

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2013

التمرين الأول

1

منهجية التفكير في هذا السؤال :

نضع $\alpha = (x-1)(y-1)$ و $\beta = (x-2)(y-2)$

نريد أن نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y \in G$

يعني نريد أن نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 ; 1 < x * y < 2$

من أجل ذلك سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$$\forall (x,y) \in G^2 ; x * y > 1 \text{ و } x * y < 2$$

يعني سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$$\forall (x,y) \in G^2 ; \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} > 0 \text{ و } \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} < 2$$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 ; \alpha + \beta > 0$ و $\alpha > 0$ و $\beta > 0$

إلى العمل : ليكن x و y عنصرين من المجال $G =]1,2[$

إذن : $1 < x < 2$ و $1 < y < 2$

و منه : $0 < (x-1) < 1$ و $0 < (y-1) < 1$

أي : $0 < (x-1)(y-1) < 1$

و هذا يعني أن الكمية $(x-1)(y-1)$ كمية موجبة قطعاً .

يعني : $(x-1)(y-1) > 0$

و لدينا كذلك : $1 < x < 2$ و $1 < y < 2$

إذن : $-1 < (x-2) < 0$ و $-1 < (y-2) < 0$

يعني أن : $(x-2)$ و $(y-2)$ كميتان سالبتان قطعاً .

إذن : جداهما كمية موجبة قطعاً . يعني : $(x-2)(y-2) > 0$

في المرحلة الأولى نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y > 1$

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة : $(x-1)(y-1) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)$

نحصل على : $2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)$

$> (x-1)(y-1) + (x-1)(y-2)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعاً التالية :

$$\frac{1}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$$

نحصل على : $\frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)} > 1$

و هذا يعني أنه : $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y > 1$

في المرحلة الثانية نبين أن : $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y < 2$ (1)

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة : $(x-2)(y-2) > 0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-2)(y-2)$

نجد : $2(x-2)(y-2) > (x-2)(y-2)$

ثم نضيف بعد ذلك إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $2(x-1)(y-1)$

نجد : $2(x-1)(y-1) + 2(x-2)(y-2)$

$> (x-2)(y-2) + 2(x-1)(y-1)$

يعني : $2[(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)]$

$> (x-2)(y-2) + 2(x-1)(y-1)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعاً :

$$\frac{1}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$$

$$2 > \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)} : \text{ نجد}$$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 ; 2 > x * y$ (2)

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $1 < x * y < 2$

يعني : $\forall (x,y) \in G^2 ; x * y \in G$

و بالتالي * قانون تركيب داخلي في المجموعة G .

2

$f : (\mathbb{R}_+^*, \times) \mapsto (G, *)$

$$x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$$

لدينا f تطبيق معرف بما يلي :

لكي يكون التطبيق f تشاكلاً يكفي أن نتحقق من أن :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* ; f(x \times y) = f(x) * f(y)$$

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $\mathbb{R}_+^*$.

$$f(x) * f(y) = \left(\frac{x+2}{x+1} \right) * \left(\frac{y+2}{y+1} \right) \text{ لدينا :}$$

$$= \frac{2 \left(\frac{x+2}{x+1} - 1 \right) \left(\frac{y+2}{y+1} - 1 \right) + \left(\frac{x+2}{x+1} - 2 \right) \left(\frac{y+2}{y+1} - 2 \right)}{\left(\frac{x+2}{x+1} - 1 \right) \left(\frac{y+2}{y+1} - 1 \right) + \left(\frac{x+2}{x+1} - 2 \right) \left(\frac{y+2}{y+1} - 2 \right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{x+1} \right) \left(\frac{1}{y+1} \right) + \left(\frac{-x}{x+1} \right) \left(\frac{-y}{y+1} \right)}{\left(\frac{1}{x+1} \right) \left(\frac{1}{y+1} \right) + \left(\frac{-x}{x+1} \right) \left(\frac{-y}{y+1} \right)}$$

$$= \frac{xy + 2}{xy + 1} = f(x \times y)$$

إذن : $f(x) * f(y) = f(x \times y)$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ نحو $(G, *)$.

لكي يكون f تقابلاً يكفي أن يحقق ما يلي :

$$(\forall y \in G), (\exists ! x \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = y$$

أو بتعبير أسهل : يكون f تطبيقاً تقابلياً عندما يكون للمعادلة $f(x) = y$

ذات المجهول x حل وحيد في $\mathbb{R}_+^*$ مرتبط بـ y .

ليكن y عنصراً من المجموعة G و لنحل في $\mathbb{R}_+^*$ المعادلة $f(x) = y$.

$$\frac{x+2}{x+1} = y \text{ هذه المعادلة تصبح :}$$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم $(x+1)$

$$(x+2) = y(x+1)$$

يعني : $x+2 = xy + y$ يعني : $x(1-y) = (y-1)$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم $\frac{1}{1-y}$

$$x = \frac{y-2}{1-y}$$

نلاحظ أن التعبير $\frac{y-2}{1-y}$ وحيد لأنه إذا افترضنا غير ذلك .

$$x = \frac{y'-2}{1-y'} \text{ أي وجود عدد آخر } y' \text{ يحقق}$$

$$\frac{y-2}{1-y} = \frac{y'-2}{1-y'}$$

$$\text{أي : } y - yy' - 2 + 2y' = y' - 2 - yy' + 2y$$



لدينا : $A^3 = A \times A \times A$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

إذن : $A^3 = O$

لدينا المصفوفة $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ هي العنصر المحايد لـ $+$ في $M_3(\mathbb{R})$

نلاحظ في البداية أن $A \neq O$

ولدينا : $A^3 = A \times A^2 = O$

مع : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$

إذن نستنتج أن $A \neq O$ و توجد مصفوفة و هي A^2 تخالف O

و تحقق $A \times A^2 = A^2 \times A = O$

إذن حسب التذكير : المصفوفة A قاسم للصفر في الحلقة $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$



$$(A^2 - A + I) \times (A + I) = A^3 + A^2 - A^2 - A + A + I$$

$$= A^3 + I = O + I = I$$

و بما أن A و I مصفوفتان من $M_3(\mathbb{R})$

فإن المصفوفة $(A^2 - A + I)$ عنصر من $M_3(\mathbb{R})$

و نعلم أن $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة تبادلية وحدتها I إذن $\times$ تبادلي في $M_3(\mathbb{R})$

يعني : $(A + I) \times (A^2 - A + I) = (A^2 - A + I) \times (A + I) = I$

و بالتالي $(A + I)$ مصفوفة قابلة للقلب في $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$

و مقلوبها هو المصفوفة $(A^2 - A + I)$.

ولدينا : $(A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و لدينا كذلك :

$$(A^2 - A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

خلاصة :

مقلوب المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ هي المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

أي : $(y - y') = 0$ أي : $y = y'$

و بالتالي فإن التعبير $\frac{y-2}{1-y}$ وحيد .

إذن المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلا وحيدا و هو $\frac{y-2}{1-y}$

يكفي الآن أن نتحقق من أن هذا الحل ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^*$.

يعني أنه يكفي أن نبين أن : $\forall y \in]1,2[; \frac{y-2}{1-y} > 0$

لدينا : $1 < y < 2$ إذن : $-1 < (y-2) < 0$

و لدينا : $1 < y < 2$ إذن : $-1 < (1-y) < 0$

إذن $(y-2)$ و $(1-y)$ كميّتان سالبتان قطعاً .

أي أن خارجهما كمية موجبة قطعاً .

يعني : $\forall y \in]1,2[; \frac{y-2}{1-y} > 0$

إذن : $(\forall y \in G), (\exists ! x = \frac{y-2}{1-y} \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = y$

يعني أن f تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو G .

خلاصة : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ نحو $(G, *)$.



نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق و يُحولها إلى مجموعة الوصول .

يعني أنه عندما نتوفر على تشاكل تقابلي f من مجموعة $(E, *)$ نحو (F, τ)

فإنه نستنتج البنية الجبرية للمجموعة (F, τ) انطلاقاً من البنية الجبرية

للمجموعة $(E, *)$ عن طريق التطبيق f .

و من ثم :

إذا كان $*$ تبادلي أو تجميعي في E فإن τ تبادلي أو تجميعي في F .

إذا كان e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في E فإن $f(e)$ هو العنصر

المحايد للقانون τ في F .

إذا كان x' هو مماتل x بالنسبة للقانون $*$ في E فإن $f(x')$ هو مماتل

$f(x)$ بالنسبة للقانون τ في F .

في هذا السؤال لدينا f تشاكل تقابلي معرف بما يلي :

$$f : (\mathbb{R}_+^*, \times) \mapsto (G, *)$$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(G, *)$ انطلاقاً من البنية الجبرية

لـ $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ عن طريق التطبيق f .

و بما أن $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1

فإن $(G, *)$ زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي $f(1)$

أي العدد $\frac{3}{2}$. و للتأكد من ذلك يكفي أن نتحقق من أن :

$$(\forall x \in G) ; x * \frac{3}{2} = \frac{3}{2} * x = x$$



تذكير : لتكن $(E, *, \tau)$ حلقة و e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في E .

نقول بأن عنصراً x من E قاسم للصفر إذا تحققت الشروط التالية :

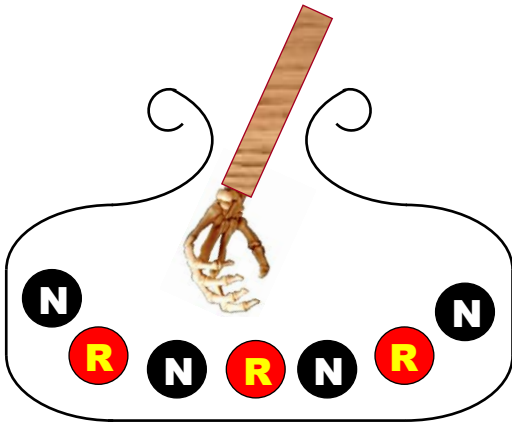
$$\begin{cases} x \neq e \\ \exists y \in E \setminus \{e\} ; x \tau y = y \tau x = e \end{cases}$$

نعتبر الحلقة الواحدية $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ التي صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

التمرين الثاني

1



عندما نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال أربع كرات من صندوق يحتوي على 7 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتل 7^4 نتيجة ممكنة .

$$\text{card}(\Omega) = 7^4 = 2401 \quad \text{يعني :}$$

بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

X هو المتغير العشوائي الذي يربط كل عملية بعدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق . إذن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 . يعني : $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$

قانون احتمال المتغير العشوائي X سيكون إذن التطبيق P_X المعرف على المجموعة $\{0,1,2,3,4\}$ نحو المجال $[0,1]$ بما يلي :

$$P_X : \{0,1,2,3,4\} \mapsto [0,1]$$

$$k \mapsto P_X(k) = p[X = k]$$

لنحسب إذن احتمال كل قيمة k من قيم المتغير العشوائي X .

نحسب : $p[X = 0]$

الحدث $[X = 0]$ هو الحصول على أربع كرات كلها حمراء و توجد 3^4 إمكانية لسحب الكرات الأربع .

$$p[X = 0] = \frac{3^4}{7^4} = \frac{81}{2401} \quad \text{إذن :}$$

نحسب : $p[X = 1]$

الحدث $[X = 1]$ هو الحصول على كرة سوداء واحدة و ثلاث كرات حمراء . و من أجل ذلك لدينا :

4^1 إمكانية لسحب الكرة السوداء

C_4^1 إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة السوداء

3^3 إمكانية لسحب ثلاث كرات حمراء

$$p[X = 1] = \frac{4^1 \times C_4^1 \times 3^3}{7^4} = \frac{432}{2401} \quad \text{إذن :}$$

نحسب : $p[X = 2]$

الحدث $[X = 2]$ هو الحصول على كرتين حمراوين و كرتين سوداوين . و من أجل ذلك لدينا :

4^2 إمكانية لسحب الكرتين السوداوين .

C_4^2 إمكانية لاختيار مكان الكرتين السوداوين .

3^2 إمكانية لسحب الكرتين الحمراوين .

$$p[X = 2] = \frac{4^2 \times C_4^2 \times 3^2}{7^4} = \frac{864}{2401} \quad \text{إذن :}$$



لكي يكون $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي يكفي أن نتحقق من الشروط التالية :

$$(\forall x, y \in E) \quad ; \quad \begin{cases} \text{زمرة تبادلية } (E, +) \\ \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \\ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \\ (\alpha \times \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) \\ 1 \cdot x = x \end{cases}$$

بحيث $\times$ هو الضرب في $\mathbb{R}$

و $+$ هو جمع المصفوفات في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

و $\cdot$ هو ضرب مصفوفة في عدد حقيقي .

في البداية نبين أن $(E, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$

لدينا E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

لنكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتان من E .

$$\begin{aligned} \text{لدينا :} \quad M(a, b) - M(c, d) &= aI + bA - cI - dA \\ &= (a - c)I + (b - d)A \\ &= M(a - c ; b - d) \in E \end{aligned}$$

إذن $(E, +)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$

و بما أن $+$ تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ فإن $(E, +)$ زمرة تبادلية (1)

نستنتج الخاصيات المتبقية من خلال كون E جزء من الفضاء المتجهي

الحقيقي $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ و كون E جزء مستقر بالنسبة للقانون $(\cdot)$

و ذلك لأن : $\forall M(a, b) \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R} ; \alpha \cdot M(a, b) = M(\alpha a, \alpha b) \in E$

$$(2) \quad \begin{cases} \text{زمرة تبادلية } (E, +) \\ \alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \\ (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A \\ (\alpha \times \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A) \\ 1 \cdot A = A \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

نعتبر الأسرة (I, A) .

من الواضح أن الأسرة (I, A) مولدة للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$.

لأن : $\forall M(a, b) \in E ; M(a, b) = aI + bA$

يعني أن كل مصفوفة من E تكتب على شكل تآليفة خطية للمصفوفتين I و A

لنبين الآن أن الأسرة (I, A) حرة .

من أجل ذلك ننطلق من تآليفة خطية منعدمة للمصفوفتين I و A .

$$a \cdot I + b \cdot A = O$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3b & 2b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 3b & 2b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

إذن الأسرة (I, A) حرة .

و بما أن (I, A) أسرة حرة و مولدة للفضاء المتجهي E فإنها أساس لهذا

الفضاء المتجهي الحقيقي

يعني : $p(E \cap N) = p_N(E) \times p(N)$

$$= p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3) \times p(N)$$

$$= \frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{7} = \frac{2016}{9240} = \frac{12}{55}$$



$$p(E) = p(E \cap N) + p(E \cap R)$$

$$= \frac{12}{55} + p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R)$$

$$= \frac{12}{55} + \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7}$$

$$= \frac{12}{55} + \frac{72}{9240} = \frac{87}{385}$$



لنحسب $p_E(R)$

$$p_E(R) = \frac{p(R \cap E)}{p(E)} = \frac{p_R(E) \times p(R)}{p(E)}$$

$$= \frac{p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R)}{p(E)}$$

$$= \frac{\frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7}}{\frac{87}{385}} = \frac{1}{29}$$



لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

لدينا : $\Delta = 4(a-1)^2 - 8(a-1)^2$

$$= -4(a-1)^2$$

$$= (2i(a-1))^2$$

إن المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 .

$$z_1 = \frac{2(a-1) + 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1+i)}{2}$$

$$z_2 = \frac{2(a-1) - 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1-i)}{2}$$



لدينا $a = e^{i\theta}$ مع $0 < \theta < \pi$: إذن $(a-1) = e^{i\theta} - 1$

$$(a-1) = e^{i\theta} - 1 = \cos \theta + i \sin \theta - 1$$

$$= \cos(\theta) - 1 + i \sin(\theta)$$

هدفنا هو البحث عن r و φ بحيث : $(a-1) = r e^{i\varphi}$.

يعني : $\cos(\theta) - 1 + i \sin(\theta) = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi)$

أي : $\begin{cases} \cos(\theta) - 1 = r \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) = r \sin(\varphi) \end{cases}$

من خلال دمج مربعي هاتين المتساويتين :

نجد : $(\cos(\theta) - 1)^2 + \sin^2 \theta = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$

لنحسب : $p[X=3]$

الحدث $[X=3]$ هو الحصول على ثلاث كرات سوداء و كرة حمراء واحدة . و من أجل ذلك لدينا :
3¹ إمكانية لسحب الكرة الحمراء .

4¹ إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة الحمراء .

4³ إمكانية لسحب الكرات السوداء الثلاث .

إذن : $p[X=3] = \frac{3^1 \times C_4^1 \times 4^3}{7^4} = \frac{768}{2401}$

لنحسب : $p[X=4]$

الحدث $[X=4]$ هو الحصول على أربع كرات كلها سوداء .

إذن : $p[X=4] = \frac{4^4}{7^4} = \frac{256}{2401}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعروف بما يلي

$$P_X : \{0,1,2,3,4\} \mapsto [0,1]$$

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto P_X(0) = \frac{81}{2401} \\ 1 &\mapsto P_X(1) = \frac{432}{2401} \\ 2 &\mapsto P_X(2) = \frac{864}{2401} \\ 3 &\mapsto P_X(3) = \frac{768}{2401} \\ 4 &\mapsto P_X(4) = \frac{256}{2401} \end{aligned}$$

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نحصل على :

$$\frac{81}{2401} + \frac{432}{2401} + \frac{864}{2401} + \frac{768}{2401} + \frac{256}{2401} = 1$$



$$E(X) = \sum_{k=0}^4 k \cdot p[X=k]$$

$$= 0 \left(\frac{81}{2401} \right) + 1 \left(\frac{432}{2401} \right) + 2 \left(\frac{864}{2401} \right) + 3 \left(\frac{768}{2401} \right) + 4 \left(\frac{256}{2401} \right)$$

$$= \frac{5488}{2401} = \frac{16}{7}$$



لدينا : $p(E \cap N) = p_N(E) \times p(N)$

و لدينا كذلك الحدث E هو الحصول على ثلاث كرات سوداء من خلال ثلاث سحب متتابعة بدون إحلال .

إن نستطيع تجزئ الحدث E في المرحلة الثالثة إلى ثلاث أحداث جزئية و مستقلة فيما بينها و هي :

- E_1 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الأولى
- E_2 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثانية
- E_3 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثالثة

إن نكتب : $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$

و منه : $p_N(E) = p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3)$

2

II

لدينا r_1 دوران مركزه J وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
ولدينا $r_1(C) = C'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :
 $(aff(C') - aff(J)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(C) - aff(J))$

$$\Leftrightarrow \left(c' - \frac{a+i}{2} \right) = i \left(i - \frac{a+i}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{-1 - ia + a + i}{2} = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = z_2$$

و بنفس الطريقة لدينا r_2 دوران مركزه K وزاويته $\frac{\pi}{2}$
ولدينا $r_2(A) = A'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :
 $(aff(A') - aff(K)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(A) - aff(K))$

$$\Leftrightarrow \left(a' - \frac{a-i}{2} \right) = i \left(a - \frac{a-i}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{ia - 1 + a - i}{2} = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = z_1$$

إذن : $c' = z_2$ و $a' = z_1$

3

II

لدينا : $\frac{a' - c'}{a - 1} = \frac{\frac{(a-1)(i+1)}{2} - \frac{(a-1)(1-i)}{2}}{\frac{a-1}{1}}$

$$= \frac{(a-1)(i+1-1+i)}{2} \times \frac{1}{(a-1)}$$

$$= \frac{i(a-1)}{(a-1)} = i$$

إذن : $\frac{a' - c'}{a - 1} = i$ و منه : $\arg\left(\frac{a' - c'}{a - 1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

يعني : $(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{C'A'}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

و هذا يعني أن المستقيم (AB') عمودي على المستقيم $(A'C')$.
أي أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$
لأن $B' \in (AB')$ و $(A'C') \perp (AB')$.

التمرين الرابع

1

I

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0^+)^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1 = f(0)$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

و هذا يعني أن الدالة f متصلة على يمين الصفر .
لنحسب الآن نهاية f بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (+\infty)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

يعني : $\cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 1 + \sin^2 \theta = r^2$

يعني : $2(1 - \cos \theta) = r^2$

يعني : $2 \left(1 - \left(2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 \right) \right) = r^2$

يعني : $2 \left(2 - 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) = r^2$

يعني : $4 \left(1 - \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) = r^2$

يعني : $4 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = r^2$

يعني : $r > 0$ و $r = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$

يكفي الآن تحديد قيمة φ . و ننتقل من الكتابة $\sin \theta = r \sin \varphi$

يعني : $\sin \left(2 \cdot \frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin(\varphi)$

يعني : $2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin(\varphi)$

يعني : $\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sin(\varphi)$

يعني : $\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$

يعني : $\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)$

يعني : $\frac{\theta}{2} \equiv \varphi - \frac{\pi}{2} [2\pi]$

يعني $\varphi \equiv \frac{\theta - \pi}{2} [2\pi]$

إذن : $(a - 1) = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i \left(\frac{\theta - \pi}{2} \right)}$

2

I

ب

في البداية لدينا :

$$(1 + i) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

و لدينا كذلك :

$$(1 - i) = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

إذن : $z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$

$$= \sqrt{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i \frac{\pi}{4}}$$

$z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}$

$$= \sqrt{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

1

II

لدينا J هي منتصف القطعة $[AC]$.

إذن : $aff(J) = \frac{aff(A) + aff(C)}{2} = \frac{a + i}{2}$

و لدينا K هي منتصف القطعة $[AB]$.

إذن : $aff(K) = \frac{aff(A) + aff(B)}{2} = \frac{a - i}{2}$

لدينا : $\psi(x) = x \ln x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty \right[\subset \mathbb{R}$

إذن : $\psi(]0, +\infty[) \subseteq \mathbb{R}$

إذن الدالة $f = \varphi \circ \psi$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$: لدينا :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} = (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

إذن : $f'(x) = \frac{-1}{2} (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{1}{2}-1} (1 + (x \ln x)^2)'$

$$= \frac{-1}{2} (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{3}{2}} (2x \ln x)(x \ln x)'$$

$$= \frac{-1}{2} (1 + (x \ln x)^2)^{-\frac{3}{2}} (2x \ln x)(1 + \ln x)$$

$$= \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

إذن : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$

نلاحظ في البداية أن : $(\forall x > 0) ; (1 + (x \ln x)^2)^{\frac{3}{2}} > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارتي الكميتين $(\ln x)$ و $(1 + \ln x)$.
الكمية $\ln x$ تنعدم في 1 والكمية $1 + \ln x$ تنعدم في $\frac{1}{e}$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$\ln x$		-	0	+
$1 + \ln x$		-	0	+
$f'(x)$		-	0	-
f	1	$f(\frac{1}{e})$	1	0

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \left(\frac{1}{x} \right) dx = \int \frac{(\ln x)'}{(\ln x)} dx$$

$$= \ln(|\ln x|) + c ; c \in \mathbb{R}$$

بما أن : $\ln x \geq 1$ فإن $x \in [e; +\infty[$

نأخذ الثابتة c تساوي 0 نجد أن الدالة $x \rightarrow \ln(\ln x)$ دالة أصلية

للدالة $x \rightarrow \frac{1}{x \ln x}$ على المجال $[e; +\infty[$.

و أشير إلى أن $x \rightarrow \ln(\ln x)$ دالة معرفة ومتصلة على $]1; +\infty[$

إذن فهي متصلة على $[e; +\infty[$ لأن : $[e; +\infty[\subset]1; +\infty[$.

1 ب

لدراسة اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 نحسب النهاية التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$$

و من أجل ذلك نستعين بالنهايتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln x)^2 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} - 1 \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + (x \ln x)^2}}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \right)$$

نضرب البسط و المقام في المرافق $(1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})$ نجد :

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + (x \ln x)^2}}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2}}{1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1 - 1 - (x \ln x)^2}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2} (1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{-(x \ln x)^2}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2} (1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x (\ln x)^2) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2} (1 + \sqrt{1 + (x \ln x)^2})} \right)$$

$$= (-0) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (0)^2} (1 + \sqrt{1 + (0)^2})} \right) = (0) \left(\frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 0$$

و هذا يعني أن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر و $f'_d(0) = 0$.

1 ج

تذكير : إذا كانت g دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال I .

و كانت f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال J .

إذن تكون الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كان : $g(I) \subseteq J$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (x \ln x)^2}}$$

$$\text{نضع : } (\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

و نضع : $\forall x \in]0; +\infty[; \psi(x) = x \ln x$

إذن : $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \varphi \circ \psi(x)$

لدينا ψ دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$

و φ دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن تكون الدالة $\varphi \circ \psi$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

إذا كان : $\psi(]0, +\infty[) \subseteq \mathbb{R}$

ليكن x عنصرا من المجال $]0, +\infty[$.



و هذا يعني حسب خاصية التآطير و النهايات أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_e^x f(t) dt = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt \quad \text{إذن :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^e f(t) dt + \int_e^x f(t) dt \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^e f(t) dt \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_e^x f(t) dt \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{constante}) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_e^x f(t) dt \right)$$

$$= (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \quad \text{إذن :}$$

من جهة ثانية ، لدينا :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x f(t) dt < \ln(\ln x)$$

نضرب أطراف هذا التآطير في العدد الموجب قطعاً x نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x} \right) < \frac{1}{x} \int_e^x f(t) dt < \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x} \right) : \text{لنحسب النهاية :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x} \right) \times \frac{\ln x}{\ln x} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \right) \times \frac{\ln x}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y = \ln x}} \frac{\ln y}{y} \times \frac{\ln x}{x} = 0 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x} \right) = 0 \quad \text{إذن :}$$

و نحصل بذلك على الوضعية التالية :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\ln(\ln x)}{x} \right) < \frac{1}{x} \int_e^x f(t) dt < \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

$x \rightarrow +\infty \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0$

و منه حسب خاصية النهايات و التآطير نستنتج أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_e^x f(t) dt = 0$$

2 ب

ليكن t عنصراً من المجال $[e, +\infty[$.

ننتقل من المتفاوتة $0 < 1$ و نضيف إلى طرفيها الكمية $(t \ln t)^2$

$$\text{نجد : } (t \ln t)^2 < 1 + (t \ln t)^2$$

$$\text{و منه : } \sqrt{(t \ln t)^2} < \sqrt{1 + (t \ln t)^2}$$

$$(1) \quad (\forall t \geq e) ; t \ln t < \sqrt{1 + (t \ln t)^2}$$

و لدينا كذلك $t \geq e$ إذن $\ln t \geq 1$.

نضرب هاتين المتفاوتتين طرفاً بطرف نجد : $t \ln t \geq e > 1$

نحتفظ بالمتفاوتة : $(\forall t \geq e) ; t \ln t > 1$

التي تصبح : $(\forall t \geq e) ; (t \ln t)^2 > 1$

نضيف إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $(t \ln t)^2$

$$\text{نجد : } (\forall t \geq e) ; 2(t \ln t)^2 > 1 + (t \ln t)^2$$

$$(2) \quad (\forall t \geq e) ; \sqrt{2} t \ln t > \sqrt{1 + (t \ln t)^2}$$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall t \geq e) ; t \ln t < \sqrt{1 + (t \ln t)^2} < \sqrt{2} t \ln t$$

2 ج

من خلال آخر تآطير حصلنا عليه نستنتج أن :

$$(\forall t \geq e) ; \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{t \ln t} \right) < \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} < \frac{1}{t \ln t}$$

ليكن x عدداً حقيقياً بحيث $x \geq e$.

ندخل التكامل $\int_e^x dt$ على هذا التآطير نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_e^x \left(\frac{1}{t \ln t} \right) dt < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \int_e^x \frac{1}{t \ln t} dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\ln(\ln t)]_e^x < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < [\ln(\ln t)]_e^x \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \ln(\ln x) \quad \text{يعني :}$$

2 د

لدينا حسب آخر تآطير :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + (t \ln t)^2}} dt < \ln(\ln x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x f(t) dt < \ln(\ln x) \quad \text{إذن :}$$

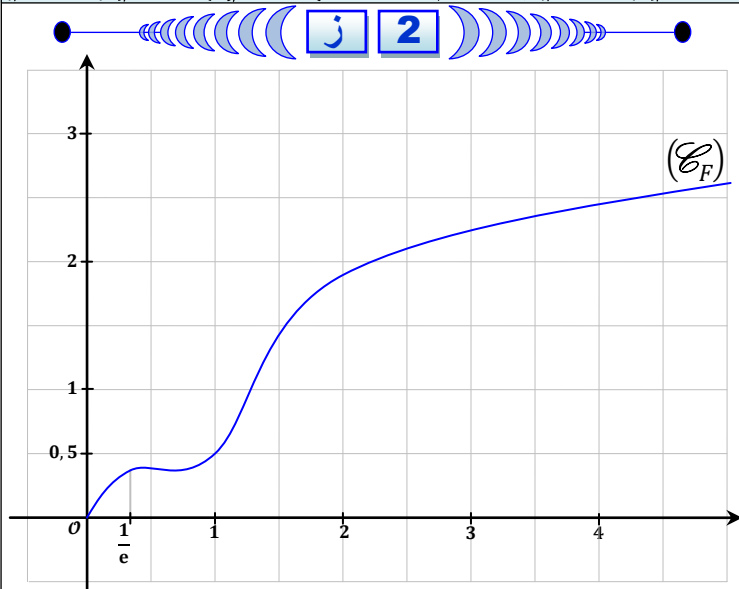
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln x) = \ln(\ln(+\infty)) = \ln(+\infty) = +\infty \quad \text{لدينا :}$$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) < \int_e^x f(t) dt < \ln(\ln x)$$

$x \rightarrow +\infty \quad \quad \quad +\infty \quad \quad \quad +\infty$





نستغل إذن هذه النهاية لحساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\int_0^e f(t) dt + \int_e^x f(t) dt \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\int_0^e f(t) dt \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\int_e^x f(t) dt \right)$$

$$= \left(\frac{1}{+\infty} \right) \times (\text{constante réelle}) + 0 = 0$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ (2)

و يمكن تفسير النهايتين (1) و (2) بقولنا : المنحنى (E_F) يقبل فرعا شلجيا في اتجاه محور الأفاسيل .

2 هـ

لدراسة نقط انعطاف المنحنى (E_F) ندرس إشارة المشتقة الثانية $F''(x)$.

لدينا F دالة عددية معرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$
 إذن F دالة أصلية للدالة f على المجال $[0, +\infty[$.

أو بتعبير الاشتقاق نكتب : $F'(x) = f(x)$; $\forall x \in [0, +\infty[$
 و بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$
 فإن الدالة F' قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$.

و لدينا : $F''(x) = f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + (x \ln x)^2)^{3/2}}$; $(\forall x \in]0, +\infty[)$

إذن تنعدم الدالة $F''(x)$ على المجال $]0, +\infty[$

عندما تنعدم الكميئين $(\ln x)$ و $(1 + \ln x)$.

أي تنعدم الدالة $F''(x)$ إذا كان $x = 1$ أو $x = \frac{1}{e}$

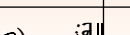
و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطتين و ذلك حسب جدول الإشارة السابق .

و بالتالي (E_F) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي $\frac{1}{e}$ و 1 .



و يمكن أن نضيف جدول التغير للمنحنى (E_F)
 و ذلك انطلاقا من جدول إشارة $f'(x)$.

لأن : $F''(x) = f'(x)$; $\forall x \in]0, +\infty[$

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$	
$F''(x)$	—	0	+	0	—
$(\mathcal{E}_F)$		نقطة انعطاف مقعر		نقطة انعطاف محدب	



نستعمل النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - F(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{F(x)}{x} \right)$

$$= (+\infty)(1 - 0) = +\infty$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$

من جهة ثانية لدينا φ معرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $\varphi(x) = x - F(x)$

و لدينا كذلك F قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ بحيث : $F'(x) = f(x)$

إذن φ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$

و لدينا : $\varphi'(x) = 1 - F'(x) = 1 - f(x)$

نلاحظ أنه إذا كان $x = 0$ فإن $f(x) = 1$

يعني : $1 - f(x) = 0$ أي : $\varphi'(x) = 0$

إذا كان $0 \leq x \leq \frac{1}{e}$ فإن $f(0) \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$

لأن f دالة تناقصية على المجال $\left[0, \frac{1}{e}\right]$.

إذن : $1 \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$

يعني : $1 - f(x) \geq 0$ أي : $\varphi'(x) \geq 0$

إذن φ دالة تزايدية على المجال $\left[0, \frac{1}{e}\right]$.

إذا كان $\frac{1}{e} \leq x \leq 1$ فإن $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(x) \leq f(1)$

لأن f دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

إذن $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(x) \leq 1$ يعني : $1 - f(x) \geq 0$ أي : $\varphi'(x) \geq 0$

إذن φ دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

إذا كان $x \geq 1$ فإن $f(x) \leq f(1)$

لأن f دالة تناقصية على المجال $[1, +\infty[$.

إذن : $f(x) \leq 1$ يعني : $1 - f(x) \geq 0$ أي : $\varphi'(x) \geq 0$.

إذن φ دالة تزايدية على المجال $[1, +\infty[$.

خلاصة : φ دالة تزايدية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$

ومنه : $1 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n)$ (*)

بما أن $\alpha_n \geq n \geq 1$ فإن $\alpha_n \in [1; +\infty[$ و $n \in [1; +\infty[$ لدينا $\alpha_n \geq n$ إذن $f(\alpha_n) \leq f(n)$ لأن f تناقصية على $[1; +\infty[$ إذن بالرجوع إلى التأيير (*) نكتب :

$$0 < 1 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(\alpha_n) < f(n)$$

يعني : $0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < f(n)$ (1)

في المرحلة الثانية نطبق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في $[0; n]$ إذن يوجد عنصر ε من $]0; n[$ بحيث :

$$\frac{F(n) - F(0)}{n - 0} = F'(\varepsilon) = f(\varepsilon)$$

يعني : $0 < \varepsilon < n$ و $\frac{F(n)}{n} = f(\varepsilon)$

لدينا : $0 < \varepsilon < n$ إذن : $f(0) < f(\varepsilon) < f(n)$

يعني : $0 < \frac{F(n)}{n} < f(n)$ أي : $0 < 1 < \frac{F(n)}{n} < f(n)$

يعني : $0 < \frac{F(n)}{n} < f(n)$ أي : $-f(n) < \frac{-F(n)}{n} < 0$ (2)

نجمع التأييرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$-f(n) < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n} < f(n)$$

ما يهمنا في هذا التأيير الغريب هو الشق الأيمن فقط .

$$\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n} < f(n) \text{ أي :}$$

الذي يصبح : $\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$ (3)

و من التأيير (1) نستنتج أن : $0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}$ (4)

إذن من (3) و (4) نستنتج أن :

$$(\forall n \geq 1) ; 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n) \quad (*)$$

ب 4

نعلم حسب الأسئلة السابقة أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F(n)}{n} + f(n) \right) = 0 \text{ إذن :}$$

و منه فإن التأيير (*) يُصبح :

$$(\forall n \geq 1) ; 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n)$$



3 ب

لدينا φ دالة متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$.

إذن φ تقابل من المجال $[0, +\infty[$ نحو صورته $\varphi([0, +\infty[)$.

و لدينا : $\varphi([0, +\infty[) = [\varphi(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)] = [0, +\infty[$

إذن φ تقابل من المجال $[0, +\infty[$ نحو المجال $[0, +\infty[$.

و هذا يعني حسب تعريف التقابل :

$$(\forall y \in [0, +\infty[), (\exists ! x \in [0, +\infty[) ; \varphi(x) = y$$

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

إذن : $n \in [0, +\infty[$ لأن : $\mathbb{N} \subset [0, +\infty[$

إذن يوجد عنصر وحيد نرمز له بـ α_n في المجال $[0, +\infty[$

بحيث : $\varphi(\alpha_n) = n$

أو بتعبير آخر : المعادلة $\varphi(x) = n$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا

و هو α_n في المجال $[0, +\infty[$ وذلك كيفما كان n من $\mathbb{N}$.

أو بتعبير أخير : $(\forall n \in \mathbb{N}), (\exists ! \alpha_n \geq 0) ; \varphi(\alpha_n) = n$

3 ج

رأينا حسب السؤال ب) أن : $\alpha_n \geq 0$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

إذن $F(\alpha_n) \geq F(0)$ لأن F تزايدية على المجال $[0, +\infty[$.

يعني أن : $F(\alpha_n) \geq 0$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ (1)

و نعلم أن : $\varphi(x) = x - F(x)$; $(\forall x \geq 0)$

إذن : $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$ لأن : $\alpha_n \geq 0$

يعني : $F(\alpha_n) = \alpha_n - \varphi(\alpha_n)$ (2)

بدمج (1) و (2) نحصل على : $\alpha_n - \varphi(\alpha_n) \geq 0$

يعني : $\alpha_n \geq \varphi(\alpha_n)$

و نعلم أن : $\varphi(\alpha_n) = n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

إذن : $\alpha_n \geq n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

نلاحظ أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \alpha_n \geq n$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$

4 أ

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 1$.

لدينا الدالة F متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$

بحيث : $F'(x) = f(x)$; $\forall x \in [0, +\infty[$

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في أي مجال

محدود يوجد ضمن $[0, +\infty[$.

في المرحلة الأولى : نختار المجال $[0; \alpha_n]$.

لدينا $[0; \alpha_n] \subset [0, +\infty[$ لأن $\alpha_n \geq 0$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

إذن ، حسب مبرهنة التزايدات المنتهية ، يوجد عنصر c من المجال

$$]0; \alpha_n[\text{ بحيث : } \frac{F(\alpha_n) - F(0)}{\alpha_n - 0} = F'(c) = f(c)$$

يعني : $0 < c < \alpha_n$ و $\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = f(c)$

لدينا : $0 < c < \alpha_n$ إذن : $f(0) < f(c) < f(\alpha_n)$

إذن بالرجوع إلى المتساوية (**): نجد :

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = \frac{1}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(\arctan(n+1)) - \ln(\arctan(n)) = \frac{1}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)) = \frac{-1}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم n^2 نجد :

$$n^2 [\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))] = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

$$v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

و باستعمال نتيجة السؤال (1) نجد :

خلاصة :

$$(\forall n \geq 1), (\exists c \in]n; n+1[) ; v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$$



لدينا : $n < c < n+1$

ندخل الدالة $\arctan$ على هذا التأطير و علما أنها تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ نجد :

$$(1) \arctan(n) < \arctan(c) < \arctan(n+1)$$

و لدينا كذلك : $n < c < n+1$

$$(2) (1+n^2) < (1+c^2) < 1+(n+1)^2$$

نضرب التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$(1+n^2)\arctan(n) < (1+c^2)\arctan(c) < (1+(n+1)^2)\arctan(n+1)$$

ندخل على هذا التأطير دالة المقلوب نجد :

$$\frac{1}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)} < \frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)} < \frac{1}{(1+n^2)\arctan(n)}$$

و نضرب أطرف هذا التأطير في العدد السالب قطعا $-n^2$ نجد :

$$\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)} < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$$

و نستغل بعد ذلك نتيجة السؤال (2) نجد :

$$\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$$

(*)



و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$(\blacksquare) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = 0$$

من جهة أخرى نعلم أن : $\varphi(x) = x - F(x)$; $(\forall x \geq 0)$

لدينا $\alpha_n \geq 0$ إذن $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$

و نعلم كذلك أن : $\varphi(\alpha_n) = n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

إذن : $F(\alpha_n) = \alpha_n - n$ يعني $n = \alpha_n - F(\alpha_n)$

$$\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \frac{\alpha_n - n}{\alpha_n} = 1 - \frac{n}{\alpha_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n}{\alpha_n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\alpha_n}\right) = 1 \text{ يعني } 0 = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\alpha_n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\alpha_n}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_n}{n}\right) = 1 \text{ أي :}$$



ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n \geq 1$

$$\begin{aligned} v_n = \ln(u_n) &= \ln \left(\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)^{n^2} \right) \\ &= n^2 \ln \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right) \\ &= n^2 [\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))] \end{aligned}$$



نعتبر f المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي :

لدينا حسب الخاصيات العامة لاتصال مركب دالتين أن الدالة f متصلة

على $]0; +\infty[$ و كذلك f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

لأن $\ln$ دالة قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و $\arctan$ دالة قابلة

للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $]0; +\infty[\subset \mathbb{R}$.

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على الدالة f في أي مجال

محدود و يوجد ضمن $]0; +\infty[$

ليكن $n \geq 1$ و نختار المجال $[n; n+1]$.

إذن يوجد عدد حقيقي c من المجال $[n; n+1]$ بحيث :

$$(\ast\ast) \frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c)$$

لدينا : $\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \ln(\arctan(x))$

إذن :

$$f'(x) = \frac{(\arctan(x))'}{\arctan(x)} = \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\arctan(x)} = \frac{1}{(1+x^2) \arctan(x)}$$



4

في البداية أذكركم بالنهايتين المهمتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{(1 + (n+1)^2) \arctan(n+1)} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n^2}{n^2 + 2n + 2} \right) \left(\frac{1}{\arctan(n+1)} \right)$$

$$= (-1) \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}} \right) = -\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{(1 + n^2) \arctan(n)} \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n^2}{n^2 + 1} \right) \left(\frac{1}{\arctan(n)} \right)$$

$$= (-1) \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}} \right) = -\frac{2}{\pi}$$

إذن التأيير ($\otimes$) يُصبح :

$$\left(\frac{-n^2}{(1 + n^2) \arctan(n)} \right) < v_n < \left(\frac{-n^2}{(1 + (n+1)^2) \arctan(n+1)} \right)$$

$\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$
 $n \rightarrow \infty \quad \quad \quad n \rightarrow \infty$
 $\frac{-2}{\pi} \quad \quad \quad \frac{-2}{\pi}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \frac{-2}{\pi} \quad \text{إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نجد :}$$

$$u_n = e^{v_n} \quad \text{إذن} \quad v_n = \ln(u_n) \quad \text{و لدينا}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{v_n} = e^{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \right)} = e^{\left(\frac{-2}{\pi} \right)} \quad \text{و منه :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = e^{\left(\frac{-2}{\pi} \right)} \quad \text{و بالتالي :}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■