Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

التمرين الأول : (3,5 ن)

■ (I) ① ——————

ليكن x و y عنصرين من $[1;+\infty[$

إذن : $x \geq 1$ و $y \geq 1$

و منه : $\sqrt{x} \geq 1$ و $\sqrt{y} \geq 1$

يعني : $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1)^2 \geq 1$

إذن : $x \perp y \in [1;+\infty[$

و بالتالي : $\perp$ قانون تركيب داخلي في I .

■ (I) ② ——————

ليكن x و y عنصرين من $[1;+\infty[$

لدينا : $x \perp y = (\sqrt{x}+\sqrt{y}-1)^2$

$\Leftrightarrow \quad x \perp y = (\sqrt{y}+\sqrt{x}-1)^2$

$\Leftrightarrow \quad x \perp y = y \perp x$

و منه $\perp$ قانون تبادلي في I .

ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من المجال I .

لدينا : $(x \perp y) \perp z = (\sqrt{x \perp y}+\sqrt{z}-1)^2$

$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = (\sqrt{x}+\sqrt{y}-1+\sqrt{z}-1)^2$

$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = (\sqrt{x}+(\sqrt{y}+\sqrt{z}-1)-1)^2$

$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = (\sqrt{x}+\sqrt{y \perp z}-1)^2$

$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$

إذن $\perp$ قانون تجميعي في $[1;+\infty[$.

■ (I) ③ ——————

ليكن e العنصر المحايد للقانون $\perp$ في I .

$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; x \perp e = e \perp x = x$

$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; (\sqrt{x}+\sqrt{e}-1)^2 = x$

$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \; ; \; \sqrt{x}+\sqrt{e}-1 = \pm\sqrt{x}$

في حالة : $\sqrt{x}+\sqrt{e}-1 = -\sqrt{x}$

نحصل على : $e = (1-2\sqrt{x})^2$

لكن : $(1-2\sqrt{x})^2 \notin I$ لأنه لدينا $x \epsilon I$

إذن : $x \geq 0$ و منه : $(1-2\sqrt{x})^2 < 1$

أما في حالة : $\sqrt{x}+\sqrt{e}-1 = \sqrt{x}$

نحصل على : $e = 1 \epsilon [1;+\infty[$

و نعلم أن العنصر المحايد إن وجد يكون دائما وحيدا

إذن : 1 هو العنصر المحايد للقانون $\perp$ في المجموعة I .

■ (II) ① ——————

لتكن $M(a)$ و $M(b)$ مصفوفتين من E

لدينا : $M(a) \times M(b) = \begin{pmatrix} a & 2(a-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 2(b-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ab & 2(ab-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(ab) \epsilon E$

إذن E جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ (II) ② أ ——————

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}^*$

لدينا : ——————

$\varphi(x \times y) = M(xy) = M(x) \times M(y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

ليكن $M(y)$ عنصرا من $(E,\times)$

لنحل المعادلة $\varphi(x) = M(y)$ ذات المجهول x

$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow M(x) = M(y)$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 2(y-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad x = y$

و بالتالي : المعادلة $\varphi(x) = M(y)$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}^*$ و هو y

و بتعبير آخر : ——————

$(\forall M(y) \epsilon E)\ (\exists ! \, x \epsilon \mathbb{R}^*) \; : \; \varphi(x) = M(y)$

و منه : φ تقابل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

خلاصة : φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

■ (II) ② ب ——————

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

نستنتج إذن بنية $(E,\times)$ انطلاقا من بنية $(\mathbb{R}^*,\times)$ عن طريق التشاكل التقابلي φ .

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

لدينا : $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1 و كل عنصر x يقبل $\frac{1}{x}$ كمماثل.

↓

إذن : $(E,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو المصفوفة $\varphi(1)$ و كل مصفوفة $M(x)$ تقبل مماثلة و هي المصفوفة $M\left(\frac{1}{x}\right)$.

