

مادة الرياضيات
العلوم الرياضية أ و ب
مدة الانجاز : أربع ساعات
المعلم : 9

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحانات الوطنية الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2013



التمرين الأول : (3,5 ن)



- نذكر أن $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة واحدة تبادلية و كاملة . ☐ ☐ ☐
- نزد $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعروف بما يلي : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; x * y = x + y - 2$ ☐ 1 ☐
- بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي . ☐ 1 ☐ 0,50 ن
- بين أن : $(\mathbb{Z}, *)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده . ☐ 1 ☐ 0,25 ن
- بين أن : $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبادلية . ☐ 1 ☐ 0,50 ن
- نزد $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعروف بـ : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; x \top y = xy - 2x - 2y + 6$ ☐ 2 ☐
- و نعتبر التطبيق f من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ المعرفة بما يلي : $f(x) = x + 2$; $(\forall x \in \mathbb{Z})$ ☐ ☐ ☐
- بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z}, \times)$ نحو $(\mathbb{Z}, \top)$. ☐ 2 ☐ 0,50 ن
- بين أن : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 ; (x * y) \top z = (x \top z) * (y \top z)$ ☐ 2 ☐ 0,25 ن
- إستنتج من كل ما سبق أن : $(\mathbb{Z}, *, \top)$ حلقة تبادلية و واحدة . ☐ 3 ☐ 0,75 ن
- بين أن : $x \top y = 2$ إذا وفقط إذا كان $x = 2$ أو $y = 2$. ☐ 4 ☐ 0,25 ن
- استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z}, *, \top)$ كاملة . ☐ 4 ☐ 0,25 ن
- هل $(\mathbb{Z}, *, \top)$ جسم ؟ (علل الجواب) ☐ 4 ☐ 0,25 ن



التمرين الثاني : (3,5 ن)



- ليكن a عددا عقديا غير منعدم . ☐ ☐ 1 ☐
- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : ☐ ☐ ☐

$$(E) : 2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$$

- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $(-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$. ☐ 1 ☐ 0,25 ن
- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . ☐ 2 ☐ 0,50 ن
- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ☐ ☐ II
- نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي : a و $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ و z . ☐ ☐ ☐
- ليكن r الدوران الذي مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{3}$. نضع : $A_1 = r^{-1}(A)$ و $B_1 = r(B)$ ☐ ☐ ☐
- (حيث r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r) ☐ ☐ ☐
- ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي . ☐ ☐ ☐
- تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع . ☐ 1 ☐ 0,50 ن
- بين أن : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ ☐ 2 ☐ 0,50 ن
- بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي أضلاع . ☐ 2 ☐ 0,50 ن



نفترض أن $M \neq A$ و $M \neq B$ بين أن : $\frac{z - b_1}{z - a_1} = - \left(\frac{z - b}{z - a} \right) \times \frac{a}{b}$ أ 3 11 ن 0,50

بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة . ب 3 11 ن 0,75

التمرين الثالث : (3 ن)

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية n الأكبر قطعا من 1 □ □ □

و التي تحقق الخاصية $(\mathcal{R})$ التالية : $3^n - 2^n \equiv 0 [n]$. □ □ □

نفترض أن n يحقق الخاصية $(\mathcal{R})$. و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n . □ 1 □

بين أن : $3^n - 2^n \equiv 0 [p]$ ثم استنتج أن $p \geq 5$. أ 1 □ ن 0,75

بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$. ب 1 □ ن 0,50

بين أنه يوجد زوج (a, b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $an - b(p - 1) = 1$. ج 1 □ ن 0,50

ليكن r و q باقي و خارج القسمة الأفليدية للعدد a على $(p - 1)$. د 1 □ ن 0,50

(يعني : $a = q(p - 1) + r$ حيث : $0 \leq r < p - 1$ و $q \in \mathbb{Z}$) □ □ □

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn = 1 + k(p - 1)$. □ □ □

استنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق الخاصية $(\mathcal{R})$. □ 2 □ ن 0,75

التمرين الرابع : (10 ن)

نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بما يلي : الجزء الأول

$$\begin{cases} h(x) = \frac{x-1}{x \ln x} ; (\forall x > 1) \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1 . أ 1 □ ن 0,25

بين أن : $\ln x < x - 1$; $(\forall x > 1)$ ثم استنتج أن h تناقصية قطعا على المجال $[1; +\infty[$. ب 1 □ ن 0,75

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h . أ 2 □ ن 0,50

استنتج أن : $0 < h(x) \leq 1$; $(\forall x \geq 1)$. ب 2 □ ن 0,25

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بما يلي : الجزء الثاني

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة g □ □ □

في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. □ □ □

$$\begin{cases} g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt ; (\forall x > 1) \\ g(1) = \ln 2 \end{cases}$$

تحقق أن : $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$; $(\forall x > 1)$ أ 1 □ ن 0,25

تحقق أن : $g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} dt$; $(\forall x > 1)$ ب 1 □ ن 0,25

بين أن : $g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) dt$; $(\forall x > 1)$ ج 1 □ ن 0,50

بين أن : $(x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$; $(\forall x > 1)$ أ 2 □ ن 0,50

رمضان 2013 - الصفحة : 234

الدورة العادية 2013 -

0,50 ن

ب 2 استنتج أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 .

0,75 ن

ج 2 بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

0,75 ن

أ 3 بين أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1; +\infty[$. و أن : $g'(x) = \frac{1}{2} h(\sqrt{x})$; $(\forall x > 1)$

0,50 ن

ب 3 استنتج أن : $0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$; $(\forall x \geq 1)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

0,50 ن

ج 3 أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$.



الجزء الثالث

0,50 ن

أ 1 بين أن الدالة : $k : x \mapsto g(x) - x + 1$ تقابل من $]1; +\infty[$ نحو $]-\infty; \ln 2]$.

0,25 ن

أ 2 استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1; +\infty[$ بحيث : $1 + g(\alpha) = \alpha$.

II نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = 1 + g(u_n) ; (\forall n \geq 0) \\ 1 \leq u_0 < \alpha \end{cases}$

0,50 ن

أ 1 بين أن : $1 \leq u_n < \alpha$; $(\forall n \geq 0)$

0,50 ن

ب 1 بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً .

0,75 ن

ج 1 استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة . و أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$

0,50 ن

أ 2 بين أن : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$; $(\forall n \geq 0)$

0,50 ن

ب 2 بين أن : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$; $(\forall n \geq 0)$

0,25 ن

ج 2 استنتج مرة ثانية أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$

