تصحيح التمرين الأول

.1

✓ لدينا : $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و $E \neq \varnothing$ ($I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$ لأن $I = M(1,0)$)

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من E و ليكن α و β من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\alpha M(a,b) + \beta M(x,y) &= \alpha\begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha a+\beta x & -3(\alpha b+\beta y) \\ \alpha b+\beta y & \alpha a+\beta x \end{pmatrix} \\
&= M(\alpha a+\beta x, \alpha b+\beta y) \in E
\end{aligned}$$

$$(\alpha a+\beta x, \alpha b+\beta y) \in \mathbb{R}^2$$

إذن : E فضاء متجهي جزئي من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

✓

- لتكن $M(x,y)$ من E

$$\begin{aligned}
M(x,y) &= \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3y \\ y & 0 \end{pmatrix} \\
&= x.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= x.I + y.J
\end{aligned}$$

إذن (I,J) أسرة مولدة للفضاء E

- ليكن α و β من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\alpha.I + \beta.J = O &\Rightarrow M(\alpha,\beta) = O \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

إذن (I,J) أسرة حرة للفضاء E

وبالتالي (I,J) أساس للفضاء E

و منه $\dim E = card(\{I,J\}) = 2$

2. أ) لنبين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

لدينا : $E \neq \varnothing$ و $E \subset M_2(\mathbb{R})$

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من E

$$\begin{aligned} M(a,b)\times M(x,y) &= \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-3by & -3ay-3bx \\ bx+ay & -3by+ax \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-3by & -3(ay+bx) \\ ay+bx & ax-3by \end{pmatrix} \\ &= M(ax-3by, ay+bx) \in E \end{aligned}$$

$(ax-3by, ay+bx) \in \mathbb{R}^2$

إذن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ب) لنبين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية

❖

✓ $(E,+)$ زمرة تبادلية (لأن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي)

✓ بما أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ و $\times$ تجميعي و توزيعي بالنسبة ل $+$ في $M_2(\mathbb{R})$

فإن $\times$ تجميعي و توزيعي بالنسبة ل $+$ في E

إذن $(E,+,\times)$ حلقة

❖

✓ $I = M(1,0)$ هو العنصر المحايد بالنسبة ل $\times$

إذن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية

❖

✓ $\times$ تبادلي في E

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من E

لدينا : $M(a,b)\times M(x,y) = M(ax-3by, ay+bx)$

و : $M(x,y)\times M(a,b) = M(xa-3yb, xb+ya)$

إذن لكل $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من E : $M(a,b)\times M(x,y) = M(x,y)\times M(a,b)$

و بالتالي : $(E,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية

3. أ)

❖ ليكن (a,b) و (x,y) من $\mathbb{R}^2$

$$\varphi\big((a+ib)\times(x+iy)\big)=\varphi\big((ax-by)+i(ay+bx)\big)=M\left(ax-by,\frac{ay+bx}{\sqrt{3}}\right)\quad ✓$$

$$\begin{aligned}\varphi(a+ib)\times\varphi(x+iy) &= M\left(a,\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\times M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\\ &= M\left(ax-3\times\frac{b}{\sqrt{3}}\times\frac{y}{\sqrt{3}},a\times\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{b}{\sqrt{3}}\times x\right)\quad ✓\\ &= M\left(ax-by,\frac{ay+bx}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

❖ ليكن $M(a,b)$ من E^*

لنحل المعادلة : $\varphi(x+iy)=M(a,b)$

$$\begin{aligned}\varphi(x+iy)=M(a,b) &\Leftrightarrow M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)=M(a,b)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=a\\ \dfrac{y}{\sqrt{3}}=b\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=a\\ y=b\sqrt{3}\end{cases}\end{aligned}$$

إذن لكل $M(a,b)$ من E^* يوجد زوج وحيد $(x,y)=(a,b\sqrt{3})$ من $\mathbb{R}^2$ بحيث :

$$\varphi(x+iy)=M(a,b)$$

و منه φ تقابل من $\mathbb{C}^*$ نحو E^*

و بالتالي : φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

ب) بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$ و $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية فإن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية

ج)

