هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

Yassine Mghazli

التمرين الاول

1- $E \subset M_3(\mathbb{R})$ و $E \neq \varnothing$ (لأن $0_{M_3(\mathbb{R})} = M(0,0) \in E$)

و لدينا $\left(\forall \left(M(x,y), M(a,b)\right) \in E^2\right); M(x,y) - M(a,b) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a-b \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (x-a)+(y-b) & 0 & -2(y-b) \\ 0 & 0 & 0 \\ y-b & 0 & (x-a)-(y-b) \end{pmatrix}$$

$$= M(x-a, y-b) \in E$$

إذن

E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}), +)$

2- لدينا

$$\left(\forall \left(M(x,y), M(x', y')\right) \in E^2\right); M(x,y) \times M(x', y') = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 0 & -2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y') - 2yy' & 0 & -2y'(x+y) - 2y(x'-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ y(x'+y') + y'(x-y) & 0 & -2yy' + (x-y)(x'-y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx' + xy' + yx' - yy' & 0 & -2(xy' + yx') \\ 0 & 0 & 0 \\ xy' + yx' & 0 & xx' - yy' - xy' - yx' \end{pmatrix}$$

$$= M(xx' - yy', xy' + yx')$$

إذن

$$\left(\forall \left(M(x,y), M(x', y')\right) \in E^2\right); M(x,y) \times M(x', y') = M(xx' - yy', xy' + yx')$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

Yassine Mghazli

3- أ) $\left(\forall\left(z,z'\right)\in\left(\mathbb{C}^*\right)^2\right);\exists!\left((x,y),\left(x',y'\right)\in\left(\mathbb{R}-\{(0,0)\}\right)^2\right)/\ z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$

لدينا $\varphi\left(z\times z'\right)=\varphi\left((x+iy)\left(x'+iy'\right)\right)$

$=\varphi\left(xx'-yy'+i\left(xy'+yx'\right)\right)$

$=M\left(xx'-yy',xy'+yx'\right)$

$=M\left(x,y\right)\times M\left(x',y'\right)$

$=\varphi\left(z\right)\times\varphi\left(z'\right)$

إذن

$\left(\forall\left(z,z'\right)\in\left(\mathbb{C}^*\right)^2\right)\ \varphi\left(z\times z'\right)=\varphi\left(z\right)\times\varphi\left(z'\right)$ و منه φ تشاكل من $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ نحو $\left(E,\times\right)$

ب) بما أن $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد 1 و φ تشاكل من $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ نحو $\left(E,\times\right)$

فإن $\left(\varphi\left(\mathbb{C}^*\right),\times\right)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد $\varphi(1)$ و بما أن $\varphi\left(\mathbb{C}^*\right)=E^*$ و $\varphi(1)=\varphi(1+0i)=M\left(1,0\right)$

فإن

$\left(E^*,\times\right)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد $M\left(1,0\right)$

4- لدينا $\left(E^*,\times\right)$ زمرة تبادلية و E زمرة جزئية للزمرة $\left(M_3\left(\mathbb{R}\right),+\right)$ إذن $\left(E,+\right)$ زمرة تبادلية

ولدينا حسب السؤال 2- E جزء مستقر من $\left(M_3\left(\mathbb{R}\right),\times\right)$ إذن $\times$ توزيعي على $+$ في E

نستنتج أن

$\left(E,+,\times\right)$ جسم تبادلي

5- أ) لدينا $\left(\forall M\left(x,y\right)\in E\right);A\times M\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\left(\forall M\left(x,y\right)\in E\right);A\times M\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

Yassine Mghazli

ب) نفترض أن ل $M(x,y)$ مماثلا في $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ هو M^{-1}

$$A\times M(x,y)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow (A\times M(x,y))\times M^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times M^{-1}$$

$$\Rightarrow A\times (M(x,y)\times M^{-1})=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

وهذا تناقض ومنه

$(M_3(\mathbb{R}),\times)$ جميع عناصر E لا تقبل مقلوبا في

التمرين الثاني

الجزء الاول

1- لدينا $a^3+b^3\equiv 0[173]$ إذن $173\mid a^3+b^3 \Leftrightarrow a^3\equiv -b^3[173]$ و منه $(a^3)^{57}\equiv(-b^3)^{57}[173]$

و بالتالي

$$a^{171}\equiv -b^{171}[173]$$

2- لدينا 173 أولي و $173\mid a$ إذن ($173\mid a^3\Leftrightarrow 173\mid a$) و($173\mid b^3\Leftrightarrow 173\mid b$)

و بما أن $173\mid a^3+b^3$فإن ($173\mid a^3\Leftrightarrow 173\mid b^3$)

نستنتج أن

$$173\mid a\Leftrightarrow 173\mid b$$

3- لدينا ($(173\mid a\Rightarrow 173\mid b)$ و $173\mid a$) ومنه ($173\mid b$ و $173\mid a$)

$$173\mid a+b$$

نستنتج أن

4- أ) لدينا 173 لايقسم aإذن حسب2- 173لايقسم b ومنه حسب مبرهنة فرما الصغرى $a^{172}\equiv 1[173]$و $b^{172}\equiv 1[173]$

نستنتج أن

$$a^{172}\equiv b^{172}[173]$$

ب) لدينا $a^{171}\equiv -b^{171}[173]$ و $a^{172}\equiv b^{172}[173]$ إذن $a^{172}\equiv -ba^{171}[173]$ ومنه

$$a^{171}(a+b)\equiv 0[173]$$

ج) بما أن 173 لايقسم a فإن 173 لايقسم a^{171}و بما أن 173 أولي فإن $173\wedge a^{171}=1$ و بما أن $173\mid a^{171}(a+b)$

فإن حسب مبرهنة كوص

$$173\mid a+b$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

Yassine Mghazli

الجزء الثاني

1- لكل x و y و k من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$\begin{cases} x+y=173k \\ x^3+y^3=173(xy+1) \end{cases} \Rightarrow (x^2-xy+y^2)173k=173(xy+1)$$

$$\Rightarrow k\left((x-y)^2+xy\right)=(xy+1)$$
$$\Rightarrow k(x-y)^2=1+xy(1-k)$$
$$\Rightarrow k(x-y)^2+(k-1)xy=1$$

إذن

$$\boxed{k(x-y)^2+(k-1)xy=1}$$

2- نفترض أن $k\neq 1$ حسب السؤال السابق لدينا $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

إذن $(*)\ k(x-y)^2=1-(k-1)xy$

وبما أن x و y و k من $\mathbb{N}^*$ فإن $k\geq 2$ و $xy\geq 1$ و منه $(k-1)xy\geq 1$ ما يستلزم أن $k(x-y)^2\leq 0$

أي أن $x=y$ المعادلة $(*)$ تصبح $(k-1)xy=1$ ما يستلزم أن $k-1=x=y=1$ و هذا تناقض مع كون $x+y=173k\geq 173$ إذن الافتراض الأول خاطئ وعكسه هو الصحيح : $\boxed{k=1}$

لدينا

$$(E)\Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2=1 \\ x+y=173 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} (x-y)=1 \\ x+y=173 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} (x-y)=-1 \\ x+y=173 \end{cases} \right)$$
$$\Rightarrow \left(\begin{cases} 2x=174 \\ 2y=172 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} 2x=172 \\ 2y=174 \end{cases} \right)$$
$$\Rightarrow \left(\begin{cases} x=87 \\ y=86 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=86 \\ y=87 \end{cases} \right)$$

وعكسا لدينا $87^3+86^3=(86+87)\left(87^2-87\times 86+86^2\right)=173\left(87+86^2\right)=173(1+86\times 87)$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي إذن

$$\boxed{S=\{(87,86);(86,87)\}}$$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

Yassine Mghazli

التمرين الثالث

1- أ) لدينا $\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1z_2-zz_2}{z_1z_2-zz_1}=\frac{\frac{1}{2}\left(z\left(z_1+z_2\right)-2zz_2\right)}{\frac{1}{2}\left(z\left(z_1+z_2\right)-2zz_1\right)}=\frac{z\left(z_1-z_2\right)}{z\left(z_2-z_1\right)}=-1$

إذن

$$\boxed{\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=-1}$$

ب) بما أن النقط O و M و M_1 و M_2 غير مستقيمية و $\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2-0}{z_1-0}\in\mathbb{R}$ فإنها نقط متداورة ومنه

$$\boxed{\text{النقطة } M \text{ تنتمي للدائرة المحيطة بالمثلث } OM_1M_2}$$

2- لدينا $\bar{z}=\frac{2\overline{z_1z_2}}{z_1+z_2}=\frac{2\overline{z_1}\,\overline{z_2}}{\overline{z_1}+\overline{z_2}}=\frac{2z_2\overline{z_2}}{z_2+z_2}=\frac{2z_2z_1}{z_2+z_1}=z$ لأن $(z_1=\overline{z_1}\quad z_2=\overline{z_2})$ و

إذن $z=\bar{z}$ ومنه $z\in\mathbb{R}$ نستنتج أن

$$\boxed{M \text{ تنتمي للمحور الحقيقي}}$$

3- أ) الصيغة العقدية الدوران الذي مركزه O و زاويته α هي: $z'=e^{i\alpha}z$ وبما أن صورة M_1 بهذا الدوران هي M_2 فإن

$$\boxed{z_2=e^{i\alpha}z_1}$$

ب) بما أن z_1 و z_2 مترافقين فإن M_1 و M_2 مثماثلين بالنسبة للمحور الحقيقي و منه منتصف القطعة $[M_1M_2]$ ينتمي للمحور الحقيقي

و بما أن $OM_1=OM_2$ فإن واسط القطعة $[M_1M_2]$ هو المحور الحقيقي نستنتج حسب السؤال 2- أن

$$\boxed{M \text{ تنتمي لواسط القطعة } [M_1M_2]}$$

4- أ) z_1 و z_2 حلي المعادلة $6t^2-\left(e^{i\theta}+1\right)t+\left(e^{i\theta}-1\right)=0$ إذن $z_1+z_2=\frac{e^{i\theta}+1}{6}$ و $z_1z_2=\frac{e^{i\theta}-1}{6}$

إذن $z=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}=2\frac{\frac{e^{i\theta}-1}{6}}{\frac{e^{i\theta}+1}{6}}=2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ و منه: $\boxed{z=2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

Yassine Mghazli

ب) لدينا $z=2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}=2\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}=2\dfrac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=2i\tan\dfrac{\theta}{2}$

وبما أن $\theta\in]0,\pi[$ فإن $\dfrac{\theta}{2}\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ و منه $\tan\dfrac{\theta}{2}>0$ نستنتج أن الشكل المثلثي ل z هو

$$\boxed{z=\left[2\tan\frac{\theta}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$$

التمرين الرابع

الجزء الأول

1- لكل x من $]0,+\infty[$ الدالة $\varphi:t\to e^{-t}$ متصلة على $[0,x]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,x[$ إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية

يوجد θ من $]0,x[$ بحيث $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\varphi'(\theta)$ و بالتعويض نحصل على $\dfrac{e^{-x}-1}{x}=-e^{-\theta}$ ومنه $\dfrac{x}{1-e^{-x}}=e^{\theta}$

$$\boxed{(\forall x\in]0+\infty+\infty[);(\exists\theta\in]0,x[)/\,e^{\theta}=\frac{x}{1-e^{-x}}}$$

2- أ) و ب) لدينا $(\forall x>0);0<\theta<x\Rightarrow 1<e^{\theta}<e^{x}\Rightarrow 1<\dfrac{x}{1-e^{-x}}<e^{x}$

$$\overset{(1-e^{-x}>0)}{\Rightarrow}1-e^{-x}<x<e^{x}\left(1-e^{-x}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1-e^{-x}<x\\x<e^{x}-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-x<e^{-x}\\x+1<e^{x}\end{cases}$$

إذن

$$\boxed{(\forall x>0);x+1<e^{x}\ \text{ و }\ (\forall x>0);1-x<e^{-x}}$$

ج) لدينا $(\forall x>0);0<\theta<x\Rightarrow 1<e^{\theta}<e^{x}\Rightarrow 1<\dfrac{x}{1-e^{-x}}<e^{x}$

$$\Rightarrow 1<\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}<e^{x}\Rightarrow 0<\ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right)<x$$

(لأن الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$)و منه

$$\boxed{(\forall x>0);0<\ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right)<x}$$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

Yassine Mghazli

الجزء الثاني

1- أ) لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xe^x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}e^x\dfrac{1}{\dfrac{e^x-1}{x}}=1\times\dfrac{1}{1}=1=f(1)$

