]0;+\infty[)\qquad (P)$$

0.5 — 2- أ) باستعمال العبارة (P) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

0.5 — ب) باستعمال العبارة (P) بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه.

3- أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أن : **0.75**

$$(\forall x\in]0;+\infty[)\quad ;\quad f'(x)=3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right)$$

ب) استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على I (يمكن استعمال العبارة (P)) **0.5**

ب) اعط جدول تغيرات f **0.25**

4- لكل x من المجال $]0;+\infty[$ نضع: $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

أ) تحقق أن: $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad ;\quad g'(x)=2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right)$ **0.75**

ثم استنتج أن الدالة g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$ ؛

ب) بين أن المعادلة $g(x)=1$ تقبل على $\mathbb{R}_+^*$ ؛ حلا وحيدا نرمز إليه بالرمز α **0.5**

ثم تحقق أن α ينتمي إلى المجال $]1;2[$ (نأخذ: $\ln 2=0.7$ و $\ln\frac{3}{2}=1.5$)

د) استنتج أن الحلول الوحيدة للمعادلة $f(x)=x$ هي: 0 و α **0.5**

5- أ) مثل مبيانيا المنحنى (C) **0.5**

(حدد نصف المماس على اليمين في النقطة O و الفرع الشلجمي للمنحنى (C))

ب) بين أن الدالة f تقابل من I نحو I (نرمز بالرمز f^{-1} لتقابلها العكسي) **0.25**

الجزء الثاني:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $0<u_0<\alpha$ و لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$

1- بين بالترجع أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\quad ;\quad 0<u_n<\alpha$ **0.5**

2- أ) بين أن: $g(]0;\alpha[)=]0;1[$ **0.5**

ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا. **0.5**

ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة. **0.25**

3- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **0.5**

الجزء الثالث:

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال I بما يلي: $F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt\quad ;\quad (\forall x\in I)$

1- أ) أدرس حسب قيم x ، إشارة $F(x)$ — 0.5

ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على I و حدد مشتقتها الأولى F' — 0.5

ج) استنتج أن F تناقصية قطعا على I — 0.25

2- أ) بين أن: $F(x)\le(1-x)\ln 2 \quad ; \quad (\forall x\in[1;+\infty[)$ — 0.5

ب) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ — 0.25

3- أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن: — 0.5

$$(\forall x\in]0;+\infty[)\quad ;\quad F(x)=\frac{\ln 2}{4}-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\int_x^1\frac{t^3}{t+1}\,dt$$

ب) أحسب $\int_x^1 \frac{t^3}{t+1}\,dt$ لكل x من $]0;+\infty[$ (لاحظ أن: $\frac{t^3}{1+t}=t^2-t+1-\frac{1}{1+t}$) — 0.5

ج) استنتج أن: $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ F(x)=\frac{5}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ — 0.5

د) احسب $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$ ثم استنتج قيمة: $\int_0^1 f(t)\,dt$ — 0.5

4- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $v_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n من $\mathbb{N}^*$ و لكل عدد صحيح طبيعي k من $\{0,1,,,,,,,,,n-1\}$: — 0.5

$$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\le F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\le-\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ب) استنتج أن: $-\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)\le v_n\le -\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}f\left(\frac{k}{n}\right) \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$ — 0.5

(لاحظ أن: $\frac{2k+1}{2n}<\frac{k+1}{n}$)

ج)- بين أن المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ثم حدد نهايتها. — 0.25

انتهى