✓

$$\begin{aligned}
J^{2017} &= \left(M(0,1)\right)^{2017} \\
&= \left(M\left(0,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right)^{2017} \\
&= \left(\varphi(0+i\sqrt{3})\right)^{2017} \\
&= \left(\varphi(i\sqrt{3})\right)^{2017} \\
&= \varphi\left(\left(\sqrt{3}\right)^{2017}\times i\right) \\
&= \varphi\left(\left(\sqrt{3}\right)^{2016}\sqrt{3}\times i\right) \\
&= \varphi\left(3^{1008}\sqrt{3}\times i\right)
\end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned}
\left(J^{2017}\right)^{-1} &= \left(\varphi\left(3^{1008}\sqrt{3}\times i\right)\right)^{-1} \\
&= \varphi\left(\left(3^{1008}\sqrt{3}\times i\right)^{-1}\right) \\
&= \varphi\left(\frac{1}{3^{1008}\sqrt{3}\times i}\right) \\
&= \varphi\left(\frac{-i}{3^{1008}\sqrt{3}}\right) \\
&= \varphi\left(0+i\left(\frac{-1}{3^{1008}\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= M\left(0,\frac{-\sqrt{3}}{3^{1008}\times\sqrt{3}}\right) \\
&= M\left(0,\frac{-1}{3^{1008}}\right)
\end{aligned}$$

.4

✓ لدينا $(E,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية

✓ إذن يكفي أن نبين أن كل عنصر $M(x,y)$ من E^* يقبل مقلوبا

ليكن $M(x,y)$ من E بحيث : $M(x,y)\neq M(0,0)$

لدينا $M(x,y)=\begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix}$

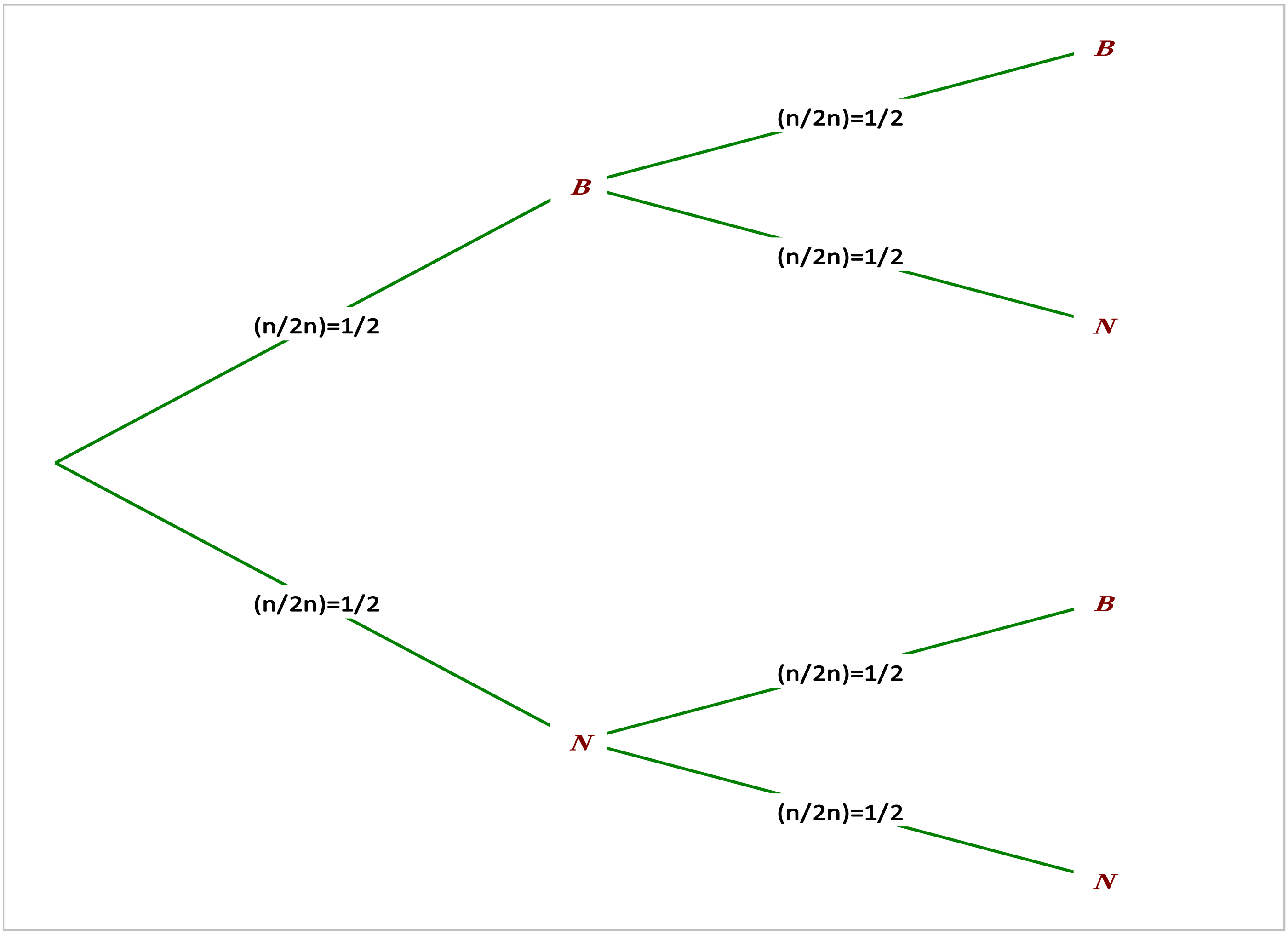
$$d\acute{e}tM(x,y)=\begin{vmatrix} x & -3y \\ y & x \end{vmatrix}=x^2+3y^2$$

إذن $d\acute{e}tM(x,y)\neq 0$ (لأن $(x,y)\neq(0,0)$)

$$\big(M(x,y)\big)^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+3y^2} & \dfrac{3y}{x^2+3y^2} \\ \dfrac{-y}{x^2+3y^2} & \dfrac{x}{x^2+3y^2} \end{pmatrix}=M\left(\frac{x}{x^2+3y^2},\frac{-y}{x^2+3y^2}\right)\in E^*$$

و بالتالي : $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

تصحيح التمرين الثاني



1. ليكن الحدث E " ربح 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أبيض

$$p(E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ليكن الحدث F " خسارة 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أسود

$$p(F)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ليكن الحدث G " الربح منعدم " بمعنى الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون

$$p(G)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

2. أ) لنحسب احتمال ربح 100 نقطة بمعنى تحقق الحدث E خمس مرات

$$C_5^5\,(p(E))^5\,(1-p(E))^{5-5}=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^5\times\left(\frac{3}{4}\right)^0=\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

ب) لنحسب احتمال ربح 40 نقطة بمعنى تحقق الحدث E مرتين

$$C_5^2\,(p(E))^2\,(1-p(E))^{5-2}=10\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{270}{1024}=\frac{135}{512}$$

.3 أ) $p(X=-20)=p(F)=\frac{1}{4}$

$$p(X=0)=p(G)=\frac{1}{2}$$

$$p(X=20)=p(E)=\frac{1}{4}$$

قانون احتمال X

x_i	-20	0	20
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ب) الأمل الرياضي :

$$E(X)=\left(-20\times\frac{1}{4}\right)+\left(0\times\frac{1}{2}\right)+\left(20\times\frac{1}{4}\right)=0$$

تصحيح التمرين الثالث

.1 ليكن $z\in\mathbb{C}^*$

M و M' منطبقتين تكافئ $z'=z$

تكافئ $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=z$

تكافئ $z=\frac{1}{z}$

تكافئ $z^2=1$

تكافئ $z=1$ أو $z=-1$

.2 ليكن $z\in\mathbb{C}^*-\{-1,1\}$

$$\begin{aligned}
\frac{z'+1}{z'-1} &= \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1}\\
&= \frac{z+\frac{1}{z}+2}{z+\frac{1}{z}-2}\\
&= \frac{z^2+1+2z}{z^2+1-2z}\\
&= \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}\\
&= \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2
\end{aligned}$$

إذن $\frac{z'+1}{z'-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ لكل z من $\mathbb{C}^*-\{-1,1\}$

.3 ليكن Δ واسط القطعة AB

نفترض أن M تنتمي إلى Δ

إذن $AM=BM$

إذن $\frac{BM}{AM}=1$ $\qquad M\neq A$

لنبين أن M' تنتمي إلى Δ

لدينا : $\frac{BM'}{AM'}=\frac{|z'+1|}{|z'-1|}=\left|\frac{z'+1}{z'-1}\right|=\left|\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right|=\left(\frac{|z+1|}{|z-1|}\right)^2=\left(\frac{BM}{AM}\right)^2=1^2=1$

إذن $AM'=BM'$

و منه M' تنتمي إلى Δ

4. لتكن Γ الدائرة التي أحد أقطارها AB

نفترض أن M تنتمي إلى Γ

إذن $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ $\quad(\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM})$

إذن $\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$

لنبين أن M' تنتمي إلى AB

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{BM'}\right) &\equiv \arg\left(\frac{z'+1}{z'-1}\right)\ [2\pi]\\ &\equiv \arg\left(\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right)\ [2\pi]\\ &\equiv 2\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\ [2\pi]\\ &\equiv \pi\ [2\pi]\end{aligned}$$

لأن : $\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$

إذن A و B و M' نقط مستقيمية و منه M' تنتمي إلى (AB)

تصحيح التمرين الرابع

الجزء الأول :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\forall x\in\ ]0,+\infty[\quad f(x)=\frac{Arc\tan(x)}{x}\quad \text{و}\quad f(0)=1$$

1. لنبين أن f متصلة على المجال I

✓ لندرس اتصال f في 0 على اليمين

لدينا $f(0)=1$

و $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{Arc\tan(x)}{x}=1$

بما أن $\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)$ فإن f في 0 على اليمين

✓ $f_1 : x \mapsto Arc\tan\ x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص متصلة على $0,+\infty$

$f_2 : x \mapsto x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص متصلة على $0,+\infty$

و $f_2\ \ x\ \neq 0 \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

إذن $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ متصلة على $0,+\infty$

خلاصة : f متصلة على المجال I

2. أ) ليكن $x \in I =\ 0,+\infty$ و ليكن $t \in\ 0,x$

لدينا : $0 \leq t \leq x$

إذن : $0 \leq t^2 \leq x^2$

إذن : $1 \leq 1+t^2 \leq 1+x^2$

و منه : $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1 \qquad \forall t \in\ 0,x$

ب) لدينا : $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1 \qquad \forall t \in\ 0,x$

إذن : $\int_0^x \dfrac{1}{1+x^2}dt \leq \int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}dt \leq \int_0^x 1dt$

إذن : $\left[\dfrac{t}{1+x^2}\right]_0^x \leq\ Arc\tan t\ _0^x \leq\ t\ _0^x$

و منه : $\dfrac{x}{1+x^2} \leq Arc\tan x \leq x \qquad \forall x \in\ 0,+\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f\ \ x\ - f\ \ 0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{Arc\tan x}{x} - 1}{x}$

لدينا : $\dfrac{x}{1+x^2} \leq Arc\tan x \leq x \qquad \forall x \in\ 0,+\infty$

إذن : $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{Arc\tan x}{x} \leq 1 \qquad \forall x \in\ 0,+\infty$

إذن : $\dfrac{1}{1+x^2} - 1 \leq \dfrac{Arc\tan x}{x} - 1 \leq 0 \qquad \forall x \in\ 0,+\infty$

إذن : $\dfrac{-x}{1+x^2} \leq \dfrac{\dfrac{Arc\tan x}{x} - 1}{x} \leq 0 \qquad \forall x \in\ 0,+\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x}{1+x^2} = 0$

إذن : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{Arc\tan x}{x} - 1}{x} = 0$

و منه : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f\ x - f\ 0}{x-0} = 0$

و بالتالي f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا $f'_d\ 0\ = 0$

.3 أ) f قابلة للاشتقاق على $0,+\infty$ (كخارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $0,+\infty$)

ليكن $x \in 0,+\infty$: لدينا

$$
\begin{aligned}
f'\ x\ &= \left(\frac{Arc\tan x}{x}\right)' \\
&= \frac{Arc\tan'\ x\ \times x - Arc\tan\ x\ \times\ x\ '}{x^2} \\
&= \frac{\frac{x}{1+x^2} - Arcatn\ x}{x^2}
\end{aligned}
$$

إذن : $\forall x\ 0,+\infty \quad f'\ x\ = \dfrac{\frac{x}{1+x^2} - Arcatn\ x}{x^2}$

ب) لدينا : $\forall x\ 0,+\infty \quad f'\ x\ = \dfrac{\frac{x}{1+x^2} - Arcatn\ x}{x^2}$

و لدينا : $\forall x\ 0,+\infty \quad x^2 > 0$

إذن إشارة $f'\ x$ هي إشارة : $\dfrac{x}{1+x^2} - Arcatn\ x$

حسب الجزء الأول . 2) ب) : $\dfrac{x}{1+x^2} - Arcatn\ x\ \le 0$

إذن : $f'\ x\ \le 0$

و منه : f تناقصية .

الجزء الثاني :

.1 أ) ليكن $t \in 0,+\infty$ و $x \in 0,+\infty$

لدينا : $\dfrac{t}{1+t^2} \le Arc\tan t \le t$

إذن : $\dfrac{1}{1+t^2} \le \dfrac{Arc\tan t}{t} \le 1$

إذن: $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \le \int_0^x \frac{Arc\tan t}{t}\,dt \le \int_0^x 1dt$

إذن : $\displaystyle Arc\tan x \le \int_0^x f\ t\ dt \le x$

إذن : $\dfrac{Arc\tan x}{x} \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \leq 1$

و منه : $\dfrac{Arc\tan x}{x} \leq g(x) \leq 1 \qquad \forall x \in]0,+\infty[$

ب) لدينا : $f(x) \leq g(x) \leq 1 \qquad \forall x \in]0,+\infty[$

إذن : $f(x)-1 \leq g(x)-1 \leq 0 \qquad \forall x \in]0,+\infty[$

إذن : $\dfrac{f(x)-1}{x} \leq \dfrac{g(x)-1}{x} \leq 0 \qquad \forall x \in]0,+\infty[$

إذن : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \leq 0 \qquad \forall x \in]0,+\infty[$

لدينا f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

إذن : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$

و بالتالي : g قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا : $g'_d(0) = 0$

2. أ) ليكن $x \in]0,+\infty[$

$t \mapsto f(t)$ متصلة على $[0,x]$

و الدالة $x \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

إذن الدالة $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و منه g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ (كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$)

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)' \\
&= \left(\frac{1}{x}\right)'\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' \\
&= \frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}f(x) \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x}\int_0^x f(t)\,dt + f(x)\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(f(x)-g(x)\right)
\end{aligned}$$

و منه : $\forall x\in]0,+\infty[\quad g'(x)=\frac{1}{x}\left(f(x)-g(x)\right)$

3. لدينا : $x>0$ و لدينا : $f(x)-g(x)\leq 0$

إذن : $\forall x\in]0,+\infty[\quad g'(x)\leq 0$

و منه g تناقصية على I

4. أ) ليكن $x>1$ و ليكن $1\leq t\leq x$

لدينا : $0<Arc\tan t<\frac{\pi}{2}$

إذن : $0<\frac{Arc\tan t}{t}<\frac{\pi}{2t}$

إذن : $0<\int_1^x \frac{Arc\tan t}{t}dt<\int_1^x \frac{\pi}{2t}dt$

إذن : $0<\int_1^x \frac{Arc\tan t}{t}dt<\frac{\pi}{2}\left[\ln t\right]_1^x$

إذن : $0<\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt<\frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=0$

ب) لدينا : $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$

ليكن $t\in[0,1]$

لدينا : $0\leq t\leq 1$ و f تناقصية

إذن : $f(1)\leq f(t)\leq f(0)$

إذن : $\frac{\pi}{4}\leq f(t)\leq 1$

إذن : $\frac{\pi}{4}\leq \int_0^1 f(t)\,dt\leq 1$

إذن : $\frac{\pi}{4x}\leq \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt\leq \frac{1}{x}$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi}{4x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt=0$