و لدينا : $\varphi(1) = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

و $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 2\left(\frac{1}{x}-1\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

■(II)②ج

لتكن H_n مصفوفة من المجموعة $\mathcal{H}$

$$\Leftrightarrow \quad H_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad H_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2(2^n-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad H_n = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad x = 2^n$$

إذن : $\mathcal{H} \subset E$ و لدينا : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon\, \mathcal{H}$

إذن $\mathcal{H}$ جزء غير فارغ من E

لتكن : $\begin{pmatrix} 2^m & 2^{m+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفتين من $\mathcal{H}$.

لدينا : $\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^m & 2^{m+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^{-m} & 2(2^{-m}-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-m} & 2^{n-m+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon\, \mathcal{H}$$

إذن : $(\mathcal{H},\times)$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■(I)①أ

تعويض مباشر و حساب سهل

■(I)①ب

نعلم أنه إذا كان z_1 و z_2 هما حلا المعادلة : $az^2+bz+c=0$

فإن : $z_1+z_2 = \frac{-b}{a}$ و $z_1z_2 = \frac{c}{a}$

نستعمل العلاقة : $z_1z_2 = \frac{c}{a}$

إذن : $z_1z_2 = \left(\frac{5}{3}+4i\right)$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = \frac{\left(\frac{5}{3}+4i\right)\left(1-\frac{2}{3}i\right)}{\left(1+\frac{2}{3}i\right)\left(1-\frac{2}{3}i\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = \frac{9}{13}\left(\frac{13}{3}+\frac{26}{9}i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = 3+2i$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = 3\left(1+\frac{2}{3}i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = 3z_1$$

■(II)①أ

لدينا : $P = r(A)$

إذن حسب الكتابة العقدية للدوران : $(z_P - z_\Omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_A - z_\Omega)$

$$\Leftrightarrow \quad (p-\omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{p = e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)+\omega} \quad (1)$$

و بنفس الطريقة : $B = r(Q)$

$$\Leftrightarrow \quad (z_B - z_\Omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_Q - z_\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad (b-\omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(q-\omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad qe^{\frac{i\pi}{3}} = (b-\omega)+\omega e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{q = e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)+\omega} \quad (2)$$

■(II)①ب

في البداية لدينا :

$$\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

■ (II) ② (أ)

نفترض أن : $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

بالإستعانة بالعلاقة (3) نحصل على :

$$\frac{p-a}{q-b}=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{p-a}{q-b}=e^{\frac{2i\pi}{3}}\times e^{\frac{4i\pi}{3}}=e^{2i\pi}=1$$

إذن : $(p-a)=(q-b)$

يعني : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BQ}$

و منه حسب التعريف المتجهي لمتوازي الأضلاع : $APBQ$ متوازي أضلاع.

■ (II) ② (ب)

لدينا حسب النتيجة (1) :

$$(p-a)=\omega+ae^{\frac{i\pi}{3}}-\omega e^{\frac{i\pi}{3}}-a$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(p-a)=\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)} \quad (4)$$

و لدينا كذلك حسب افتراض السؤال ② : $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

إذن : $\boxed{(\omega-b)=e^{\frac{-2i\pi}{3}}(\omega-a)}$ (5)

و لدينا من جهة أخرى :

$$(b-a)=(\omega-a)-(\omega-b)$$

إذن باستعمال العلاقة (5) نحصل على :

$$(b-a)=(\omega-a)-(\omega-b)$$

$$\Leftrightarrow \quad (b-a)=(\omega-a)-e^{\frac{-2i\pi}{3}}(\omega-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(b-a)=(\omega-a)\left(1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right)} \quad (6)$$

من (4) و (6) نستنتج أن :

$$\frac{b-a}{p-a}=\frac{(\omega-a)\left(1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right)}{\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)}=\frac{1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b-a}{p-a}=\frac{1-cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\,sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{1-cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b-a}{p-a}=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}=\frac{3+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

ننطلق إذن من الكتابة :

$$\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(e^{\frac{-4i\pi}{3}}-e^{-i\pi}\right)}{\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right)+1\right)}{\left(1-\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(\cancel{-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}+1\right)}{\cancel{\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=e^{\frac{4i\pi}{3}}}$$

■ (II) ① (ج)

لدينا حسب العلاقتين (1) و (2) من السؤال ① (أ)

$$(p-a)=\omega+ae^{\frac{i\pi}{3}}-\omega e^{\frac{i\pi}{3}}-a$$

$$\Leftrightarrow \quad (p-a)=\omega\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)+a\left(e^{\frac{i\pi}{3}}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(p-a)=\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)} \quad (1)$$

و لدينا كذلك : $(q-b)=\omega+be^{\frac{-i\pi}{3}}-\omega e^{\frac{-i\pi}{3}}-b$

$$\Leftrightarrow \quad (q-b)=\omega\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)+b\left(e^{\frac{-i\pi}{3}}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(q-b)=\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)(\omega-b)} \quad (2)$$

و منه : $\frac{p-a}{q-b}=\left(\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}\right)\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$

و بالتالي : $\boxed{\frac{p-a}{q-b}=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}}$ (3)

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

نضرب طرفي آخر نتيجة في العدد العقدي $(1+i\sqrt{3})$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b-a}{p-a}=\frac{1}{4}(3+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})=\boxed{i\sqrt{3}}$$

و بالتالي : $\left(\frac{b-a}{p-a}\right)=i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right)\equiv arg(i\sqrt{3})[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right)\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad \left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\right)\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\Rightarrow$ زاوية $P\hat{A}B$ قائمة

و بما أن : $APQB$ متوازي أضلاع و إحدى زواياه قائمة.

فإن $APQB$ مستطيل.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ ① (أ)

لدينا الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من 503 هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 503 .

إذن 503 عدد أولي.

■ ① (ب)

بما أن 503 عدد أولي و 7 عدد أولي كذلك.

فإنه حسب $(Fermat)$: $7^{503-1}\equiv 1[503]$

يعني : $7^{502}\equiv 1[503]$

و منه : $(7^{502})^4\equiv 1^4[503]$

أي : $7^{2008}\equiv 1[503]$

■ ②

لدينا : $(1,8)$ حل خاص للمعادلة (E) .

و ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) .

إذن : $\begin{cases}49\times 1-6\times 8=1\\ 49x-6y=1\end{cases}$

ننجز عملية الفرق بين المعادلتين طرفا بطرف نحصل على :

$$\boxed{49(x-1)=6(y-8)} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad 49\ /\ 6(y-8)$$

بما أن $49\wedge 6=1$ فإنه حسب $Gauss$: نحصل على : $49\ /\ (y-8)$

و منه : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y=49k+8$

نعوض y بقيمته في المعادلة $(*)$ نحصل على :

$$49(x-1)=6(49k)$$

$$\Leftrightarrow \quad x=6k+1$$

عكسيا : لدينا : $49(6k+1)-6(49k+8)=1$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة تكتب على شكل :

$$\mathcal{S}=\{\ (6k+1\ ;49k+8)\quad /\quad k\epsilon\mathbb{Z}\}$$

■ ③ (أ)

نعلم أنه إذا كانت q^n متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم q فإن :

$$1+q+q^2+\cdots\cdots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

لدينا 7^n متتالية هندسية أساسها 7 إذن :

$$1+7+7^2+\cdots\cdots+7^{2007}=\frac{7^{2007+1}-1}{7-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad N=\frac{7^{2008}-1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7^{2008}-6N=1$$

$$\Leftrightarrow \quad 7^2\cdot 7^{2006}-6N=1$$

$$\Leftrightarrow \quad 49\cdot 7^{2006}-6N=1$$

إذن الزوج $(7^{2006},N)$ حل للمعادلة (E) .

■ ③ (ب)

لدينا : $\begin{cases}1\equiv 1[4]\\ 7\equiv -1[4]\end{cases}$

$\begin{cases}7^2\equiv 1[4]\\ 7^3\equiv -1[4]\end{cases}$

$\begin{cases}7^4\equiv 1[4]\\ 7^5\equiv -1[4]\end{cases}$

$\vdots \qquad \vdots$

$\begin{cases}7^{2006}\equiv 1[4]\\ 7^{2007}\equiv -1[4]\end{cases}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

نجمع هذه المتوافقات طرفا بطرف نحصل على :

$$1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots\cdots\cdots + 7^{2006} + 7^{2007} \equiv 0[4]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{N \equiv 0[4]}$$

لدينا حسب ① (ب) $7^{2008} \equiv 1[503]$ إذن : $503 / (7^{2008} - 1)$

و نعلم أن : $(7^{2008} - 1) = 6N$ إذن : $503 / 6N$

و بما أن 503 عدد أولي و 2×3 هو التفكيك الأولي للعدد 6 فإن : $503 \wedge 6 = 1$

و منه حسب $(Gauss)$: $503 / N$

و بالتالي : $N \equiv 0[503]$

■ ③ (ج)

لدينا : $503 \wedge 4 = 1$ لأن : 503 عدد أولي.

و لأن 2^2 هو التفكيك الأولي للعدد 4

و نعلم أن : $4 / N$ و $503 / N$

إذن : $4 \times 503 / N$ يعني : $2012 / N$

التمرين الرابع : (7,5 ن)

■ ① (I)

لدينا : $g'(x) = \frac{1}{1+x} - \left(\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}\right)$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

إذن : g' تنعدم في 0 و إشارتها موجبة على المجال $[0, +\infty[$.

و منه g دالة تزايدية على المجال $[0, +\infty[$.

■ ② (I)

ليكن x عنصرا من $[0, +\infty[$.

إذن $x \geq 0$ و منه : $g(x) \geq g(0) = 0$

و بالتالي : $\forall x \epsilon [0, +\infty[\ ; \ g(x) \geq 0$

■ ① (II)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x ln(1 + e^{-x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}}$$

نضع : $t = e^{-x}$ نحصل على :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{ln(1+t) - ln(1+0)}{t - 0} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x ln(1 + e^{-x}) = \lim_{x \to -\infty} e^x ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} e^x ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} e^x \left(ln(e^x + 1) - ln(e^x)\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \underbrace{e^x}_{0^+} \underbrace{ln\left(\underbrace{e^x}_{0^+} + 1\right)}_{0^+} - \underbrace{xe^x}_{0^-} = 0$$

■ ② (II)

ليكن x عددا حقيقيا .

$$f'(x) = e^x ln(1 + e^{-x}) + e^x \left(\frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = e^x \left(ln(1 + e^{-x}) - \left(\frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x) = e^x g(e^{-x})$$

■ ③ (II)

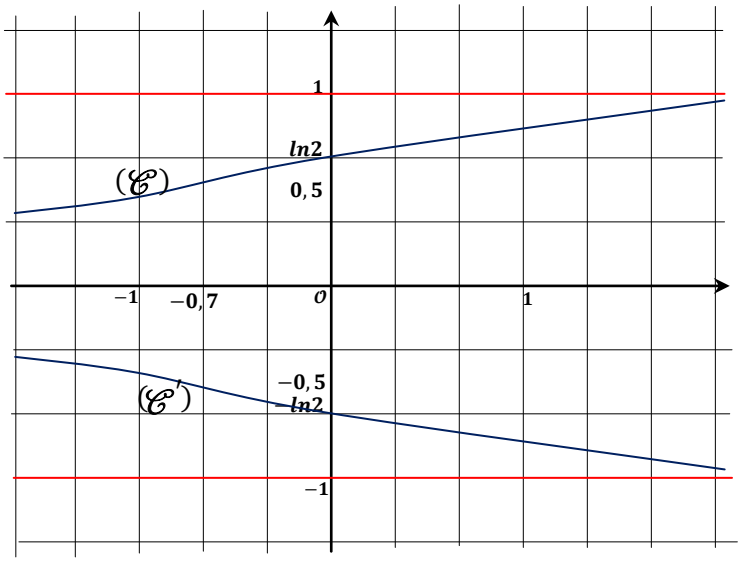
لدينا : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$

إذن f' لا تنعدم أبدا و إشارتها موجبة دائما .

و نستنتج جدول تغيرات f كما يلي :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	↗	1

■ ④ (II)



■ ⑤ (II)

ليكن x عنصرا من $]-1,0[$.