إذن f متصلة على اليمين في 0

ب) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x}{e^x-1}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{x}}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{x}=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$ ومنه لـ (C) مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$

2- أ) لدينا حسب 2-أ)من الجزء الأول: $(\forall t>0);1-t<e^{-t}$ إذن $(\forall t\geq 0);1-t\leq e^{-t}$

إذن $(\forall x\geq 0);\int_0^x(1-t)\,dt\leq\int_0^x e^{-t}dt$

يستلزم $(\forall x\geq 0);\left[t-\dfrac{t^2}{2}\right]_0^x\leq\left[-e^{-t}\right]_0^x$

ومنه

$$(\forall x\geq 0);x-\frac{x^2}{2}\leq -e^{-x}+1$$

ب) لدينا

$$(\forall x\geq 0);x-\frac{x^2}{2}\leq -e^{-x}+1\Rightarrow(\forall x\geq 0);\begin{cases}e^{-x}+x-1\leq\dfrac{x^2}{2}\\ \displaystyle\int_0^x t-\frac{t^2}{2}dt\leq\int_0^x\left(-e^{-t}+1\right)dt\end{cases}$$

$$\Rightarrow(\forall x>0);\begin{cases}e^{-x}+x-1\leq\dfrac{x^2}{2}\\ \left[\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{t^3}{6}\right]_0^x\leq\left[e^{-t}+t\right]_0^x\end{cases}$$

$$\Rightarrow(\forall x>0);\begin{cases}e^{-x}+x-1\leq\dfrac{x^2}{2}\\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}\leq e^{-x}+x-1\end{cases}$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ومنه

$$\boxed{(\forall x>0);\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\le e^{-x}+x-1\le\frac{x^2}{2}}$$

3- أ) لدينا

$$(\forall x>0);\frac{f(x)-1}{x}=\frac{\frac{xe^x}{e^x-1}-1}{x}$$
$$=\frac{xe^x-e^x-1}{x\left(e^x-1\right)}$$
$$=\frac{x}{x^2\left(e^x-1\right)}\times e^x\left(x-1-e^{-x}\right)$$
$$=\frac{f(x)}{x^2}\left(x-1-e^{-x}\right)$$

إذن

$$\boxed{(\forall x>0);\frac{f(x)-1}{x}=\frac{x-1-e^{-x}}{x^2}f(x)}$$

ب) لدينا

$$(\forall x>0);\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\le e^{-x}+x-1\le\frac{x^2}{2}\Rightarrow(\forall x>0);\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\le\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\le\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow(\forall x>0);\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)\le\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}f(x)\le\frac{1}{2}f(x)$$
$$\Rightarrow(\forall x>0);\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)\le\frac{f(x)-1}{x}\le\frac{1}{2}f(x)$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}f(0)=\frac{1}{2}$

فإن

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{2}\ \text{ ومنه } f \text{ قابلة للاشتقاق على اليمين في } 0 \text{ و } f'_d(0)=\frac{1}{2}}$$

4- أ) الدوال $x\to x$ و $x\to e^x$ و $x\to 1$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $]0,+\infty[$ إذن الدالتين $x\to xe^x$

$x\to e^x-1$ قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و بما أن $(\forall x>0);e^x-1\neq0$

فإن الدالة $x\to\frac{xe^x}{e^x-1}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

خلاصة

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

لدينا $(\forall x>0);f'(x)=\dfrac{\left(e^x+xe^x\right)\left(e^x-1\right)-xe^xe^x}{\left(e^x-1\right)^2}$

$=\dfrac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\left((x+1)\left(e^x-1\right)-xe^x\right)$

$=\dfrac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\left(xe^x-x+e^x-1-xe^x\right)$

$=\dfrac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\left(e^x-x-1\right)$

إذن

$$(\forall x>0);f'(x)=\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}\left(e^x-x-1\right)$$

ب) حسب السؤال 2- ب) من الجزء الأول لدينا $(\forall x>0);x+1<e^x$

إذن $(\forall x>0);e^x-x-1>0$ و منه $(\forall x>0);f'(x)>0$

نستنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

الجزء الثالث

1- برهان بالترجع على العلاقة "$(\forall n\in\mathbb{N});u_n>0$"

