هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الامتحانات

الامتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2009

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

## التمرين الأول : ( 4,5 ن )

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة المصفوفات $(x,y)$ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث $M(x,y)=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & \frac{1}{x}\end{pmatrix}$ مع $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ .

0,25 ن ① ⓘ بين أن $\mathcal{F}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ .

0,50 ن ⓑ بين أن $(\mathcal{F},\times)$ زمرة غير تبادلية .

1,00 ن ② لتكن $G$ مجموعة المصفوفات $M(x,0)$ من $\mathcal{F}$ حيث $x\in\mathbb{R}^*$

بين أن $G$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{F},\times)$ .

0,50 ن ③ ليكن $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ .

نزود المجموعة $E$ بقانون التركيب الداخلي $\perp$ المعرف بما يلي :

$$(\forall(x,y)\in E)\ ;\ (\forall(a,b)\in E)\ :\ (x,y)\perp(a,b)=\left(ax\ ,bx+\frac{y}{a}\right)$$

نعتبر التطبيق :

$$\varphi\ :\ (\mathcal{F},\times)\to(E,\perp)$$
$$M(x,y)\to\varphi\big(M(x,y)\big)=(x,y)$$

0,25 ن ⓘ أحسب : $(2,3)\perp(1,1)$ و $(1,1)\perp(2,3)$ .

0,50 ن ⓑ بين أن $\varphi$ تشاكل تقابلي .

0,50 ن ⓒ استنتج بنية $(E,\perp)$ .

## التمرين الثاني : ( 4,0 ن )

$m$ عدد عقدي يخالف 1 .

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ . $(E)\ :\ z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$

0,25 ن ① ⓘ تحقق أن مميز المعادلة $(E)$ هو : $\Delta=[(1+i)(m-1)]^2$ .

0,25 ن ⓑ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ .

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي $m$ لكي يكون جداء حلي المعادلة $(E)$ يساوي 1 — 0,50 ن

② نضع $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$ . — 1,00 ن

**(II)** في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، أكتب $z_1$ و $z_2$ على الشكل المثلثي .

المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ .

نعتبر النقط $M$ و $M_1$ و $M_2$ التي ألحاقها على التوالي هي : $m$ و $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$ .

① حدد مجموعة النقط $M$ بحيث تكون النقط $M$ و $M_1$ و $M_2$ نقط مستقيمية. — 0,50 ن

② أ) بين أن التحويل $\mathcal{R}$ الذي يربط كل نقطة $M$ لحقها $z$ بالنقطة $M'$ التي لحقها $z' = 1 - iz$ — 0,50 ن
هو دوران ينبغي تحديد لحق مركزه $\Omega$ و قياسا لزاويته.

ب) بين أن العدد العقدي : $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان : $\Re e(m) + \Im m(m) = 1$ — 0,50 ن

( $\Re e(m)$ هو الجزء الحقيقي للعدد $m$ و $\Im m(m)$ هو جزءه التخيلي )

ج) استنتج مجموعة النقط $M$ بحيث تكون النقط $\Omega$ و $M$ و $M_1$ و $M_2$ متداورة . — 0,50 ن

## التمرين الثالث : ( 3,0 ن )

لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$ نضع : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ .

① أ) تحقق أن $a_n$ عدد زوجي لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$ . — 0,25 ن

ب) حدد قيم $n$ التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0[3]$ . — 0,50 ن

② ليكن $p$ عددا أوليا بحيث $p > 3$ .

أ) بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$ . — 0,75 ن

ب) بين أن $p$ يقسم $a_{p-2}$ . — 0,75 ن

ج) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي $q$ يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم $n$ بحيث $a_n \wedge q = q$ . — 0,50 ن

( $a_n \wedge q$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $a_n$ و $q$ ).

## التمرين الرابع : ( 10 ن )

$n$ عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية $f_n$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي .

$f_n(0) = 0$ و $(\forall x > 0)\ ;\ f_n(x) = x(1 - \ln x)^n$

**(I)** ليكن $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ .

① أ) بين أن الدالة $f_n$ متصلة على اليمين في 0 ( يمكن وضع $x = t^n$ ). — 0,50 ن

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f_n$ على اليمين في 0 . — 0,25 ن

ج) حدد النهايات التالية : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ — 1,00 ن

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

② (أ) أدرس تغيرات الدالة $f_1$ . — 0,50 ن

(ب) أدرس تغيرات الدالة $f_2$ . — 0,50 ن

③ (أ) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ . — 0,25 ن

(ب) أنشئ المنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ (نقبل $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_2)$ ) ( نأخذ : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$ ) — 0,50 ن

**(II)** نعتبر الدالة العددية $F$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $]-\infty, 0]$ بما يلي : $F(x) = \int_{e^x}^{1} \frac{f_1(t)}{1+t^2}\,dt$

① (أ) بين أن الدالة $F$ قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty, 0[$ . وأن : $(\forall x < 0)\ ;\ F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{(1+e^{2x})}$ — 0,50 ن

(ب) استنتج منحنى تغيرات الدالة $F$ على المجال : $]-\infty, 0]$ — 0,25 ن

② (أ) بين أن : $(\forall x < 0)\ ;\ \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt \le F(x) \le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt$ — 0,25 ن

(ب) تحقق أن الدالة : $x \to x^2\left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة $f_1$ على المجال $]0, +\infty[$ . — 0,25 ن

(ج) بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt = \frac{3}{4}$ — 0,25 ن

③ نفترض أن الدالة $F$ تقبل نهاية منتهية $\ell$ عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$ . — 0,25 ن

بين أن : $\frac{3}{8} \le \ell \le \frac{3}{4}$

**(III)** لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم $n$ نضع : $u_n = \int_1^e f_n(x)dx$

① (أ) بين أن : $(\forall n \ge 1)\ ;\ u_n \ge 0$ . — 0,50 ن

(ب) حدد إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1, e]$ . — 0,50 ن

(ج) بين أن : $(\forall n \ge 1)\ ;\ u_{n+1} \le u_n$ . — 0,25 ن

(د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة . — 0,25 ن

② (أ) بين أن : $(\forall n \ge 1)\ ;\ u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2}u_n$ — 0,50 ن

(ب) استنتج بـ $cm^2$ مساحة حيز المستوى المحصور بين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ و المستقيمين $x = 1$ و $x = e$ . — 0,50 ن

③ (أ) بين أن : $(\forall n \ge 2)\ ;\ \frac{1}{(n+1)} \le u_n \le \frac{1}{(n-1)}$ — 0,75 ن

(ب) حدد : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} nu_n$ — 0,50 ن

④ $a$ عدد حقيقي مخالف للعدد $u_1$ .

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي : $v_1 = a$ و $(\forall n \ge 1)\ ;\ v_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2}v_n$

و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم $n$ نضع : $d_n = |v_n - u_n|$ .

(أ) بين أن : $(\forall n \ge 1)\ ;\ d_n = \frac{n!}{2^{(n-1)}}d_1$ — 0,25 ن

(ب) بين أن : $(\forall n \ge 2)\ ;\ \frac{n!}{2} \ge 3^{n-2}$ — 0,25 ن

(ج) بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = +\infty$ — 0,25 ن

(د) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ متباعدة. — 0,25 ن

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma