

التمرين الأول : (3,25 ن)

■ 1 أ

لدينا E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأن : $M(0,0) \in E$.

ليكن γ و β عددين حقيقيين و $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

$$\begin{aligned} \gamma M(a,b) + \beta M(c,d) &= \gamma \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c & \sqrt{3}d \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma a + \beta c & \sqrt{3}(\gamma b + \beta d) \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}(\gamma b + \beta d) & \gamma a + \beta c \end{pmatrix} \\ &= M(\gamma a + \beta c, \gamma b + \beta d) \in E \end{aligned}$$

إذن :

$$(\forall \gamma, \beta \in \mathbb{R}), (\forall M(a,b), M(c,d)) : \gamma M(a,b) + \beta M(c,d) \in E$$

إذن : $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

■ 1 ب

من الواضح أن الأسرة (I, J) مولدة للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$.

لأن : $M(a,b) \in E$: $M(a,b) = aI + bJ$

لتكن $\alpha I + \beta J$ تأليفة خطية منعومة للمصفوفتين I و J .

$$\Leftrightarrow \alpha I + \beta J = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{3}\beta \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

إذن (I, J) أسرة حرة (أو مستقلة خطيا)

و بالتالي (I, J) أساس للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$.

■ 2 أ

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من الفضاء المتجهي E

لدينا : $M(a,b) \times M(c,d) = (aI + bJ) \times (cI + dJ)$

$$= acI + adJ + bcJ + bdJ^2$$

و لدينا :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$M(a,b) \times M(c,d) = (ac - bd)I + (ad + bc)J$$

$$= M(ac - bd, ad + bc) \in E$$

إذن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

■ 2 ب

ليكن $(a + ib)$ و $(c + id)$ عددين عقديين غير منعومين.

لدينا :

$$\begin{aligned} f((a + ib) \times (c + id)) &= f((ac - bd) + i(ad + bc)) \\ &= M((ac - bd), (ad + bc)) \\ &= M(a,b) \times M(c,d) \\ &= f(a + ib) \times f(c + id) \end{aligned}$$



إذن : f تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(E^*, \times)$.

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E^* .

لنحل المعادلة : $f(x + iy) = M(a,b)$

$$\Leftrightarrow M(x, y) = M(a, b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & \sqrt{3}y \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

إذن المعادلة $f(x + iy) = M(a,b)$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{C}^*$

إذن : f تقابل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(E^*, \times)$.

خلاصة : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(E^*, \times)$.

■ 3

نعلم أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

إذن : $(E, +)$ زمرة تبادلية (1)

و لدينا كذلك $(\mathbb{C}^*, \times)$ زمرة تبادلية.

إذن : $(E^*, \times)$ زمرة تبادلية لأن f تشاكل تقابلي (2).

بما أن الضرب $\times$ توزيعي بالنسبة للجمع في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و بما أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

(3) فإن $\times$ توزيعي بالنسبة للجمع في E

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $(E, +, \times)$ جسم تبادلي.

التمرين الثاني : (3,75 ن)

■ (I) ① (i)

بعد عملية النشر و التبسيط نحصل على :

$$\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$$

■ (I) ① (b)

$$\Delta = (a - \bar{a} - i)^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$z_1 = \frac{(i - a - \bar{a}) - (a - \bar{a} - i)}{2i} = 1 + ai \quad \text{إذن :}$$

$$z_2 = \frac{(i - a - \bar{a}) + (a - \bar{a} - i)}{2i} = \bar{a}i \quad \text{و}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة (G) تكتب على شكل :

$$\mathcal{S} = \{1 + ai, \bar{a}i\}$$

■ (II) ②

لدينا المعادلة (G) تقبل الحلين : $\bar{a}i$ و $1 + ai$.

إذا كان a حلا للمعادلة (G) فإن : $a = \bar{a}i$ أو $a = 1 + ai$.

يعني : $Re(a) + i Im(a) = Im(a) + i Re(a)$

أو : $(1 - Im(a)) + i Re(a) = Re(a) + i Im(a)$

إذن في كلتا الحالتين نحصل على : $Im(a) = Re(a)$.

عكسيا :

ليكن a عددا عقديا مكتوبا على شكل $a = r + ri$.

لدينا : $\bar{a}i = (r - ri)i = ri + r = a$.

إذن a حل للمعادلة (G) لأنه مكتوب على شكل $\bar{a}i$.

وبالتالي : $Im(a) = Re(a) \Leftrightarrow a \text{ حل لـ } (G)$.

■ (II) ① (i)

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{(1 + ai) - a}{i\bar{a} - a} \right)} = \frac{(1 - \bar{a}i) - \bar{a}}{-i\bar{a} - \bar{a}} = \frac{1 - i\bar{a} - \bar{a}}{-i\bar{a} - \bar{a}} = \frac{1 - \bar{a}(i + 1)}{-i\bar{a} - \bar{a}}$$



نضرب البسط و المقام في العدد العقدي $(-i)$ نحصل على :

$$\bar{z} = \frac{-i + \bar{a}(i - 1)}{-a + \bar{a}i}$$

■ 4

لنحل في E المعادلة : $J \times X^3 = I$.

$$\Leftrightarrow -J \times J \times X^3 = -J$$

$$\Leftrightarrow -J^2 \times X^3 = -J$$

$$\Leftrightarrow X^3 = -J$$

$$\Leftrightarrow (M(a, b))^3 = M(0, -1)$$

$$\Leftrightarrow (f(a + ib))^3 = f(-i)$$

$$\Leftrightarrow f((a + ib)^3) = f(-i)$$

$$\Leftrightarrow (a + ib)^3 = -i$$

لنحل إذن في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3 = -i$.

نضع : $z = re^{i\theta}$ إذن : $r^3 e^{3i\theta} = e^{-\frac{\pi i}{2}}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

من أجل $k = 0$ لدينا : $z_0 = e^{-\frac{\pi i}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

إذن المصفوفة $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ حل للمعادلة الأولى في E

إذا كان $k = 1$ فإن : $z_1 = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$

إذن المصفوفة $M(0, 1)$ حل للمعادلة الأولى في E

إذا كان $k = 2$ فإن : $z_2 = e^{\frac{7\pi i}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

إذن المصفوفة $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ حل للمعادلة الأولى في E

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة $J \times X^3 = I$ في E تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I - \frac{1}{2}J \right), (J), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}I - \frac{1}{2}J \right) \right\}$$

■ (2) ب

لدينا E هي منتصف القطعة $[BC]$.

$$z_E = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{i\bar{a} + ai + 1}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A} &= \frac{i(1-a) - (\bar{a} + ia + a)}{\frac{i\bar{a} + ai + 1}{2} - a} \quad \text{و لدينا :} \\ &= 2 \left(\frac{i - 2ai - \bar{a} - a}{i\bar{a} + ai + 1 - 2a} \right) \\ &= 2i \left(\frac{1 - 2a + \bar{a}i + ai}{i\bar{a} + ai + 1 - 2a} \right) \\ &= 2i \end{aligned}$$

$$(\#) \quad \frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A} = 2i \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A} \right) &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \Leftrightarrow \overline{(AE, B'C')} &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ \Leftrightarrow (AE) &\perp (B'C') \end{aligned}$$

$$\left| \frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A} \right| = 2 \quad (\#) \quad \text{و لدينا كذلك حسب النتيجة}$$

$$|z_{C'} - z_{B'}| = 2|z_E - z_A| \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow B'C' = 2AE$$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ (1) 1

$$35 \times 11 - 96 \times 4 = 1 \quad \text{لدينا :}$$

إذن : $(11, 4)$ حل خاص للمعادلة (E) .

■ (1) 2

$$35 \times 11 - 96 \times 4 = 1 \quad \text{لدينا حسب السؤال 1) :}$$

$$35 \wedge 96 = 1 \quad \text{إذن حسب مبرهنة Bezout :}$$

ليكن (u, v) الحل العام للمعادلة (E) .

$$\begin{cases} 35u - 96v = 1 \\ 35 \times 11 - 96 \times 4 = 1 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Rightarrow 35(u - 11) = 96(v - 4) \quad \otimes$$

■ (1) ب

ننتقل من كون $A(a)$ و $B(i\bar{a})$ و $C(1+ai)$ نقط مستقيمة.

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+ai) - a}{i\bar{a} - a} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{(1+ai) - a}{i\bar{a} - a} \right) = \frac{(1+ai) - a}{i\bar{a} - a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \bar{a}i) - \bar{a}}{-ia - \bar{a}} = \frac{(1+ai) - a}{i\bar{a} - a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \bar{a}i) - \bar{a}}{-ia - \bar{a}} = \frac{(i-a) - ai}{-\bar{a} - ai}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \bar{a}i) - \bar{a} = (i-a) - ai$$

$$\Leftrightarrow i(a - \bar{a}) + (a - \bar{a}) = (i-1)$$

$$\Leftrightarrow (a - \bar{a}) = \frac{(i-1)}{(i+1)}$$

$$\Leftrightarrow (2\Im(a))i = \frac{-2i}{-2} = i$$

$$\Leftrightarrow \Im(a) = \frac{1}{2}$$

■ (2) 1

ننتقل من الكتابة : $\mathcal{R}_1(B) = B'$

$$\Leftrightarrow (z_{B'} - z_A) = e^{-\frac{\pi}{2}i} (z_B - z_A)$$

$$\Leftrightarrow (b' - a) = -i(i\bar{a} - a)$$

$$\Leftrightarrow b' = \bar{a} + ia + a$$

بنفس الطريقة ننتقل من الكتابة : $\mathcal{R}_2(C) = C'$

$$\Leftrightarrow (z_{C'} - z_A) = e^{\frac{\pi}{2}i} (z_C - z_A)$$

$$\Leftrightarrow (c' - a) = i(1 + ai - a)$$

$$\Leftrightarrow c' = i(1 - a)$$

■ (II) ②

لدينا : $x \equiv 2^{11}[97]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^{35} &\equiv 2^{11 \times 35}[97] \\ \Rightarrow x^{35} &\equiv 2^{96 \times 4 + 1}[97] \\ \Rightarrow x^{35} &\equiv 2^{96 \times 4} \times 2[97] \quad (*) \end{aligned}$$



و نعلم أن 97 و 2 عددان أوليان :

إذن حسب *Fermat* : $2^{96} \equiv 1[97]$

يعني : $2^{96 \times 4} \equiv 1[97]$ أي : $2^{96 \times 4} \times 2 \equiv 2[97]$

بالرجوع إلى المتوافقة (*) نحصل على : $x^{35} \equiv 2[97]$

و بالتالي : x حل للمعادلة (F).

■ (II) ③

في الأسئلة السابقة تمكنا من إثبات التكافؤ التالي :

$$x^{35} \equiv 2[97] \Leftrightarrow x \equiv 2^{11}[97]$$

نستعين بالآلة الحاسبة للحصول على :

$$2^{11} = 2048 \quad \text{و منه كذلك :} \quad 2^{11} \equiv 11[97]$$

إذن : $x \equiv 11[97]$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) : x = 97k + 11$$

و منه : مجموعة حلول المعادلة (F) تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} = \{97k + 11 ; k \in \mathbb{Z}\}$$

التمرين الرابع : (10 ن)

■ (I) ①

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - e^{-x^2} - 2x) = 0$$

يعني أن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب لـ f بجوار $+\infty$

■ (I) ②

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_+$

$$f'(x) = 2 + 2xe^{-x^2} > 0$$

إذن f دالة تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}_+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - e^{-x^2}) = +\infty$$

نستنتج إذن جدول تغيرات f كما يلي :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	-1	$+\infty$

إذن : $35 / 96(v - 4)$

و بما أن : $35 \wedge 96 = 1$

فإنه حسب *Gauss* : $35 / (v - 4)$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) : v = 35k + 4$$

نعوض v بقيمته في المتساوية $\otimes$ نحصل على :

$$35(u - 11) = 96 \times 35k$$

إذن : $u = 96k + 11$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} = \{(96k + 11 ; 35k + 4) ; k \in \mathbb{Z}\}$$

■ (II) ①

لدينا 2 و 3 و 5 و 7 هي الأعداد الأولية التي مربعاتها

أصغر من 97 و لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 97

إذن : 97 عدد أولي .

ليكن : $x \wedge 97 = d$ إذن : $d / 97$

و بما أن 97 عدد أولي فإنه يمتلك قاسمين صحيحين طبيعيين

فقط و هما 1 و 97 .

و منه : $d = 1$ أو $d = 97$

نفترض أن : $d = 97$

لدينا $x \wedge 97 = d$ و منه : d / x

و منه : $x \equiv 0[97]$ أي : $x^{35} \equiv 0[97]$

إذن : x ليس حلاً للمعادلة (F) و هذا يتناقض مع المعطيات الصريحة.

و بالتالي : $d = 1$ و منه : $x \wedge 97 = 1$

■ (II) ②

لدينا : $x \wedge 97 = 1$ و 97 عدد أولي .

إذن حسب مبرهنة (*Fermat*) : $x^{97-1} \equiv 1[97]$

أي : $x^{96} \equiv 1[97]$

■ (II) ③

نعلم أن (11,4) حل للمعادلة (E).

و نعلم كذلك أن : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$

لدينا x حل للمعادلة (F).

$$(1) \quad x^{35 \times 11} \equiv 2^{11}[97] \quad \text{و منه :} \quad x^{35} \equiv 2[97]$$

و لدينا كذلك حسب نتيجة السؤال ① : $x^{96} \equiv 1[97]$

$$(2) \quad x^{-96 \times 4} \equiv 1[97] \quad \text{إذن :}$$

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفاً بطرف نحصل على :

$$x^{35 \times 11 - 96 \times 4} \equiv 2^{11}[97]$$

و بالتالي : $x^1 \equiv 2^{11}[97]$

■ (II) 1 (ب)

لدينا : $0 < c < x$ إذن : $-x^2 < -c^2 < 0$

و منه : $e^{-x^2} < e^{-c^2} < 1$

باستعمال نتيجة السؤال 1 (أ) نحصل على :

$$(\forall x > 0) : \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt < 1$$

ومن أجل $x = 1$ نحصل على : $\int_0^1 e^{-t^2} dt < 1$

■ (II) 2 (أ)

لدينا : $\int_0^\alpha f(t) dt = \int_0^\alpha (2t - e^{-t^2}) dt$

$$= 2 \int_0^\alpha t dt - \int_0^\alpha e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{2\alpha^2}{2} - \int_0^\alpha e^{-t^2} dt$$

$$= \alpha^2 - \int_0^\alpha e^{-t^2} dt$$

$$= g(\alpha)$$

■ (II) 2 (ب)

لدينا : $t \rightarrow e^{-t^2}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على $[0, x]$ بحيث $x > 0$

إذن فهي تقبل دالة أصلية h على المجال $[0, x]$

$$\text{بحيث : } h'(x) = e^{-x^2}$$

لدينا g دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+$ لأنها فرق دالتين قابلتين للإشتقاق و هما h و $x \rightarrow x^2$.

$$\text{و لدينا : } g(x) = x^2 - h(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2x - h'(x)$$

$$= 2x - e^{-x^2}$$

$$= f(x)$$



■ (I) 1 (ج)

لدينا : f تزايدية قطعاً على : $[0, +\infty[$

إذن : f تزايدية قطعاً على $]0, 1[$

و منه : f تقابل من المجال $]0, 1[$ نحو صورته $]-1, 2 - \frac{1}{e}[$

و لدينا : $1,6 \approx 2 - \frac{1}{e}$ إذن : $0 \in]-1, 2 - \frac{1}{e}[$

و بالتالي : 0 يمتلك سابقاً واحداً في المجال $]0, 1[$ بالتقابل f

يعني : $\exists! \alpha \in]0, 1[: f(\alpha) = 0$

■ (I) 1 (د)

لدينا : $f(\alpha) = 0$ و $\alpha \in]0, 1[$

إذا كان $0 < x < \alpha$ فإن : $f(x) < f(\alpha)$ لأن f تزايدية.

و منه : $f(x) < 0$

إذا كان $\alpha < x < 1$ فإن : $f(x) > f(\alpha)$ لأن f تزايدية.

و منه : $f(x) > 0$

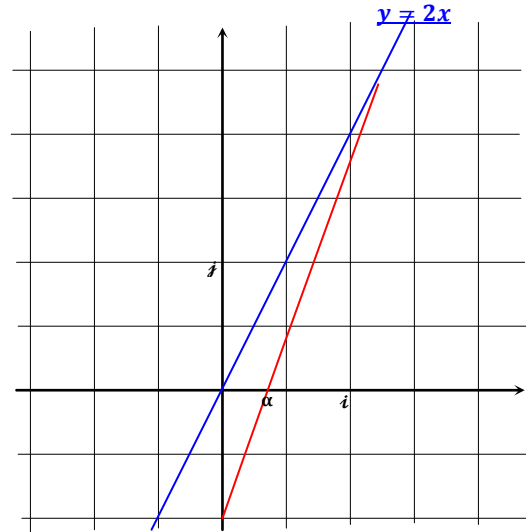
و بالتالي f موجبة قطعاً على المجال $]\alpha, 1[$

و f سالبة قطعاً على المجال $]0, \alpha[$

و f تتعدم في α

■ (I) 1 (د)

إنشاء : $(\mathcal{G})$



■ (II) 1 (أ)

لدينا : $t \rightarrow e^{-t^2}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على $[0, x]$

إذن فهي تقبل دالة أصلية h على المجال $[0, x]$ بحيث : $h'(x) = e^{-x^2}$

و منه h متصلة وقابلة للإشتقاق على $[0, x]$

إذن حسب مبرهنة التزايديات المنتهية :

$$(\exists c \in]0, x[) : \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(c)$$

$$\Leftrightarrow (\exists c \in]0, x[) : \frac{1}{x} (h(x) - h(0)) = e^{-c^2}$$

$$\Leftrightarrow (\exists c \in]0, x[) : \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$$

■ (II) 2 (ج)

لدينا f موجبة على المجال $]\alpha, 1[$

و منه : $(\forall x \in]\alpha, 1[) : g'(x) = f(x) > 0$

يعني : g دالة تزايدية قطعاً على $]\alpha, 1[$

و منه g تقابل من المجال $]\alpha, 1[$ نحو المجال $]g(\alpha), g(1)[$

و لدينا كذلك f سالبة على المجال $[0, \alpha]$

إذن : $(\forall x \in [0, \alpha]) : g'(x) = f(x) < 0$

يعني : g دالة تناقصية على المجال $[0, \alpha]$

و بما أن : $\alpha > 0$ فإن : $g(\alpha) < g(0)$

أي : $(1) \boxed{g(\alpha) < 0}$

ومن السؤال (II) 1 (ب) نستنتج أن : $1 - \int_1^1 e^{-t^2} dt > 0$

يعني : $(2) \boxed{g(1) > 0}$

من (1) و (2) نستنتج أن $0 \in]g(\alpha), g(1)[$

إذن الصفر يمتلك سابقاً واحداً β في المجال $]\alpha, 1[$ بالتقابل f

أو بتعبير أنيق : $(\exists! \beta \in]\alpha, 1[) : f(\beta) = 0$

■ (II) 3 (i)

لدينا حسب السؤال (II) 1 (i)

$$(\forall x > 0) (\exists c \in]0, x[) : \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$$

و لدينا كذلك : $0 < c < x$

إذن : $e^{-x^2} < e^{-c^2} < 1$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2} < \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt < 1 ; x > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2} < \varphi(x) < 1 ; x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \quad \text{بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1 = \varphi(0) \quad \text{فإنه بالضرورة :}$$

و بالتالي : φ دالة متصلة على اليمين في الصفر.

■ (II) 3 (ب)

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{e^{-t^2}}_v dt ; x > 0 \quad \text{لدينا :}$$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{x} \left([uv] - \int uv' \right) \\ &= \frac{1}{x} \left([te^{-t^2}]_0^x + 2 \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \right) \\ &= e^{-x^2} + \frac{2}{x} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

■ (II) 3 (ج)

$$\psi(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \quad \text{نضع :}$$

$$\psi'(x) = x^2 e^{-x^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$\varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2\psi(x)}{x} \quad \text{ننطق من :}$$

$$\varphi'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{2x^3 e^{-x^2} - 2\psi(x)}{x^2} \quad \text{إذن :}$$

$$= -2xe^{-x^2} + 2xe^{-x^2} - \frac{2}{x^2} \psi(x)$$

$$= -\frac{2}{x^2} \psi(x)$$

$$= -\frac{2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$$



■ (II) 3 (د)

انطلاقاً من تعبير $\varphi'(x)$ نستنتج أن : $\varphi'(x) < 0$: $(\forall x > 0)$

إذن φ تناقصية على $\mathbb{R}_*^+$

و بالخصوص φ متصلة و تناقصية على المجال $[0, 1]$

ليكن : $x \in [0, 1]$ يعني : $0 \leq x \leq 1$

$$\Rightarrow \varphi(0) \geq \varphi(x) \geq \varphi(1)$$

$$\Rightarrow 1 \geq \varphi(x) \geq \int_0^1 e^{-t^2} dt > 0$$

إذن : $\varphi(x) \in [0, 1]$

و بالتالي : $\varphi([0, 1]) \subset [0, 1]$

■ (II) 4 (أ)

لدينا : $-t^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow e^{-t^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow t^2 e^{-t^2} \leq t^2$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \int_0^x t^2 dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \frac{x^3}{3}$$

■ (II) 4 (ب)

لدينا : $0 \leq \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \frac{x^3}{3}$

$$0 \leq \left| \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \right| \leq \left| \frac{x^3}{3} \right| \quad \text{إذن :}$$

$$\left| \frac{2}{x^2} \right| \times \left| \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \right| \leq \left| \frac{x^3}{3} \right| \times \left| \frac{2}{x^2} \right| \quad \text{و منه :}$$

$$|\varphi'(x)| = \left| \frac{2}{x^2} \right| \times \left| \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \right| \quad \text{و نعلم أن :}$$

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3} |x| \quad \text{إذن :}$$

و بما أن : $0 < x < 1$ فإن : $|x| < 1$

$$\text{و بالتالي : } (\forall x \in]0,1[; |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3})$$

■ (II) 4 (ج)

ليكن $x > 0$

ننطلق من الكتابة : $\varphi(x) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 0$$



■ (II) 5 (أ)

نستعمل في هذا السؤال البرهان بالترجع

من أجل $n = 0$ لدينا : $0 \leq u_0 \leq 1$

نفترض أن : $0 \leq u_n \leq 1$; $(\forall n \in \mathbb{N})$



$$\Leftrightarrow u_n \in [0,1]$$

$$\Leftrightarrow \varphi(u_n) \in [0,1]$$

لأن : $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$

■ (II) 5 (ب)

لدينا حسب نتائج الأسئلة السابقة :

φ دالة متصلة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

إذن يمكن تطبيق TAF بالنسبة للدالة φ على أي مجال من $\mathbb{R}_+^*$

لدينا : $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ و $u_n \in \mathbb{R}_+^*$

إذن حسب مبرهنة التزايد المتناهية :

يوجد عدد حقيقي λ محصور بين β و u_n بحيث :

$$\frac{\varphi(u_n) - \varphi(\beta)}{u_n - \beta} = \varphi'(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow |\varphi(u_n) - \varphi(\beta)| = |\varphi'(\lambda)| |u_n - \beta|$$

بما أن : $g(\beta) = 0$ فإنه حسب (II) 4 (ج) $\varphi(\beta) = \beta$

$$\text{إذن : } |u_{n+1} - \beta| < |\varphi'(\lambda)| \cdot |u_n - \beta|$$

لدينا حسب السؤال (II) 4 (ب)

$$(\forall x \in]0,1[; |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3})$$

و لدينا $\lambda \in]0,1[$ لأن β و u_n عنصرين من $]0,1[$

$$\text{إذن : } |\varphi'(\lambda)| < \frac{2}{3}$$

$$\text{و منه : } |\varphi'(\lambda)| \cdot |u_n - \beta| < \frac{2}{3} |u_n - \beta|$$

$$\text{و بالتالي : } |u_{n+1} - \beta| < \frac{2}{3} |u_n - \beta|$$



من أجل $(n - 1)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} |u_n - \beta| &\leq \frac{2}{3} |u_{n-1} - \beta| \\ &\leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} |u_{n-2} - \beta| \\ &\leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} |u_{n-3} - \beta| \\ &\leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} |u_{n-4} - \beta| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \beta| \end{aligned}$$

و بما أن : $0 < \beta < 1$

$$\frac{-1}{3} < \frac{2}{3} - \beta < \frac{2}{3} \quad \text{فإن :}$$

$$-1 < \frac{2}{3} - \beta < 1 \quad \text{إذن :}$$

$$|u_0 - \beta| < 1 \quad \text{أي :}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \beta| < \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{و منه :}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (II) 5 (ع)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{بما أن :}$$

و $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متتالية هندسية تؤول إلى الصفر لأن أساسها عدد موجب أصغر من 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \beta) = 0 \quad \text{إذن بالضرورة نستنتج أن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \beta \quad \text{يعني :}$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية متقاربة و تؤول إلى } \beta . \quad \text{و بالتالي :}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■