لدينا $u_0>0$ إذن العلاقة صحيحة من اجل $n=0$

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $u_n>0$ و نبين ان $u_{n+1}>0$

$n\in\mathbb{N};u_n>0\Rightarrow f(u_n)>f(0)\Rightarrow\ln\left(f(u_n)\right)>\ln\left(f(0)\right)$ (لأن f و $\ln$ تزايديتين قطعا على $]0,+\infty[$)

و بما أن $\ln\left(f(0)\right)=\ln(1)=0$ فإن $u_{n+1}>0$

حسب مبدأ الترجع نستنتج أن

$$(\forall n\in\mathbb{N});u_n>0$$

Yassine Mghazli

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

2- لدينا حسب السؤال 2- ج) $(\forall x>0);0<\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)<x$

وبما أن $(\forall n\in\mathbb{N});u_n>0$ فإن $(\forall n\in\mathbb{N});0<\ln\left(\frac{u_ne^{u_n}}{e^{u_n}-1}\right)<u_n$

نستنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N});0<\ln\left(f\left(u_n\right)\right)<u_n$ وبالتالي $(\forall n\in\mathbb{N});0<u_{n+1}<u_n$

إذن

المتتالية $\left(u_n\right)$ تناقصية قطعا و بما أنها مصغورة ب 0 فهي إذن متقاربة

3- لدينا $(\forall x>0);e^x>x+1\Leftrightarrow e^x-1>x\Leftrightarrow\frac{x}{e^x-1}<1\Leftrightarrow\frac{xe^x}{e^x-1}<e^x\Leftrightarrow f\left(x\right)<e^x\Leftrightarrow\ln\left(f\left(x\right)\right)<x$

و $\ln\left(f\left(0\right)\right)=0$

إذن $\begin{cases}(\forall x>0);\ln\left(f\left(x\right)\right)\neq x\\ \ln\left(f\left(0\right)\right)=0\end{cases}$ و منه

0 هو الحل الوحيد للمعادلة $\ln\left(f\left(x\right)\right)=x$

المتتالية $\left(u_n\right)$ متقاربة و الدالة $\ln\circ f$ متصلة على $[0,+\infty[$ وتحقق $\ln\circ f\left([0,+\infty[\right)\subset[0,+\infty[$

إذن نهايتها l تحقق المعادلة $\ln\left(f\left(l\right)\right)=l$ التي تقبل حلا وحيدا هو 0 نستنتج أن

$\lim u_n=0$

التمرين الخامس

1- أ) لدينا $(\forall t\in[0,+\infty[);\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}>0$

إذن $(\forall x\in]0,\ln 2[);\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt<0$ و $(\forall x\in]\ln 2,+\infty[);\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt>0$

و منه إشارة $F\left(x\right)$ كما يلي

$F\left(x\right)$ موجبة قطعا على المجال $]\ln 2,+\infty[$

$F\left(x\right)$ سالبة قطعا على المجال $]0,\ln 2[$ و $F\left(\ln 2\right)=0$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

Yassine Mghazli

ب) الدالة F هي أصلية الدالة $x \to \dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ على $]0,+\infty[$ و التي تنعدم عند $\ln 2$

إذن F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا

$$\left(\forall x \in]0,+\infty[\right); F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$$

ج) لدينا $\left(\forall x \in]0,+\infty[\right); F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}} > 0$ إذن

الدالة F تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

2- أ) بوضع $u = \sqrt{e^t-1}$ يكون لدينا

$$\begin{cases} du = \dfrac{e^t}{2u}dt = \dfrac{u^2+1}{2u}dt \Leftrightarrow dt = \dfrac{2u}{u^2+1}du \\ t = x \Leftrightarrow u = \sqrt{e^x 91} \\ t = \ln 2 \Leftrightarrow u = 1 \end{cases}$$

ومنه

$$\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt = \int_1^{\sqrt{e^x-1}} \frac{1}{u}\frac{2u}{u^2+1}du = \int_1^{\sqrt{e^x-1}} \frac{2}{u^2+1}du$$

$$= 2\left[arc\tan\right]_1^{\sqrt{e^x-1}} = 2\left(arc\tan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2arc\tan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\pi}{2}$$

إذن

$$\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt = 2arc\tan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\pi}{2}$$

ب) لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2arc\tan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \dfrac{\pi}{2} = 2\arctan(0) - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$

و $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 2arc\tan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \dfrac{\pi}{2} = 2\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

Yassine Mghazli

ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} F(x)=-\frac{\pi}{2}$$

3- أ) F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ إذن متصلة عليه و بما أنها تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

فهي إذن تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $F(]0,+\infty[)$

و لدينا $F(]0,+\infty[)=\left]\lim_{x\to 0^+}F(x),\lim_{x\to+\infty}F(x)\right[=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

إذن

$$F \text{ تقابل من }]0,+\infty[\text{ نحو } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

ب) $(\forall y\in]0,+\infty[);\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)\ F(y)=x\Leftrightarrow 2arc\tan\left(\sqrt{e^y-1}\right)-\frac{\pi}{2}=x$

$$\Leftrightarrow arc\tan\left(\sqrt{e^y-1}\right)=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^y-1}=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^y=1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

ومنه

$$F \text{ تقابل من }]0,+\infty[\text{ نحو } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad \text{و} \quad \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[;F^{-1}(x)=\ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

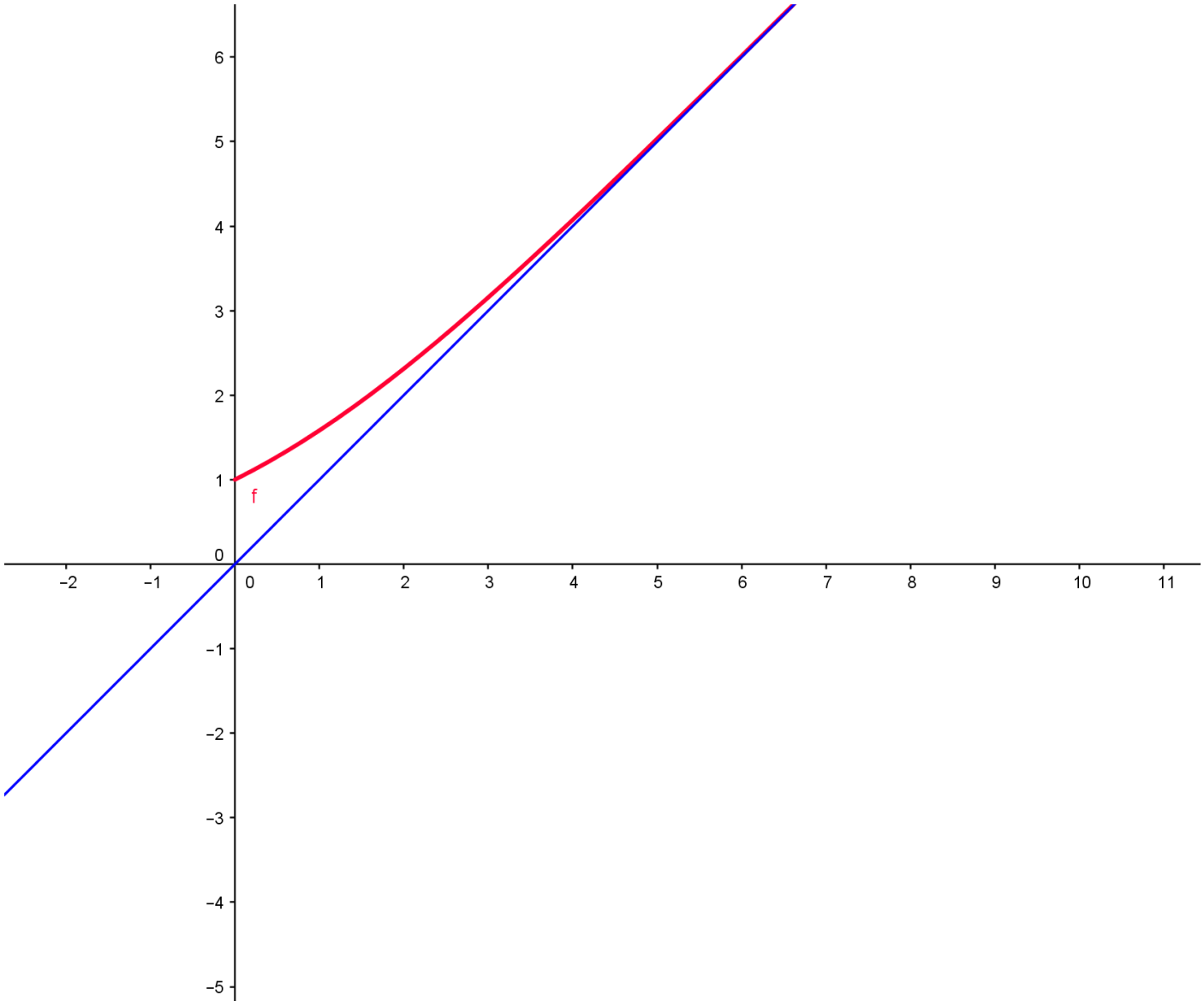
Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

