التمرين الأول : (3,5 ن)

الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما .

I لكل x و y من المجال $G =]1,2[$ نضع : $x * y = \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

I 1 بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G . — 0,50 ن

I 2 نذكر أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية

و نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{R}_+^*$ نحو G بما يلي : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

أ بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(G,*)$. — 0,75 ن

ب استنتج أن $(G,*)$ زمرة تبادلية و حدد عنصرها المحايد . — 0,50 ن

II نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها : $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و وحدتها : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و نضع : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II 1 أ تحقق أن : $A^3 = \mathcal{O}$ ثم استنتج أن A قاسم للصفر في الحلقة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ — 0,50 ن

ب تحقق أن : $(A^2 - A + I)(A + I) = I$. — 0,50 ن

ثم استنتج أن المصفوفة $(A+I)$ تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ يتم تحديده .

II 2 لكل a و b من $\mathbb{R}$ نضع : $M(a,b) = a \cdot I + b \cdot A$. — 0,75 ن

و نعتبر المجموعة : $E = \{\ M(a,b)\ /\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\ \}$

بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له .

التمرين الثاني : (3 ن)

يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

I نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 4 كرات من الصندوق و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق .

I 1 حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X . — 1,00 ن

I 2 أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X . — 0,50 ن

II ننجز التجربة العشوائية التالية في ثلاث مراحل كالآتي :

المرحلة الأولى : نسحب كرة من الصندوق ، نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق .
المرحلة الثانية : نضيف إلى الصندوق 5 كرات لها نفس لون الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى .
المرحلة الثالثة : نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 كرات من الصندوق الذي أصبح يحتوي على 12 كرة بعد المرحلة الثانية .

نعتبر الأحداث التالية :

$N =$ { الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى سوداء } .

$R =$ { الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى حمراء } .

$E =$ { جميع الكرات المسحوبة في المرحلة الثالثة سوداء } .

II 1 بين أن : $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$ — 0,50 ن

II 2 أحسب $p(E)$ — 0,50 ن

II 3 أحسب احتمال الحدث R علما أن الحدث E قد تحقق . — 0,50 ن

التمرين الثالث : (3,5ن)

I ليكن a عددا عقديا يخالف 1 .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) : 2\,z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

I 1 بين أن : $z_1 = \dfrac{(a-1)(1+i)}{2}$ و $z_2 = \dfrac{(a-1)(1-i)}{2}$ هما حلي المعادلة (E) . — 0,50 ن

I 2 نأخذ $a = e^{i\theta}$ حيث $0 < \theta < \pi$.

I 2 أ بين أن : $a - 1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\, e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$ — 0,50 ن

I 2 ب استنتج الشكل المثلثي لكل من z_1 و z_2 . — 1,00 ن

II المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

نفترض أن $\Re(a) < 0$ و نعتبر النقط $A(a)$ و $B(-i)$ و $C(i)$ و $B'(1)$.

II 1 حدد لحقي كل من J و K منتصفي القطعتين $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي بدلالة a . — 0,50 ن

II 2 ليكن r_1 الدوران الذي مركزه J و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$. و r_2 الدوران الذي مركزه K و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ — 0,50 ن

نضع : $C' = r_1(C)$ و $A' = r_2(A)$.

و ليكن c' لحق C' و a' لحق A' . بين أن : $a' = z_1$ و $c' = z_2$.

II 3 أحسب $\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right)$ ثم استنتج أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$. — 0,50 ن

التمرين الرابع : (8,25 ن)

1 لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1 أ بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0 ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ — 0,50 ن

1 ب أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في النقطة 0 (يمكنك استعمال النتيجة $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$) — 0,50 ن

1 ج بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$. و أن مشتقتها معرفة بـ : — 0,50 ن

$$(\forall x > 0)\ ;\ f'(x) = \frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1 د ضع جدول تغيرات الدالة f . — 0,50 ن

لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

و ليكن $(\mathscr{C}_F)$ المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,25 ن — 2 أ — حدد دالة أصلية للدالة $x\longmapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ على المجال $[e,+\infty[$.

0,50 ن — 2 ب — بين أن : $(\forall t\geq e)\ ;\ t\ln t<\sqrt{1+(t\ln t)^2}<\sqrt{2}\,t\ln t$

0,75 ن — 2 ج — بين أن : $(\forall t\geq e)\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)<\displaystyle\int_e^x\dfrac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}dt<\ln(\ln x)$

0,50 ن — 2 د — استنتج أن : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ و أن : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$

0,50 ن — 2 هـ — بين أن $(\mathscr{C}_F)$ يقبل نقطتي انعطاف المطلوب تحديد أفصول كل واحدة منهما .

1,00 ن — 2 ز — أنشئ $(\mathscr{C}_F)$ (نأخذ من أجل ذلك $F(1)\approx 0{,}5$ و $F\left(\frac{1}{e}\right)\approx 0{,}4$)

3 — لكل x من المجال $[0,+\infty[$ نضع : $\varphi(x)=x-F(x)$.

0,75 ن — 3 أ — بين أن : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ ثم ادرس تغيرات الدالة φ .

0,50 ن — 3 ب — بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ ، المعادلة $\varphi(x)=n$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $[0,+\infty[$.

0,50 ن — 3 ج — بين أن : $\alpha_n\geq n$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$ ثم أحسب $\displaystyle\lim_{n\infty}\alpha_n$

0,50 ن — 4 أ — بين أن : $(\forall n\geq 1)\ ;\ 0<\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}<\dfrac{F(n)}{n}+f(n)$

(من أجل ذلك يمكن استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية)

0,50 ن — 4 ب — أحسب النهاية : $\displaystyle\lim_{n\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)$

التمرين الخامس : (1,75 ن)

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n=\left(\dfrac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ و $v_n=\ln(u_n)$

0,25 ن — 1 — تحقق أن : $(\forall n\geq 1)\ ;\ v_n=n^2[\ln(\arctan(n))-\ln(\arctan(n+1))]$

0,50 ن — 2 — باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن :

$$(\forall n\geq 1),(\exists\, c\in\,]\,n\,;n+1\,[\,)\ ;\ v_n=\dfrac{-n^2}{(1+c^2)arctan(c)}$$

0,50 ن — 3 — بين أن : $(\forall n\geq 1)\ ;\ \dfrac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}<v_n<\dfrac{-n^2}{(1+(1+n)^2)arctan(n+1)}$

0,50 ن — 4 — أحسب النهاية : $\displaystyle\lim_{n\infty}u_n$