و لدينا كذلك : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt = 0$

و منه : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

الجزء الثالث :

1. لنبين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,1[$

نعتبر الدالة : $h : x \mapsto g(x) - x$

✓ h متصلة على $[0,1]$

✓ h قابلة للاشتقاق على $[0,1]$ و لدينا : $h'(x) = g'(x) - 1 < 0$ (لأن $g'(x) \le 0$)

إذن h تناقصية قطعا على $[0,1]$

✓ ولدينا : على $h(0) = g(0) - 0 = 1 > 0$ و $h(1) = g(1) - 1 = \int_0^1 f(t)\,dt - 1 < 0$

إذن : $h(0)\times h(1) < 0$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية : $\exists!\alpha \in]0,1[\quad g(\alpha) = 0$

2. أ) ليكن $x \in]0,+\infty[$

لدينا : $1 - f(x) = 1 - \frac{Arc\tan x}{x}$

حسب الجزء الأول . 2) ب) : $\frac{x}{1+x^2} \le Arc\tan(x) \le x \quad \forall x \in]0,+\infty[$

إذن : $\frac{1}{1+x^2} \le \frac{Arc\tan(x)}{x} \le 1 \quad \forall x \in]0,+\infty[$

إذن : $-1 \le -\frac{Arc\tan(x)}{x} \le -\frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in]0,+\infty[$

إذن : $0 \le 1 - \frac{Arc\tan(x)}{x} \le 1 - \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in]0,+\infty[$

و منه : $0 \le 1 - f(x) \le \frac{x^2}{1+x^2} \quad \forall x \in]0,+\infty[$

(ملاحظة النتيجة تبقى صحيحة في حالة $x = 0$)

ب) ليكن $x \in [0,+\infty[$

لدينا : $0 \le 1 - f(x) \le \frac{x^2}{1+x^2}$

إذن : $-1 \leq -f(x) \leq \dfrac{-1}{1+x^2}$

إذن : $\dfrac{1}{1+x^2} \leq f(x) \leq 1$

إذن : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \leq \int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^x 1dt$

إذن : $\displaystyle Arc\tan x \leq \int_0^x f(t)\,dt \leq x$

إذن : $\displaystyle f(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \leq 1$

إذن : $f(x) \leq g(x) \leq 1$

إذن : $0 \leq g(x) - f(x) \leq 1 - f(x) \leq \dfrac{x^2}{1+x^2}$

إذن : $0 \leq \dfrac{1}{x}\left(g(x) - f(x)\right) \leq \dfrac{x}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{2}$

و منه : $\forall x \in]0,+\infty[\quad |g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$

3. أ) ليكن $n \in \mathbb{N}$: لدينا :

- ✓ g متصلة على المجال المغلق الذي طرفاه u_n و α
- ✓ g قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح الذي طرفاه u_n و α
- ✓ $\forall x \in]0,+\infty[\quad |g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$

إذن حسب متفاوتة التزايدات المنتهية : $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

وبما أن $u_{n+1} = g(u_n)$ و $\alpha = g(\alpha)$

فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

ب) لنتين بالترجع : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

- ✓ من أجل $n = 0$:

لدينا : $|u_0-\alpha| = |u_0-\alpha|$ و $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0-\alpha| = |u_0-\alpha|$

إذن : $|u_0-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0-\alpha|$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

▪ نفترض أن : $|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

▪ و نبين أن : $|u_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$ ؟

لدينا حسب الافتراض : $|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

إذن : $\boxed{\frac{1}{2}|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|}$ $\boxed{a}$

و حسب نتيجة السؤال السابق : $\boxed{|u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|}$ $\boxed{b}$

من $\boxed{a}$ و $\boxed{b}$ نستنتج : $|u_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$

✓ نستنتج : $\forall n\in\mathbb{N} \quad |u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

بما أن $-1<\frac{1}{2}<1$ فإن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ و منه : $\lim_{n\to+\infty}|u_n-\alpha| = 0$

و بالتالي المتتالية u_n متقاربة و لدينا : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

つづく