Yassine Mghazli

إضافة

مبيان الدالة f

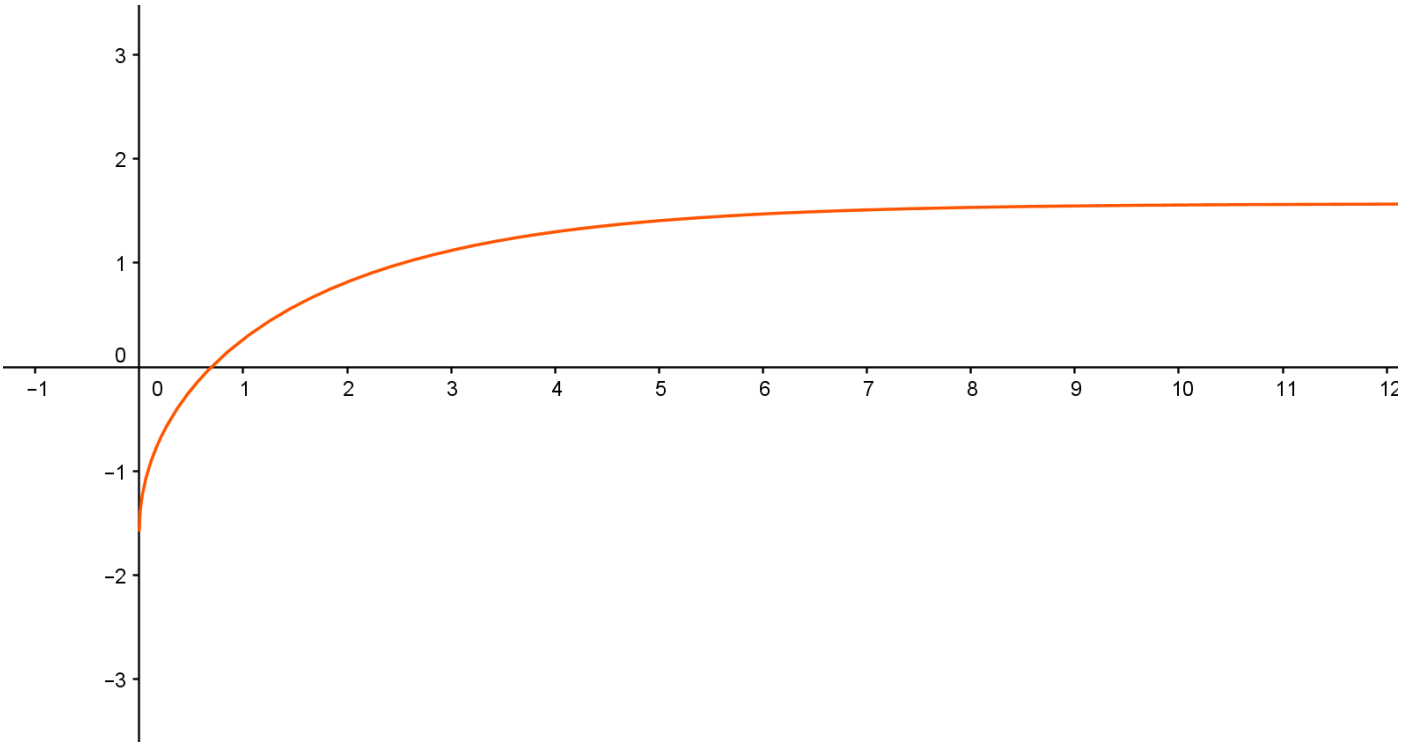


Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

Yassine Mghazli

مبيان الدالة F



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma