

التمرين الأول : (3,5 ن)

1 أ

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من  $]0,1[$

إن :  $0 < x < 1$  و  $0 < y < 1$

إن :  $-1 < -x < 0$  و  $-1 < -y < 0$

إن :  $0 < 1 - x < 1$  و  $0 < 1 - y < 1$

و منه :  $0 < (1 - x)(1 - y) < 1$  (1)

و بما أن  $xy > 0$  فإن :  $(1 - x)(1 - y) + xy > xy$

يعني : (2)  $\frac{xy}{(1 - x)(1 - y) + xy} < 1$

و لدينا :  $xy > 0$  و  $xy + (1 - x)(1 - y) > 0$

إن : (3)  $\frac{xy}{(1 - x)(1 - y) + xy} > 0$

من (2) و (3) نستنتج أن :

$(\forall (x, y) \in I^2) ; 0 < \frac{xy}{xy + (1 - x)(1 - y)} < 1$

$\Leftrightarrow (\forall (x, y) \in I^2) ; 0 < x * y < 1$

$\Leftrightarrow (\forall (x, y) \in I^2) ; x * y \in I$

إن \* قانون تركيب داخلي في  $I$ .

1 ب

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من  $I$

لدينا :  $x * y = \frac{xy}{xy + (1 - x)(1 - y)}$   
 $= \frac{yx}{yx + (1 - y)(1 - x)}$   
 $= y * x$

إن \* قانون تبادلي في  $I$ .

لتكن  $x$  و  $y$  و  $z$  ثلاثة عناصر من  $I$ .

لدينا :  $x * (y * z) = \frac{x(y * z)}{x(y * z) + (1 - x)(1 - (y * z))}$   
 $= \frac{xyz}{xyz + (1 - x)(1 - y)(1 - z)}$

و بنفس الطريقة نحسب  $(x * y) * z$  نحصل على :

$(x * y) * z = \frac{xyz}{xyz + (1 - x)(1 - y)(1 - z)} = x * (y * z)$

و بالتالي : \* قانون تجميعي في  $I$ .

1 ج

ليكن  $e$  العنصر المحايد للقانون \* في  $I$ .

$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; x * e = e * x = x$

$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; \frac{xe}{xe + (1 - x)(1 - e)} = x$

نختزل بالعدد الغير المنعدم  $x$  نحصل على :

$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; \frac{e}{xe + (1 - x)(1 - e)} = 1$

$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; xe + 1 - e - x + ex = e$

$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; e = \frac{1}{2} \in ]0,1[$

إن القانون \* يقبل عنصرا محايدا في  $I$  و هو :  $\frac{1}{2}$ .

2

حصلنا لحد الآن على ما يلي :

- $I = ]0,1[$  مجموعة غير فارغة
- \* قانون تركيب داخلي في  $I$ .
- \* يقبل  $\frac{1}{2}$  كعنصر محايد في  $I$ .
- \* تبادلي و تجميعي في  $I$ .

إن لكي تكون  $(I, *)$  زمرة تبادلية يكفي أن نبين أن :

كل عنصر  $x$  يقبل مائلا بالقانون \* في المجموعة  $I$ .

ليكن  $x'$  مائل  $x$  في المجموعة  $I$  بالنسبة للقانون \*

إن :  $x * x' = x' * x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{xx'}{xx' + (1 - x)(1 - x')} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x' = (1 - x)$

بما أن :  $x \in I$  فإن  $0 < x < 1$

إن :  $0 < 1 - x < 1$

و منه  $(1 - x)$  هو مائل  $x$  بالنسبة لـ \* في  $I$ .

و بالتالي :  $(I, *)$  زمرة تبادلية.

3 أ

لدينا  $H = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$

إن :  $H$  جزء غير فارغ من  $\mathbb{R}_+^*$

لأن :  $2^n \in \mathbb{R}_+^*$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$

ليكن  $2^m$  و  $2^n$  عنصرين من  $H$



■ 2 (i)

نضع :  $d = (x + 1) \wedge 18$  إذن حسب (Bezout) :

$$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 ; d = 18u + (x + 1)v$$

لدينا :  $10^{x+1} \equiv 1[19]$  إذن :  $(10^{x+1})^v \equiv 1^v[19]$

(1) يعني :  $10^{(x+1)v} \equiv 1[19]$

و لدينا كذلك :  $10^{18} \equiv 1[19]$  إذن :  $10^{18u} \equiv 1^u[19]$

(2) يعني :  $10^{18u} \equiv 1[19]$

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$10^{18u} \times 10^{v(x+1)} \equiv 1[19]$$

يعني :  $10^{18u+v(x+1)} \equiv 1[19]$

و بالتالي :  $10^d \equiv 1[19]$

■ 2 (b)

لدينا :  $d = 18 \wedge (x + 1)$

إذن :  $d \setminus 18$

و منه :  $d \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$$\begin{cases} 10 \equiv 10[19] \\ 10^2 \equiv 5[19] \\ 10^3 \equiv 12[19] \\ 10^6 \equiv 11[19] \\ 10^9 \equiv 18[19] \\ 10^{18} \equiv 1[19] \end{cases} \text{ و لدينا :}$$

و بالتالي :  $d = 18$

■ 2 (c)

لدينا :  $18 = 18 \wedge (x + 1)$

إذن :  $18 / (x + 1)$

و بما أن :  $18 / (-18)$

فإن :  $18 / (x + 1) - 18$

أي :  $18 / (x - 17)$

و منه :  $x \equiv 17[18]$

لدينا :  $2^n \times (2^m)^{-1} = 2^{n-m} \in H$

إذن :  $(H, \times)$  زمرة جزئية للزمرة  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ .

■ 3 (b)

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من  $H$ .

$$\begin{aligned} \varphi(x) * \varphi(y) &= \left( \frac{1}{1+x} \right) * \left( \frac{1}{1+y} \right) \\ &= \frac{1}{(1+x)(1+y)} \\ &= \frac{1}{(1+x)(1+y) + \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \left(1 - \frac{1}{1+y}\right)} \\ &= \frac{1}{(1+x)(1+y)} \times \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} \\ &= \frac{1}{1+xy} = \varphi(xy) \end{aligned}$$

إذن  $\varphi$  تشاكل من  $(H, \times)$  نحو  $(I, *)$ .

■ 3 (c)

ليكن  $2^n$  عنصرا من  $H$ .

$$\varphi(2^n) = \frac{1}{1+2^n} \in K$$

$$\Leftrightarrow \varphi(H) = K$$

لدينا :  $\varphi$  تشاكل من  $(H, \times)$  نحو  $(I, *)$ .

و نعلم أن التشاكل يحافظ على بنية الزمرة.

و لدينا كذلك  $(H, \times)$  زمرة جزئية لـ  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  حسب السؤال (3) i

إذن  $(\varphi(H), \times)$  زمرة جزئية للزمرة  $(I, *)$

و بالتالي :  $(K, *)$  زمرة جزئية للزمرة  $(I, *)$ .

**التمرين الثاني : (2,5 ن)**

■ 1 (i)

لدينا :  $10^x \equiv 2[19]$

نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد 10 نجد :  $10^{x+1} \equiv 20[19]$

من جهة أخرى لدينا :  $20 \equiv 1[19]$

إذن :  $10^{x+1} \equiv 1[19]$

■ 1 (b)

لدينا 19 عدد أولي.

إذن حسب مبرهنة (Fermat) :

$$(\forall a \wedge 19 = 1) ; a^{19-1} \equiv 1[19]$$

من أجل  $a = 10$  لدينا  $10 \wedge 19 = 1$  إذن :  $10^{19-1} \equiv 1[19]$

أي :  $10^{18} \equiv 1[19]$

التمرين الثالث : (4 ن)

الجزء الأول

1 ■

تعويض سهل يمنحك نصف نقطة مجانية.

2 ■

ننشر التعبير :  $(z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$  نحصل على :

$$(z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 + (\alpha + 2i)z^2 + (\beta + 2i\alpha)z + 2i\beta$$

و منه نستنتج حسب مبدأ مقابلة معاملات الحدود من نفس الدرجة أن :

$$\begin{cases} 2i\beta = -10(1 + i) \\ \alpha + 2i = -(1 + 2i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -(1 + 4i) \\ \beta = 5i - 5 \end{cases}$$

3 ■

ليكن  $(x + iy)$  جذرا مربعا للعدد العقدي  $(5 - 12i)$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = 5 - 12i \\ |x + iy| = \sqrt{5^2 + 12^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2) + 2ixy = 5 - 12i \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2) = 5 \\ xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ أو } x = 3 \\ y = 2 \text{ أو } y = -2 \end{cases}$$

إذن الجذران المربعان للعدد العقدي  $5 - 12i$  هما :  $(3 - 2i)$  و  $(-3 + 2i)$

3 ■

لنحل في  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية :

$$(z + 2i)(z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i) = 0$$

يجب إذن حل المعادلة التالية أولا :  $z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i = 0$

$$\Delta = (1 + 4i)^2 - 4(-5 + 5i) = 5 - 12i = (3 - 2i)^2$$

إذن :  $z_1 = -1 + 3i$  و  $z_2 = 2 + i$

و بالتالي : المعادلة  $(E)$  تقبل ثلاث حلول مختلفة و هي :

$$-1 + 3i \text{ و } 2 + i \text{ و } -2i$$

الجزء الثاني

1 ■

$$\frac{a - c}{b - c} = \frac{-1 + 3i - 2 - i}{-2i - 2 - i} = \frac{3 - 2i}{2 + 3i} = -i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$$

لدينا :

$$(1) \quad \left( \overline{CB}, \overline{CA} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \quad \text{و منه :}$$

$$\left| \frac{a - c}{b - c} \right| = |-i| = 1 \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

$$(2) \quad \frac{CA}{CB} = 1 \quad \text{إذن :}$$

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث  $ABC$  مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في  $C$ .

2 ■

نضع :  $M(z)$  و  $M_1(z_1)$  و  $M_2(z_2)$

$$\mathcal{R}_1(M) = M_1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{cases} \Leftrightarrow (z_1 - b) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - b) \\ \Leftrightarrow (z_1 + 2i) = \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)(z + 2i) \\ \Leftrightarrow z_1 = \left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)z - \sqrt{3} - i \end{cases}$$

2 ■

$$\mathcal{R}_2(M) = M_2 \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{cases} \Leftrightarrow (z_2 - a) = e^{-\frac{2i\pi}{3}}(z - a) \\ \Leftrightarrow (z_2 + 1 - 3i) = \left( \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)(z + 1 - 3i) \\ \Leftrightarrow z_2 = -\left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)z - (1 - 3i) \left( \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \right) \end{cases}$$

2 ■

لدينا  $I$  هي منتصف القطعة  $[M_1M_2]$ .

$$\begin{cases} \Leftrightarrow aff(I) = \frac{z_1 + z_2}{2} \\ \Leftrightarrow aff(I) = -\sqrt{3} - i - \frac{(1 - 3i)(3 + i\sqrt{3})}{2} \\ \Leftrightarrow aff(I) = \text{constante complexe} \end{cases}$$

إذن  $aff(I)$  عدد عقدي ثابت.

أي :  $I$  نقطة ثابتة في المستوى.



التمرين الرابع : (6 ن)

1 ■

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$$

2 (i) ■

ليكن  $x$  عنصرا من  $]0, +\infty[$

لدينا  $f$  قابلة للإشتقاق على  $]0, +\infty[$  لأنها مجموع دالتين

قابلتين للإشتقاق على  $]0, +\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad \text{و لدينا :}$$

إن  $f$  دالة تزايدية قطعاً على  $]0, +\infty[$

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | 0         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f$     | $-\infty$ | $+\infty$ |

2 (b) ■

لدينا  $f$  دالة متصلة و تزايدية قطعاً على  $]0, +\infty[$

إن  $f$  تقابل من  $]0, +\infty[$  نحو صورته  $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

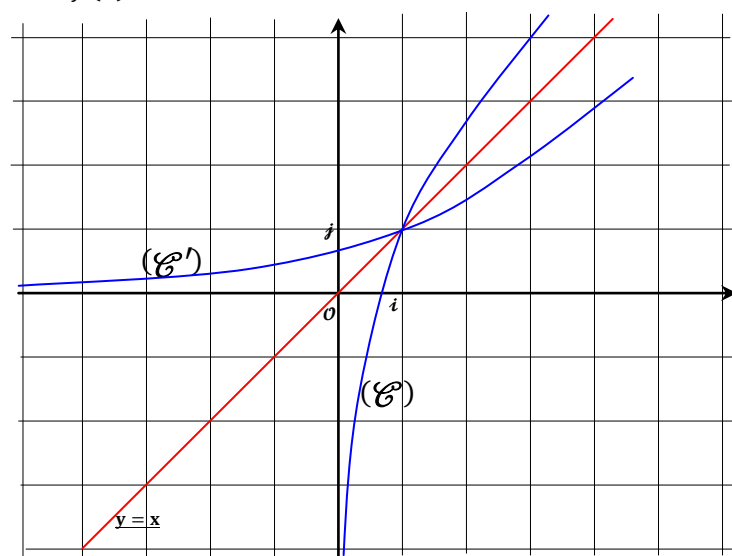
و تقابله العكسي  $f^{-1}$  دالة متصلة و تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$ .

|          |           |           |
|----------|-----------|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f^{-1}$ |           | $+\infty$ |
|          | 0         |           |

3 ■

$$f(1) = 1 + \ln 1 = 1$$

$$f(e) = e + \ln e = e + 1 \approx 3,72$$



4 (i) ■

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx \quad \text{لنحسب التكامل :}$$

من أجل ذلك نضع :  $t = f^{-1}(x)$  إذن :  $x = f(t)$

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) \quad \text{و منه :}$$

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx = \int_1^e t f'(t) dt \quad \text{إذن :}$$

$$= [t f(t)]_1^e - \int_1^e f(t) dt$$

$$= [t f(t)]_1^e - \left[ \frac{t^2}{2} + t \ln t - t \right]_1^e$$

$$= e^2 + e - 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^2 + 2e - 3}{2} \approx 4,9$$

4 (b) ■

نضع  $A$  هي مساحة الحيز المذكور في السؤال إذن :

$$A = \int_1^{e+1} |x - f^{-1}(x)| dx$$

$$\Leftrightarrow A = \int_1^{e+1} x dx - \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$$

$$\Leftrightarrow A = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^{e+1} - \left( \frac{e^2 + 2e - 3}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = \left( \frac{e^2 + 2e}{2} \right) - \left( \frac{e^2 + 2e - 3}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{3}{2}$$



■ 6 ب

لدينا :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n \geq x_n$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{x_n}{n} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \ln(x_n) - \ln(n) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \underbrace{x_n + \ln(x_n)}_n - \ln(n) &\leq x_n \\ \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n - \ln(n) &\leq x_n \end{aligned}$$

ملاحظة :

لدينا :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \ln n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = (+\infty)(1 - 0) = +\infty$$

إذن :  $n - \ln(n) \leq x_n$

$\nearrow$

$+\infty$

و هذا دليل آخر على أن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

■ 6 ج

لدينا :  $n - \ln n \leq x_n$

إذن :  $\frac{n - x_n}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$

و منه :  $\left| \frac{n - x_n}{n} \right| \leq \frac{\ln n}{n}$

و بما أن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln n}{n} \right) = 0$

فإن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n - x_n}{n} \right| = 0$

أي :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n - n}{n} \right) = 0$

و لدينا حسب السؤالين (أ) و (ب) :  $n - \ln n \leq x_n \leq n$

إذن :  $\frac{n - \ln n}{n - \ln n} \leq \frac{x_n}{n - \ln n} \leq \frac{n}{n - \ln n}$

يعني :  $1 \leq \frac{x_n}{n - \ln n} \leq \frac{n}{n - \ln n}$

و بما أن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n - \ln n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{\ln n}{n}} \right) = 1$

فإن :  $1 \leq \frac{x_n}{n - \ln n} \leq \frac{n}{n - \ln n}$

$\nearrow$

$\searrow$

$\boxed{1}$   $\boxed{1}$

و بالتالي :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{n - \ln n} \right) = 1$

■ 5 أ

نضع :  $h(x) = x + \ln x - n$

لدينا  $h$  دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على  $]0, +\infty[$

و لدينا كذلك :  $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$

إذن  $h$  دالة تزايدية قطعاً على المجال  $]0, +\infty[$

و منه  $h$  تقابل من  $]0, +\infty[$  نحو صورته  $]-\infty, +\infty[$

و بما أن :  $0 \in ]-\infty, +\infty[$  فإنه يمتلك سابقاً واحداً  $x_n$  بالتقابل  $h$ .

يعني :  $\exists ! x_n \in ]0, +\infty[ ; h(x_n) = 0$

بتعبير آخر :  $\exists ! x_n \in ]0, +\infty[ ; x_n + \ln(x_n) = n$

■ 5 ب

$x_1$  هو حل المعادلة :  $x + \ln x = 1$

إذن :  $x_1 = 1$

و لدينا :  $f(x_n) = n$  إذن :  $x_n = f^{-1}(n)$

و بما أن :  $f^{-1}$  دالة تزايدية قطعاً فإن :

$x_{n+1} = f^{-1}(n+1) > f^{-1}(n) = x_n$

(1)

إذن من النتيجة  $x_{n+1} > x_n$  نستنتج أن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية تزايدية قطعاً.

نفترض أن المتتالية  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  مكبورة بعدد حقيقي  $A$

إذن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n \leq A$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : f(x_n) \leq f(A) = B$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : n \leq B$

$\Leftrightarrow$  المجموعة  $\mathbb{N}$  مكبورة بالعدد  $B$

$\Leftrightarrow$  مستحيل

إذن :  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  غير مكبورة (2)

من (1) و (2) نستنتج أن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متباعدة.

أي :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

■ 6 أ

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow n \geq 1$

$\Leftrightarrow \ln n \geq 0$

$\Leftrightarrow n + \ln n \geq n$

$\Leftrightarrow f(n) \geq f(x_n)$

إذن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(n) \geq f(x_n)$

و بما أن  $f^{-1}$  دالة تزايدية فإن :  $f^{-1}(f(n)) \geq f^{-1}(f(x_n))$

و بالتالي :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n \geq x_n$



التمرين الخامس : (4 ن)

1 ■

لدينا دالة متصلة وقابلة للإشتقاق على  $]0,1[$  .

ولدينا :  $\forall x \in ]0,1[ ; f'_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} > 0$

إذن : دالة  $f_n$  تزايدية قطعاً على  $]0,1[$

و منه  $f_n$  تقابل من  $]0,1[$  نحو  $]f_n(0), f_n(1)[$

لدينا :  $f_n(0) = -1 < 0$

و  $f_n(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 0$

إذن :  $0 \in ]f_n(0), f_n(1)[$

و منه :  $0$  يمتلك سابقاً واحداً  $\alpha_n$  بالتقابل  $f_n$

يعني :  $\exists ! \alpha_n \in ]0,1[ ; f_n(\alpha_n) = 0$

2 ■

لدينا :  $f_{n+1}(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\Leftrightarrow f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

و بما أن :  $x \in ]0,1[$  فإن :  $\frac{x^{n+1}}{n+1} > 0$

و منه :  $\forall x \in ]0,1[ ; f_{n+1}(x) > f_n(x)$

و لدينا كذلك :  $\alpha_{n+1} \in ]0,1[$  إذن :  $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1})$

و نعلم أن :  $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = f_n(\alpha_n) = 0$

إذن :  $f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})$

و بما أن  $f_n$  دالة تزايدية قطعاً على  $]0,1[$  فإن :  $\alpha_n > \alpha_{n+1}$

إذن  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  متتالية تناقصية قطعاً.

و لدينا :  $0 < \alpha_n < 1$  ;  $(\forall n \geq 2)$

يعني أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  مصغورة بالعدد 0

و بالتالي :  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  متتالية متقاربة .

3 ■

لدينا  $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي  $t$  المخالف لـ 1 .

إذن :  $1 + t + \dots + t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$

3 ■

لدينا من أجل :  $t \neq 1$

$$1 + t + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

إذن :

$$\int_0^{\alpha_n} (1 + t + \dots + t^{n-1}) dt = \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

4 ■

$$\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

و نعلم أن :  $f_n(\alpha_n) = 0$

$$-1 + \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = 0 \quad \text{يعني :}$$

$$1 = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt \quad \text{إذن :}$$

$$1 + \ln(1 - \alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt \quad \text{و منه :}$$

4 ■

ننطلق من الكتابة :  $0 \leq t \leq \alpha_n$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \alpha_n \leq 1 - t$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \alpha_n} \geq \frac{1}{1 - t} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{t^n}{1 - t} \leq \frac{t^n}{1 - \alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \frac{1}{(1 - \alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} t^n dt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \left( \frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left( \frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} \right)$$

و بما أن :  $\alpha_n^{n+1} < 1$

$$\left( \frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left( \frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} \right) \leq \left( \frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left( \frac{1}{n+1} \right) \quad \text{فإن :}$$

و بالتالي :

$$(\forall n \geq 2) ; 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \left( \frac{1}{1 - \alpha_n} \right) \left( \frac{1}{n+1} \right)$$





■ 4 ج

لدينا :

$$0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt \leq \underbrace{\left( \frac{1}{1-\alpha_n} \right)}_{+\infty} \underbrace{\left( \frac{1}{n+1} \right)}_{+\infty}$$

$\swarrow$   $\searrow$   
 $0$   $0$

إذن :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha_n} \left( \frac{t^n}{1-t} \right) dt = 0$$

و منه :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \ln(1 - \alpha_n)) = 0$$

نضع :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$$

إذن :

$$1 + \ln(1 - \ell) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 - \ell) = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{1 - \ell}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \ell} = e$$

$$\Leftrightarrow e(1 - \ell) = 1$$

$$\Leftrightarrow e - e\ell = 1$$

$$\Leftrightarrow \ell = \frac{e - 1}{e}$$

$$\Leftrightarrow \ell = 1 - e^{-1}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