إذن : $-1 < x < 0$ و منه $e^{-x} < e$ و $e^x < 1$

يعني : $g(e^{-x}) < g(e)$ و $e^x < 1$

إذن : $0 < e^x g(e^{-x}) < g(e)$ أي : $0 < f'(x) < g(e)$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

■(II)6

نضع : $h(x) = f(x) + x$

لدينا : $h'(x) = f'(x) + 1$

بما أن : $f'(x) > 0$ حسب السؤال (5)

فإن : $h'(x) > 1 > 0$ و منه : h دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

و منه : h تقابل من أي مجال $[x,y]$ من $\mathbb{R}$ نحو صورته بالدالة h .

نختار المجال $[-1,0]$.

إذن h تقابل من $[-1,0]$ نحو $f([-1,0])$

و لدينا : $h([-1,0]) = [h(-1), h(0)] \approx \left[\frac{-1}{2}, ln2\right]$

و بما أن : $0 \in \left[\frac{-1}{2}, ln2\right]$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا بالتقابل h في المجال $[-1,0]$.

و بتعبير آخر : $\exists!\ \alpha \in [-1,0]\ ;\ h(\alpha) = 0$

و بما أن : $h(-1) \neq h(0) \neq 0$

فإن : $\exists!\ \alpha \in]-1,0[\ ;\ h(\alpha) = 0$

أي : $\exists!\ \alpha \in]-1,0[\ ;\ f(\alpha) + \alpha = 0$

■(II)7(أ)

من أجل $n = 0$ لدينا : $-1 \leq u_0 = 0 \leq 0$

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq u_n \leq 0$

حسب التمثيل المبياني للدالة f : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f(x) \geq 0$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \underbrace{\boxed{f(u_n) \geq 0}}_{(1)}$

و لدينا حسب الإفتراض : $u_n \leq 0$

إذن : $f(u_n) \leq ln2$ لأن f تزايدية على $\mathbb{R}$.

و منه : $\underbrace{\boxed{f(u_n) \leq 1}}_{(2)}$ لأن : $ln2 \approx 0,6$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq f(u_n) \leq 1$

$\Leftrightarrow\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq -f(u_n) \leq 0$

$\Leftrightarrow\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq u_{n+1} \leq 0$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq u_n \leq 0}$

■(II)7(ب)

لدينا f دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كله.

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال من $\mathbb{R}$

نختار المجال الذي طرفاه u_n و α و الذي سنرمز له بالرمز $\overrightarrow{[\alpha, u_n]}$

لأننا لا ندري من الأكبر هل u_n أم α .

$\Rightarrow\ \exists\ c \in \overrightarrow{]\alpha, u_n[}\ ;\ \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f'(c)$

$\Rightarrow\ \exists\ c \in \overrightarrow{]\alpha, u_n[}\ ;\ |f(u_n) - f(\alpha)| = f'(c)|u_n - \alpha|$

$\Rightarrow\ \exists\ c \in \overrightarrow{]\alpha, u_n[}\ ;\ |-u_{n+1} + \alpha| = f'(c)|u_n - \alpha|$

$\Rightarrow\ \exists\ c \in \overrightarrow{]\alpha, u_n[}\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| = f'(c)|u_n - \alpha|$

بما أن : $0 \leq f'(x) \leq g(e)$

فإن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq f'(x)|u_n - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$

و منه : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|}$

■(II)7(ج)

لدينا حسب السؤال (ب) :

$(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$

من أجل $(n-1)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} |u_n - \alpha| &\leq g(e)|u_{n-1} - \alpha| \\ &\leq (g(e))^2|u_{n-2} - \alpha| \\ &\leq (g(e))^3|u_{n-3} - \alpha| \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\leq (g(e))^n|u_{n-n} - \alpha| \end{aligned}$$

إذن : $|u_n - \alpha| \leq (g(e))^n|0 - \alpha|$

و بما أن : $\alpha \in]-1,0[$ و ذلك حسب السؤال (6)

فإن : $|0 - \alpha| = |\alpha| < 1$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

■(II)(7)د

لدينا حسب السؤال (7)ج

$$(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha|\le (g(e))^n$$

و نلاحظ أن $(g(e))^n$ متتالية هندسية أساسها $g(e)$ و هو عدد موجب أصغر من 1

لأن : $g(e)<0{,}6<1$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(g(e))^n=0$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\lim_{n\to+\infty}|u_n-\alpha|=0$$

أي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

التمرين الخامس : (2,5 ن)

■(1)

$$F(1)=\int_1^1\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt=0$$

■(2)أ

لدينا الدالة : $t\to\dfrac{\ln t}{1+t^2}$ متصلة على $]0,+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية ψ على $]0,+\infty[$ بحيث :

$$\psi(x)-\psi(0)=\int_0^x\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt \quad \text{و} \quad \psi'(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}$$

بما أن : $F(x)=\psi(x)-\psi\left(\frac{1}{x}\right)$

فإن F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالة و مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا :

$$\begin{aligned}F'(x)&=\psi'(x)+\left(\frac{1}{x}\right)'\psi'\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)-\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)\\&=\left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)-\left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)=0\end{aligned}$$

■(2)ب

بما أن : $(\forall\, x\,\epsilon\,]0,+\infty[)\ ;\ F'(x)=0$

فإن : $(\forall\, x\,\epsilon\,]0,+\infty[)\ ;\ F(x)=c\,\epsilon\,\mathbb{R}$

و بما أن : $F(1)=0$ فإن $c=0$

و بالتالي : $(\forall\, x\,\epsilon\,]0,+\infty[)\ ;\ F(x)=0$

■(3)

$$F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt=0$$

$$\Leftrightarrow\quad F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\underbrace{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)}_{v'}\underbrace{(\ln t)}_{u}\,dt$$

$$\Leftrightarrow\quad F(x)=\left[\left(Arctan(t)\right)(\ln t)\right]_{\frac{1}{x}}^{x}-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arctan(t)}{t}dt$$

$$\Leftrightarrow\quad F(x)=\ln(x)\cdot Arctan(x)-ln\left(\frac{1}{x}\right)\cdot Arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arctan(t)}{t}dt$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{F(x)=\left(Arctan(x)+Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arctan(t)}{t}dt}\quad(*)$$

■(4)

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$\varphi(x)=Arctan\left(\frac{1}{x}\right)+Arctan(x)$$

لدينا φ قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

لأنها تضم دوال اعتيادية كلها معرفة و قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

و لدينا :

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\left(\frac{1}{x}\right)'\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\\&=\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\\&=\frac{-1}{x^2+1}+\frac{1}{1+x^2}=0\end{aligned}$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

إذن φ دالة ثابتة على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$

أو بتعبير آخر : $\begin{cases}\forall x\epsilon]-\infty,0[\ ;\ \varphi(x)=c_1\epsilon\mathbb{R}\\ \forall x\epsilon]0,+\infty[\ ;\ \varphi(x)=c_2\epsilon\mathbb{R}\end{cases}$

نعوض x بالقيمتين 1 و -1 و ذلك من أجل إيجاد c_1 و c_2 نحصل على :

$$\begin{cases}c_1=\varphi(-1)=2Arctan(-1)=2\left(\frac{-\pi}{4}\right)=\frac{-\pi}{2}\\ c_2=\varphi(1)=2Arctan(1)=2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

و بالتالي : $\boxed{\varphi(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & ;\ \forall x>0\\ \frac{-\pi}{2} & ;\ \forall x<0\end{cases}}$

ما يهمنا من هذه النتيجة هو : $(\forall x>0)\ ;\ \varphi(x)=\frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow\quad (\forall x>0)\ ;\ Arctan\left(\frac{1}{x}\right)+Arctan(x)=\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(\forall x>0)\ ;\ Arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}-Arctan(x)}\quad (**)$$

■ ④ ———————————————————

نستغل إذن النتيجتين $(*)$ و $(**)$ في الإجابة على هذا السؤال.

لدينا : $(\forall x>0)\ ;\ F(x)=0$

إذن :

$$\left(Arctan(x)+Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arctan(t)}{t}dt=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\frac{\pi}{2}\right)\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{Arctan(t)}{t}dt=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arctan(t)}{t}dt=\frac{\pi}{2}\ln x$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{\frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arctan(t)}{t}dt=\ln x}$$

■ ——————————— و الحمد لله رب العالمين ■

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma