Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

**التمرين الأول : ( 3,0 ن )**

■ (I) ① أ

ليكن الزوج $(a,b)$ عنصرا من $E^2$ .

لدينا : $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(b\sqrt{2}-1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(ab\sqrt{2} - a - b + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= a + b - ab\sqrt{2}$$

$$= a \perp b$$

■ (I) ① ب

يكفي أن نبين أن : $\forall (a,b)\epsilon E^2 \ ; \ a \perp b \epsilon E$

ليكن الزوج $(a,b)$ عنصرا من $E^2$ .

يعني : $a \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $b \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

و منه : $a\sqrt{2}-1 \neq 0$ و $b\sqrt{2}-1 \neq 0$

و منه : $(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1) \neq 0$

و منه : $\frac{-1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1) \neq 0$

إذن : $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1) \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

إذن : $a \perp b \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

أي : $a \perp b \ \epsilon \ \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

أي : $a \perp b \ \epsilon \ E$

و بالتالي $\perp$ قانون تركيب داخلي في $E$ .

■ (I) ②

لكي تكون $(E,\perp)$ زمرة تبادلية يكفي أن يكون $\perp$ تبادليا و تجميعيا و أن يقبل عنصرا محايدا في $E$ وأن يقبل كل عنصر من $E$ مماثلا من $E$ .

ليكن الزوج $(a,b)$ عنصرا من $E^2$ .

$$a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$$

$$\Leftrightarrow \ a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(b\sqrt{2}-1)(a\sqrt{2}-1)$$

$$\Leftrightarrow \ a \perp b = b \perp a$$

و منه : $\perp$ تبادلي في $E$ .

ليكن $e$ العنصر المحايد للقانون $\perp$ في $E$

يعني : $(\forall x \epsilon E) \ ; \ x \perp e = e \perp x = x$

$\Leftrightarrow \ (\forall x \epsilon E) \ ; \ x + e - xe\sqrt{2} = x$

$\Leftrightarrow \ (\forall x \epsilon E) \ ; \ e(1 - x\sqrt{2}) = 0$

و بما أن : $x \ \epsilon \ E$ فإن : $x \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

يعني : $1 - x\sqrt{2}$ و بالتالي : $e = 0$

و بما أن : $0 \ \epsilon \ E$ فإن $0$ هو العنصر المحايد للقانون $\perp$ في $E$ .

ليكن $x$ عنصرا من $E$ .

و ليكن $y$ مماثل $x$ في $E$ بالنسبة لـ $\perp$

$x \perp y = y \perp x = 0$

$$\Leftrightarrow \ x + y - xy\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ y(1 - x\sqrt{2}) = -x$$

$$\Leftrightarrow \ y = \frac{-x}{(1-x\sqrt{2})} = \frac{x}{(x\sqrt{2}-1)}$$

و للتأكد من أن : $\frac{x}{(x\sqrt{2}-1)} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

نفترض التساوي إذن : $x\sqrt{2} = x\sqrt{2} - 1$

و منه : $0 = -1$ وهذا تناقض واضح.

و من تم فإن : $\frac{x}{(x\sqrt{2}-1)} \ \epsilon \ E$

يعني أن كل عنصر $x$ من $E$ يقبل مماثلا و هو : $\frac{x}{(x\sqrt{2}-1)}$

من $E$ بالنسبة للقانون $\perp$

**خلاصة** : $(E,\perp)$ زمرة تبادلية.

■ (II) ① أ

لدينا : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

إذن : $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \ A^2 = -2\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2A$



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

و لدينا كذلك : $M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a & a\\ a & \sqrt{2}-a\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-a & a\\ a & -a\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad M(a)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{a}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{M(a)=I+\frac{a}{\sqrt{2}}A}$

## ■(II)①ب

يكفي أن نبين أن :

$(\forall M(a)\epsilon F),(\forall M(b)\epsilon F)\ ;\ M(a)\times M(b)\ \epsilon\ F$

في البداية نلاحظ أن $M(a)$ مصفوفة مربعة من الرتبة 2 و ذات معاملات حقيقية

إذن المجموعة $F$ جزء من $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

ليكن $M(a)$ و $M(b)$ عنصرين من $F$ بحيث : $(a,b)\ \epsilon\ E^2$

لدينا : $M(a)\times M(b)=\left(I+\frac{a}{\sqrt{2}}A\right)\left(I+\frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$

$\Leftrightarrow \quad M(a)\times M(b)=I+\frac{b}{\sqrt{2}}A+\frac{a}{\sqrt{2}}A+\frac{ab}{2}A^2$

$\Leftrightarrow \quad M(a)\times M(b)=I+\frac{b}{\sqrt{2}}A+\frac{a}{\sqrt{2}}A-\frac{ab}{2}A$

$\Leftrightarrow \quad M(a)\times M(b)=I+\frac{(a+b-ab)}{\sqrt{2}}A$

$\Leftrightarrow \quad M(a)\times M(b)=M(a\perp b)$

لكي تكون المصفوفة $M(a\perp b)$ عنصرا من $F$ يكفي أن يكون $a\perp b$ عنصرا من $E$

و بالفعل $a\perp b\ \epsilon\ E$ لأن $\perp$ قانون تركيب داخلي في $E$ و $a\epsilon E$ و $b\epsilon E$ .

إذن نحصل على : $M(a)\times M(b)\ \epsilon\ F$

و بالتالي $F$ جزء مستقر من $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

## ■(II)②أ

لكي يكون التطبيق $\varphi$ تشاكلا من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$ يكفي أن نتأكد من أن : $\forall\ (a,b)\ \epsilon\ E^2\ ;\ \varphi(a)\times\varphi(b)=\varphi(a\perp b)$

و لكي يكون التطبيق $\varphi$ تقابلا يكفي أن يكون شموليا و تباينيا .

ليكن $a$ و $b$ عنصرين من $E$ .

$\Leftrightarrow \quad \varphi(a)\times\varphi(b)=M(a)\times M(b)$

$\Leftrightarrow \quad \varphi(a)\times\varphi(b)=\left(I+\frac{a}{\sqrt{2}}A\right)\left(I+\frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$

$\Leftrightarrow \quad \varphi(a)\times\varphi(b)=I+\frac{b}{\sqrt{2}}A+\frac{a}{\sqrt{2}}A+\frac{ab}{2}A^2$

$\Leftrightarrow \quad \varphi(a)\times\varphi(b)=I+\frac{b}{\sqrt{2}}A+\frac{a}{\sqrt{2}}A-\frac{ab}{2}A$

$\Leftrightarrow \quad \varphi(a)\times\varphi(b)=I+\frac{(a+b-ab)}{\sqrt{2}}A$

$\Leftrightarrow \quad \varphi(a)\times\varphi(b)=M(a\perp b)$

$\Leftrightarrow \quad \varphi(a)\times\varphi(b)=\varphi(a\perp b)$

لتكن $S$ مصفوفة من $F$ .إذن حسب تعريف المجموعة $F$ :

$(\exists\ a\ \epsilon\ E)\ ;\ S=M(a)$

و منه حسب تعريف التطبيق $\varphi$ : $(\exists\ a\ \epsilon\ E)\ ;\ S=\varphi(a)$

و بالتالي $\varphi$ تطبيق **شمولي** من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$

ليكن $a$ و $b$ عنصرين من $E$ بحيث : $\varphi(a)=\varphi(b)$

إذن حسب تعريف التطبيق $\varphi$ : $M(a)=M(b)$

يعني : $\left(I+\frac{a}{\sqrt{2}}A\right)=\left(I+\frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$

و منه : $\boxed{a=b}$

و بالتالي : $\varphi$ تطبيق **تباييني** من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$

خلاصة : $\varphi$ تشاكل **تقابلي** من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$ .

## ■(II)②ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

و بما أن $(E,\perp)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\perp$ هو 0 و كل عنصر $x$ من $E$ يقبل مماثلا $\left(\frac{x}{x\sqrt{2}-1}\right)$

فإن $(F,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو $\varphi(0)$ و كل عنصر $y$ من $F$ يقبل مماثلا $\varphi\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)$

و لدينا : $\varphi(0)=I+\frac{0}{\sqrt{2}}A=I$

$$\varphi\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)=I+\frac{y}{\sqrt{2}(y\sqrt{2}-1)}A=I+\frac{y}{2y-\sqrt{2}}A$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}-y}{\sqrt{2}-2y} & \frac{y}{2y-\sqrt{2}}\\ \frac{y}{2y-\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}-y}{\sqrt{2}-2y}\end{pmatrix}=M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)$$



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

و للتأكد :

$$M(y)\times M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)=\left(I+\frac{y}{\sqrt{2}}A\right)\left(I+\frac{y}{2y-\sqrt{2}}A\right)$$

$$=I+\frac{y}{\sqrt{2}}A+\frac{y}{2y-\sqrt{2}}A+\frac{y^2}{\sqrt{2}(2y-\sqrt{2})}A^2$$

$$=I+\frac{y}{\sqrt{2}}A+\frac{y}{\sqrt{2}(\sqrt{2}y-1)}A-\frac{2y^2}{2(\sqrt{2}y-1)}A$$

$$=I+\left(\frac{2(\sqrt{2}y-1)y+2y-2\sqrt{2}y^2}{2(\sqrt{2}y-1)\sqrt{2}}\right)A$$

$$=I+\left(\frac{2\sqrt{2}y^2-2y+2y-2\sqrt{2}y^2}{2(\sqrt{2}y-1)\sqrt{2}}\right)A$$

$$=I+0$$

$$=I$$

**التمرين الثاني : ( 3,5 ن )**

■ (I) ① أ

يكفي أن نبين أن :

$$(a+i)^2-(1+a)(1+i)(a+i)+i(1+a^2)=0$$

و للوصول إلى ذلك ننشر أو نعمل. نختار تقنية التعميل.

لدينا : $(a+i)^2+i(1+a^2)=(a+i)^2+i(a^2-i^2)$

$$=(a+i)(a+i)+i(a-i)(a+i)$$
$$=(a+i)(a+i)+(ai+1)(a+i)$$
$$=(a+i)(a+i+ai+1)$$
$$=(a+i)(a+1)(i+1)$$

و منه : $(a+i)$ حل للمعادلة $(E)$ .

■ (I) ① ب

تذكير : إذا كان $u$ و $v$ هما حلا المعادلة : $ax^2+bx+c=0$

فإن : $u+v=\frac{-b}{a}$ و $uv=\frac{c}{a}$

لدينا $u$ و $v$ هما حلا المعادلة $(E)$ .

إذن : $u+v=\frac{(1+a)(1+i)}{1}$

نعوض $u$ بقيمته نحصل على : $(i+a)+v=(1+a)(1+i)$

و منه : $v=(1+a)(1+i)-(i+a)$

$$\Leftrightarrow\quad v=1+i+a+ai-i-a$$
$$\Leftrightarrow\quad v=1+ai$$

■ (I) ② أ

نعلم أن كل عدد حقيقي يكون دائما مساويا لمرافقه و سوف نستغل هذه الخاصية لكي نبرهن على أن $\frac{u}{v}$ عدد حقيقي .

لدينا : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\overline{\left(\frac{a+i}{ai+1}\right)}=\frac{\bar{a}-i}{1-i\bar{a}}$

بما أن : $|a|=1$ فإن : $|a|=\sqrt{a\bar{a}}=1$

إذن : $\bar{a}=\frac{1}{a}$

و منه : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\frac{\bar{a}-i}{1-\bar{a}i}=\frac{\frac{1}{a}-i}{1-\frac{1}{a}i}=\frac{1-ai}{a-i}$

نضرب بسط و مقام النتيجة الأخيرة في العدد العقدي $i$ نحصل على :

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\frac{1-ai}{a-i}=\frac{a+i}{ai+1}=\frac{u}{v}$$

إذن نستنتج مما سبق أن : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\frac{u}{v}$

يعني أن العدد $\frac{u}{v}$ عدد حقيقي.

■ (I) ② ب

لدينا : $u^2=(a+i)^2=a^2+2ai-1$

$$\Leftrightarrow\quad u^2=a\left(a+2i-\frac{1}{a}\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad u^2=a(a+2i-\bar{a})$$
$$\Leftrightarrow\quad u^2=a[(a-\bar{a})+2i]$$

■ (I) ② ج

بصفة عامة، إذا كان : $z=\Re e(z)+i\Im m(z)$ فإن $z-\bar{z}=2i\Im m(z)$

لدينا حسب السؤال ب : $u^2=a[(a-\bar{a})+2i]$

إذن عمدة الطرف الأيمن يوافق عمدة الطرف الثاني بتردد $2\pi$

إي : $2Arg(u)\equiv Arg\left(a((a-\bar{a})+2i)\right)[2\pi]$

يعني : $2Arg(u)\equiv Arg(a)+Arg((a-\bar{a})+2i)[2\pi]$

لدينا : $a-\bar{a}+2i=2i\Im m(a)+2i=2i(\Im m(a)+1)$

و منه : $Arg(a-\bar{a}+2i)\equiv Arg(2i)+Arg(\Im m(a)+1)$

لدينا $2i$ عدد تخيلي صرف. إذن : $Arg(2i)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و لدينا كذلك $(\Im m(a)+1)$ عدد حقيقي. إذن : $Arg(\Im m(a)+1)\equiv 0[2\pi]$

و بالتالي : $2Arg(u)\equiv Arg(a)+\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و منه : $Arg(u)\equiv\frac{1}{2}Arg(a)+\frac{\pi}{4}[\pi]$



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

## ■ (II) ① (1)

لتكن $H$ صورة العدد العقدي $i$

و لتكن $\bar{H}$ صورة العدد العقدي $-i$

و لتكن $M$ صورة العدد العقدي $a$

لدينا : $|u|+|v|=m$ يعني : $|a+i|+|ai+1|=m$

لنبين أن : $|ai+1|=|a-i|$

لدينا : $ai+1=i(a-i)$

و منه : $|ai+1|=|i(a-i)|$

يعني : $|ai+1|=|i||a-i|$

أي : $|ai+1|=1|a-i|=|a-i|$

إذن : $|a+i|+|a-i|=m$

و منه : $|a-(-i)|+|a-i|=m$

أي : $\bar{H}M+HM=m$

لكي تكون مجموعة النقط $(E_m)$ إهليلج يكفي أن نتحقق من أن : $\bar{H}H \leq m$

لدينا : $\bar{H}H=|i-(-i)|=|2i|=2$

و لدينا حسب المعطيات : $m \geq 2$ إذن : $m \geq \bar{H}H$

و بالتالي $(E_m)$ إهليلج مركزه هو منتصف القطعة $[\bar{H}H]$ أي النقطة $O$

## ■ (II) ② (أ)

بما أن $(E_m)$ إهليلج.

فإن معادلته الديكارتية تكتب على الشكل : $(E_m)$ : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

لنحدد الآن قيمتي العددين $a$ و $b$ .

لدينا $2b=m$ إذن $b=\dfrac{m}{2}$

و منه : $b^2=\dfrac{m^2}{4}$

و نعلم كذلك أن : $c=\dfrac{\bar{H}H}{2}=1$ و $c^2=b^2-a^2$

إذن : $a^2=b^2-c^2$

و بالتالي المعادلة الديكارتية للإهليلج $(E_m)$ هي :

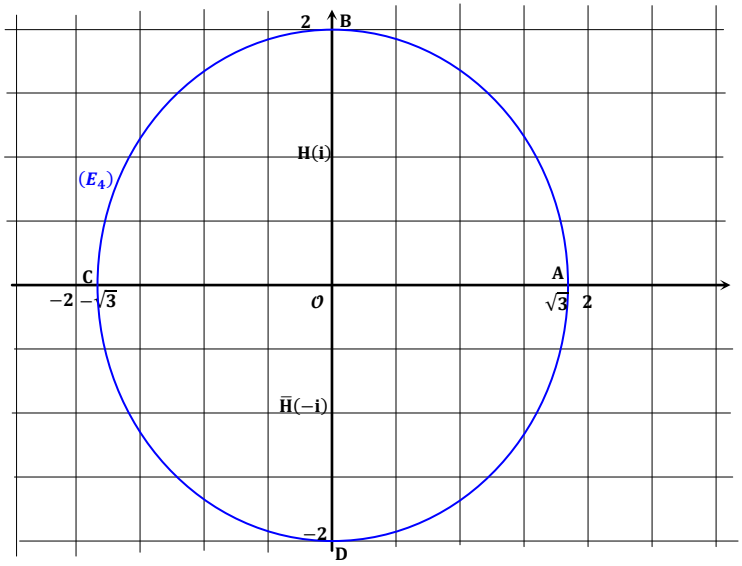
$$(E_m) : \frac{x^2}{\left(\frac{m^2}{4}-1\right)}+\frac{y^2}{\left(\frac{m^2}{4}\right)}=1$$

يعني : $\boxed{(E_m) : x^2+\left(1-\dfrac{4}{m^2}\right)y^2=\left(\dfrac{m^2}{4}-1\right)}$

## ■ (II) ② (ب)

$(E_4)$ إهليلج يتميز بالعناصر التالية :

- مركزه $O$
- رؤوسه : $A(\sqrt{3},0)$ و $B(-\sqrt{3},0)$ و $C(0,2)$ و $D(0,-2)$
- بؤرتاه : $H(0,1)$ و $\bar{H}(0,-1)$ .
- تباعده المركزي : $e=\dfrac{c}{b}=\dfrac{1}{2}$




## ■ (II) ③

في المجموعة $\mathbb{C}$ لدينا : $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$

إذن في المجموعة $\mathbb{R}^2$ لدينا : $A(\sqrt{3},0)$ و $B(0,2)$

لنحدد معادلة المستقيم $(AB)$ و التي تكتب في شكلها المختصر كالتالي :

$$\boxed{(AB) : y=px+q}$$

بحيث $p$ هو الميل و $q$ هو الأرتوب عند الأصل.

$$p=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2}{-\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

إذن : $(AB) : y=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}x+q$

و لدينا : $B(0,2)$ نقطة من $(AB)$ .

إذن : $b=2$ و منه : $2=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\times 0+b$

و بالتالي : $\boxed{(AB) : y=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}x+2}$

لكي يكون $(AB)$ مماسا للإهليلج $E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}$ يكفي أن نحدد نقطة تقاطع $(AB)$ و $E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}$ ثم نحدد بعد ذلك معادلة المماس لـ $E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}$ في تلك النقطة و نبين أن تلك المعادلة ما هي إلا معادلة المستقيم $(AB)$ .



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

على بركة الله، لدينا حسب السؤال ② أ) :

$$\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right) : x^2+\left(1-\frac{4}{\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}\right)y^2=\left(\frac{\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}{4}-1\right)$$

أي : $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right) : x^2+\frac{9}{16}y^2=\frac{9}{7}$

لتحديد نقطة تقاطع $(AB)$ و $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ نحل النظمة التالية :

$$\begin{cases} x^2+\frac{9}{16}y^2=\frac{9}{7} \\ y=\frac{-2\sqrt{3}}{3}x+2 \end{cases}$$

نعوض $y$ بقيمته في المعادلة $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ نحصل على :

$$x^2+\frac{9}{16}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}x+2\right)^2=\frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+\frac{9}{16}\left(\frac{4}{3}x^2+4-\frac{8\sqrt{3}}{3}x\right)=\frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{3}x=\frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{7}{4}x^2-\frac{3\sqrt{3}}{3}x+\frac{27}{28}=0$$

نضرب طرفي المعادلة في العدد 28 نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad (7x)^2-2(7x)(3\sqrt{3})+(3\sqrt{3})^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (7x-3\sqrt{3})^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (7x-3\sqrt{3})=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x=\frac{3\sqrt{3}}{7}}$$

نعوض $x$ في معادلة $(AB)$ نجد :

$$y=\frac{-2\sqrt{3}}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{7}+2=\frac{8}{7}$$

من جهة أخرى لدينا معادلة المماس لـ $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة $\left(\frac{3\sqrt{3}}{7},\frac{8}{7}\right)$

تكتب على شكل : $xx_0+\frac{9}{16}yy_0=\frac{9}{7}$

بحيث : $x_0=\frac{3\sqrt{3}}{7}$ و $y_0=\frac{8}{7}$

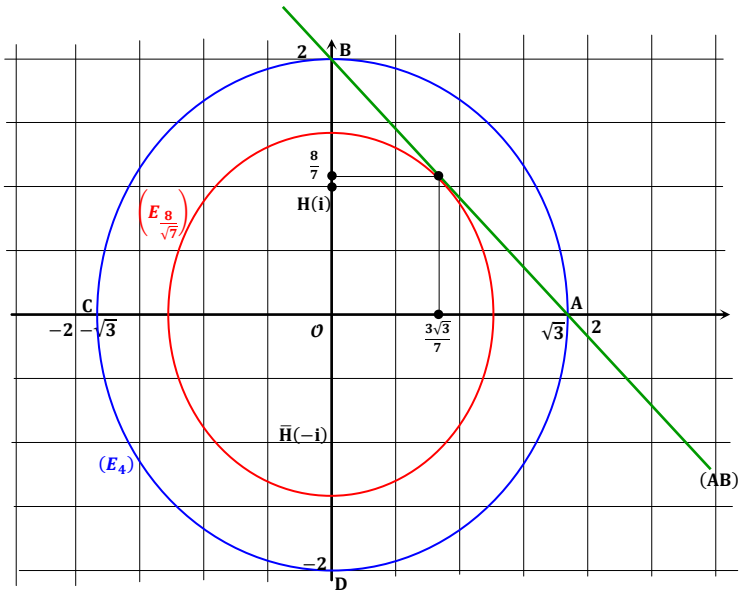
إذن معادلة المماس هي : $\frac{3\sqrt{3}}{7}x+\frac{9}{16}y\frac{8}{7}=\frac{9}{7}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3\sqrt{3}}{7}x+\frac{9}{14}y=\frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad y=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x$$

و هذه الكتابة الأخيرة هي بالفعل معادلة المستقيم $(AB)$.

و بالتالي $(AB)$ هو المماس لـ $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة : $\left(\frac{3\sqrt{3}}{7},\frac{8}{7}\right)$ .




## التمرين الثالث : ( 3,0 ن )

■ ① أ)

نُدِير خوارزمية أقليدس و نوقف محركاتها فور الحصول على باقي منعدم.

المرحلة الأولى :

| | |
|---|---|
| 232 | 195 |
| 37 | 1 |

37 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة الثانية :

| | |
|---|---|
| 195 | 37 |
| 10 | 5 |

10 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة الثالثة :

| | |
|---|---|
| 37 | 10 |
| 7 | 3 |

7 غير منعدم إذن واصل.



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

المرحلة الرابعة :

| | |
|---|---|
| 10 | 7 |
| 3 | 1 |

3 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة الخامسة :

| | |
|---|---|
| 7 | 3 |
| 1 | 2 |

1 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة السادسة :

| | |
|---|---|
| 3 | 1 |
| 0 | 3 |

0 منعدم إذن **توقف**.

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 232 و 195 هو آخر باقي غير منعدم أي : 1

و بالتالي : $\boxed{195 \wedge 232 = 1}$

■ ① ب

في البداية يجب علينا أن نبحث عن الحل البديهي ( أو الحل الخاص ) لـ $(E)$ .

لدينا حسب خوارزمية أقليدس الواردة في السؤال السابق :

المرحلة الأولى : $37 = 232 - 1 \times 195$

المرحلة الثانية : $10 = 195 - 5 \times 37$

المرحلة الثالثة : $7 = 37 - 3 \times 10$

المرحلة الرابعة : $3 = 10 - 1 \times 7$

المرحلة الخامسة : $1 = 7 - 2 \times 3$

**الطريقة هي كالتالي :**

ننطلق من المرحلة الخامسة : $1 = 7 - 2 \times 3$

- ثم نعوض 3 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 7 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 10 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 37 بقيمتها ثم نبسط

إلى العمل : لدينا $\boxed{1 = 7 - 2 \times 3}$

نعوض 3 في هذا التعبير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 3 \times 7 - 2 \times 10}$$

نعوض 7 في هذا التعبير الأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 3 \times 37 - 11 \times 10}$$

نعوض 10 في هذا التعبير الأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 58 \times 37 - 11 \times 195}$$

نعوض 37 في هذا التعبير الأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 58 \times \mathbf{232} - 69 \times \mathbf{195}}$$

إذن الحل الخاص للمعادلة هو الزوج : $(-69, -58)$

سوف نحدد الآن صيغة الحل العام للمعادلة $(E)$

يعني : $195x - 232y = 1$

و لدينا : $195(-69) - 232(-58) = 1$

ننجز عملية الفرق بين هاتين المتساويتين نحصل على :

$$195(x + 69) - 232(y + 58) = 0$$

يعني : $\boxed{195(x + 69) = 232(y + 58)}$ $(*)$

إذن : $195 \,/\, 232(y + 58)$

إذن حسب $(Gauss)$ : $195 \,/\, (y + 58)$ لأن : $195 \wedge 232 = 1$

و منه : $(\exists k' \epsilon \mathbb{Z})$ ; $y + 58 = 195k'$

يعني : $\boxed{y = 195k' - 58}$

لإيجاد قيمة $x$ نعوض $y$ في المعادلة $(*)$ نحصل على :

$$195(x + 69) = 232(195k')$$

يعني : $\boxed{x = 232k' - 69}$

بما أن $k'$ عدد نسبي فإن : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})$ ; $k' = k + 1$

و منه : $x = 232(k + 1) - 69$

أي : $\boxed{x = 232k + 163}$

و لدينا كذلك : $y = 195k' - 58$

أي : $y = 195(k + 1) - 58$

و منه : $\boxed{y = 195k + 137}$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة $(E)$ هي :

$$\boxed{S = \{(232k + 163\,;\, 195k + 137) \;/\; k \epsilon \mathbb{Z}\}}$$

■ ① ج

ننطلق من الشرط : $195d \equiv 1[232]$

الذي يعني : $232 \,/\, (195d - 1)$

و منه : $(\exists b \epsilon \mathbb{Z})$ ; $232b = 195d - 1$

أي : $195d - 232b = 1$

و منه : $(d, b)$ حل للمعادلة $(E)$ .

إذن $(d, b)$ عنصر من $(S)$ .

و منه : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})$ ; $\begin{cases} d = 163 + 232k \\ b = 137 + 195k \end{cases}$



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

لدينا الشرط الآخر $0 \leq d \leq 232$

يعني : $0 \leq 163 + 232k \leq 232$

و منه : $0,2 \leq k \leq 0,7$

العدد الصحيح النسبي الوحيد المحصور بين 0,2 و 0,7 هو 0

إذن : $\boxed{d = 163 + 232 \times 0 = 163}$

■ (2)

يكفي : أن نتحقق من أن جميع الأعداد الأولية الأصغر من أو تساوي $\sqrt{233}$ لا تقسم العدد 233 .

و تلك الأعداد الأولية هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13

■ (3) أ

ليكن $a$ و $b$ عنصرين من $A \setminus \{0\}$ بحيث : $f(a) = f(b)$ .

لدينا : $\begin{cases} a^{195} \equiv f(a)[233] \\ b^{195} \equiv f(b)[233] \end{cases}$

بما أن $f(a) = f(b)$ فإن : $a^{195} \equiv b^{195}[233]$

و منه : $a^{195d} \equiv b^{195d}[233]$

و لدينا : $195d \equiv 1[232]$ يعني : $195d = 232k + 1$

إذن : $\boxed{a^{232k+1} \equiv b^{232k+1}[233]}$

من جهة أخرى لدينا حسب مبرهنة فيرما : $a^{232} \equiv 1[233]$

إذن : $a^{232k} \equiv 1[233]$ و منه : $\boxed{a^{232k+1} \equiv a[233]}$ (1)

بنفس الطريقة نجد : $\boxed{b^{232k+1} \equiv b[233]}$ (2)

بما أن : $a^{232k+1} \equiv b^{232k+1}[233]$ فإن : $a \equiv b[233]$

و ذلك باستعمال النتيجتين (1) و (2)

و منه : 233 يقسم $|a - b|$ .

لدينا : $a \epsilon A$ و $b \epsilon A$

يعني : $0 < a \leq 232$ و $0 < b \leq 232$

و منه : $|a - b| \leq 232$

نلاحظ أن 233 يقسم عددا أصغر منه و هو $|a - b|$ إذن : $|a - b| = 0$

و بالتالي : $a = b$

■ (3) ب

ليكن $a$ و $b$ عنصرين من $A$ بحيث : $f(a) = b$

لدينا : $a^{195} \equiv f(a)[233]$

و بما أن : $f(a) = b$ فإن : $a^{195} \equiv b[233]$

و منه : $\boxed{a^{195d} \equiv b^d[233]}$ (3)

من جهة أخرى لدينا حسب مبرهنة $(Fermat)$ : $a^{232} \equiv 1[233]$

إذن : $\boxed{a^{-232k} \equiv 1[233]}$ (4)

نضرب المتوافقتين (3) و (4) طرفا بطرف نحصل على :

$a^{195d-232k} \equiv b^d[233]$

و منه : $a^1 \equiv b^{163}[233]$ لأن $d = 163$ هو العدد الوحيد الذي يحقق الشرطين $195d \equiv 1[232]$ و $d \epsilon A$

و منه : $a \equiv b^{163}[233]$ هو الجواب الأخير.

كما يمكن إظافة ما يلي : $233 / (a - b^{163})$

يعني : $(a - b^{163}) = 233k$ ; $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})$

أي : $\boxed{a = b^{163} + 233k \ ; \ k \epsilon \mathbb{Z}}$

■ (3) ج

نستنتج من نتيجة السؤال (3) أ :

أن $f$ تطبيق تباييني من $A$ نحو $A$

كما نستنتج من نتيجة السؤال (3) ب :

أن التطبيق $f$ شمولي من $A$ نحو $A$

إذن $f$ تقابل من $A$ نحو $A$ و تقابله العكسي $f^{-1}$ نستنتجه من جواب السؤال (ب):

$$\begin{array}{l} f : A \to A \\ a \to f(a) \equiv a^{195}[233] \end{array}$$

و

$$\begin{array}{l} f^{-1} : A \to A \\ b \to f^{-1}(b) \equiv b^{163}[233] \end{array}$$



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

**التمرين الرابع : ( 10,5 ن )**

■ (I) ①

ليكن $x$ عنصرا من $\mathbb{R}$ .

لدينا : $g'(x) = e^x + e^x(x-1) = xe^x$

بما أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ e^x > 0$

فإن إشارة $g'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $x$ .

إذا كان $x = 0$ فإن $g'(x) = 0$
إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) > 0$
إذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) < 0$

و لدينا : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

إذن : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$

و لدينا كذلك : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

نلخص النتائج المحصل عليها في الجدول التالي :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $1$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

نلاحظ حسب هذا الجدول أن القيمة الدنوية للدالة $g$ هي $0$

و $g$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ .

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ g(x) \geq 0$

■ (I) ②

لدينا $g$ دالة تناقصية قطعا على المجال $]-\infty, 0[$

إذن : $(\forall x < 0)\ ;\ g(x) > 0$

و لدينا $g$ دالة تزايدية قطعا على المجال $]0, +\infty[$

إذن : $(\forall x > 0)\ ;\ g(x) > 0$

و لدينا العنصر الوحيد الذي صورته بالدالة $g$ منعدمة هو $0$ . إذن : $\boxed{g(0) = 0}$

■ (II) ①

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{(+\infty) - 0} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + x) = 0 + (+\infty) = +\infty$$

■ (II) ②

لدينا : $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \left(\frac{x}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to0} \left(\frac{1}{\frac{e^x - e^0}{x - 0}}\right)$

بما أن : $\lim_{x\to0} \left(\frac{e^x - e^0}{x - 0}\right) = e^0 = 1$

فإن : $\lim_{x\to0} f(x) = \frac{1}{1} = 1 = f(0)$

و منه $f$ دالة متصلة في الصفر.

■ (II) ③ أ

ليكن $x$ عنصرا من $\mathbb{R}^*$ .

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x - 1}\right)' = \frac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow\ f'(x) = \frac{-1 - e^x(x-1)}{(e^x - 1)^2} = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

■ (II) ③ ب

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2}$$ لدينا حسب السؤال أ

بما أن $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)\ ;\ 0 < (e^x - 1)^2$

فإن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $g(x)$

لدينا $g$ تنعدم في نقطة واحدة أفصولها $0$ و ذلك حسب السؤال (I) ②

إذن $f'(x)$ تنعدم إذا كان $x = 0$

و لدينا كذلك حسب السؤال (I) ① $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ g(x) \geq 0$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)\ ;\ f'(x) \leq 0$

و لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x - 1}\right) = \frac{-\infty}{0 - 1} = +\infty$

و لدينا كذلك حسب السؤال (II) ① : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

و من هذه الدراسة نستنتج جدول تغيرات الدالة $f$ كما يلي :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f$ | $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↘ | $0$ |



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

■(II)④(أ)

$$J(x)=\int_0^x te^{-t}\,dt$$ لدينا :

$u(t)=t$ نضع : $u'(t)=1$ إذن :

$v'(t)=e^{-t}$ و نضع : $v(t)=-e^{-t}$ إذن :

و منه : $J(x)=[uv]_0^x-\int_0^x u'v\,dt$

$$\Leftrightarrow\quad J(x)=[t(-e^{-t})]_0^x-\int_0^x(-e^{-t})\,dt$$
$$\Leftrightarrow\quad J(x)=[-te^{-t}]_0^x+[-e^{-t}]_0^x$$
$$\Leftrightarrow\quad J(x)=-xe^{-x}-e^{-x}+1$$
$$\Leftrightarrow\quad \boxed{J(x)=e^{-x}(e^x-x-1)}$$

■(II)④(ب)

ليكن $x$ عددا حقيقيا . نفصل بين ثلاث حالات :

**الحالة الأولى** : إذا كان $x$ موجب فإن : $|x|=x$

و منه : $|x|+x=2x$ و $x-|x|=0$

ليكن $0\le t\le x$ إذن $e^{-x}\le e^{-t}\le e^0$

و منه : $te^{-x}\le te^{-t}\le t$

ندخل التكامل على الترتيب نحصل على :

$$\int_0^x te^{-x}\,dt\le\int_0^x te^{-t}\,dt\le\int_0^x t\,dt$$

يعني : $e^{-x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x\le J(x)\le\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$

ومنه : $\frac{x^2}{2}e^{-x}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}$

و بالتالي : $\boxed{\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}$

**الحالة الثانية** : إذا كان $x$ سالب فإن : $|x|=-x$

و منه : $|x|+x=0$ و $x-|x|=2x$

ليكن $x\le t\le 0$ إذن $e^0\le e^{-t}\le e^{-x}$

و منه : $te^{-x}\le te^{-t}\le t$ (تغير الترتيب لأن $t$ عدد سالب)

ندخل التكامل على الترتيب نحصل على :

$$\int_x^0 te^{-x}\,dt\le\int_x^0 te^{-t}\,dt\le\int_x^0 t\,dt$$
$$\Leftrightarrow\quad e^{-x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0\le -J(x)\le\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{-x^2}{2}e^{-x}\le -J(x)\le\frac{-x^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{2}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

**الحالة الثالثة** : إذا كان $x$ منعدم فإن : $J(0)=0$

و منه : $\boxed{\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}$

لأن : $0\le 0\le 0$

**خلاصة** :

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\quad \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}$$

■(II)④(ج)

لدينا حسب السؤال(ب)

$$(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\quad \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

و منه حسب السؤال(أ)

$$\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le e^{-x}(e^x-1-x)\le\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

نفترض أن $x\neq 0$ ثم نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب $\frac{e^x}{x^2}$

علما أن هذا الترتيب سوف لن يتغير نحصل على :

$$\frac{1}{2}e^xe^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le\frac{(e^x-1-x)}{x^2}\le\frac{1}{2}e^xe^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

و بالتالي بعد تبسيط طرف اليمين و طرف اليسار نحصل على :

$$\boxed{\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}\le\frac{(e^x-1-x)}{x^2}\le\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}}$$

■(II)④(د)

لدينا حسب نتيجة السؤال(ج)

$$\underbrace{\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}_{x\to 0}\le\frac{(e^x-1-x)}{x^2}\le\underbrace{\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}}_{x\to 0}$$

$\to\ \frac{1}{2}$ و $\to\ \frac{1}{2}$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}}$



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

و لدينا من جهة أخرى :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-e^x+1}{xe^x-x}\right)$$

نحاول إظهار الكمية $\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)$ نحصل على :

$$\lim_{x\to 0^+}-\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0^+}-\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)f(x)$$

لدينا حسب السؤال (II) ② : $f$ متصلة في 0

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=1 \quad : \text{إذن}$$

و بالتالي نستنتج أن : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\frac{-1}{2}\times 1=\boxed{\frac{-1}{2}}$

إذن $f$ قابلة للاشتقاق في الصفر و $f'(0)=\frac{-1}{2}$

■ (II) ⑤ أ

لدينا : $f'(x)=\frac{-g(x)}{(e^x-1)^2}$

$$\Longrightarrow \quad f''(x)=\frac{-g'(x)(e^x-1)^2+g(x)(2(e^x-1)e^x)}{(e^x-1)^4}$$

$$=\frac{-xe^x(e^x-1)^2+(1+(x-1)e^x)(2(e^x-1)e^x)}{(e^x-1)^4}$$

$$=\frac{-xe^x(e^x-1)^2+2(e^x-1)e^x+2(x-1)(e^x-1)e^{2x}}{(e^x-1)^4}$$

$$=\frac{-xe^x(e^x-1)+2e^x+2(x-1)e^{2x}}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{e^x(-xe^x+x+2+2xe^x-2e^x)}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{e^x(xe^x+x+2-2e^x)}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{e^x\left(e^x(x-2)+(x+2)\right)}{(e^x-1)^3}$$

■ (II) ⑤ ب

نضع : $\varphi(x)=e^x(x-2)+2+x$

لدينا : $\varphi'(x)=(xe^x-2e^x+2+x)'$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi'(x)=xe^x+e^x-2e^x+1$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi'(x)=xe^x-e^x+1$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi'(x)=e^x(x-1)+1$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi'(x)=g(x)$$

و نعلم حسب السؤال (I) ① : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ g(x)\geq 0$

و بالتالي : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ \varphi'(x)\geq 0$

أي $\varphi$ دالة تزايدية على $\mathbb{R}$ .

و لدينا : $\varphi(0)=0$ و $f$ دالة تزايدية على $\mathbb{R}$ .

إذا كان $x\geq 0$ فإن : $\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$

إذا كان $x\leq 0$ فإن : $\varphi(x)\leq\varphi(0)=0$

■ (II) ⑤ ج

لدينا : $f''(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^3}\left(e^x(x-2)+(x+2)\right)$

$$f''(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\times\frac{\varphi(x)}{(e^x-1)}$$

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ e^x>0$ و $(e^x-1)^2>0$

إذن إشارة $f''(x)$ تتعلق بإشارة $\varphi(x)$ و $(e^x-1)$

إذا كان $x>0$ فإن : $\varphi(x)>0$ و $e^x>e^0$

إذن : $\boxed{f''(x)>0}$

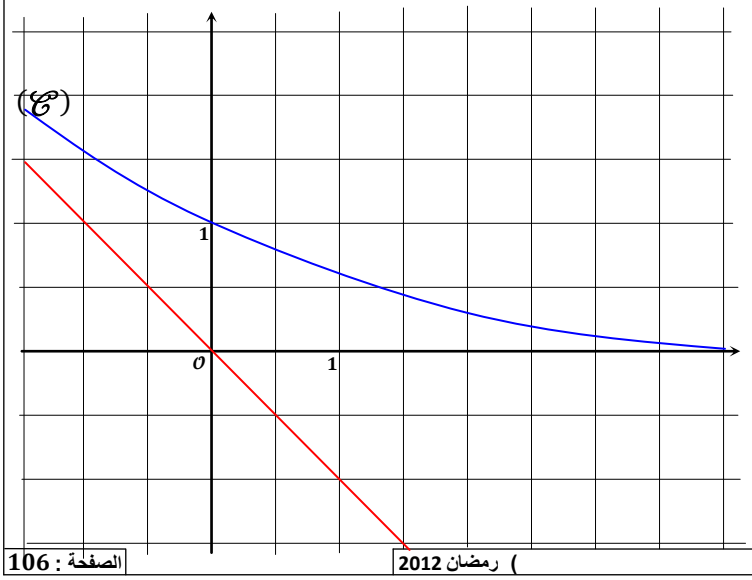
إذا كان $x<0$ فإن $\varphi(x)<0$ و $e^x<e^0$

إذن : $f''(x)>0$

و في كلتا الحالتين نلاحظ أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ f''(x)>0$

و هذا يعني أن منحنى الدالة $f$ محدب

■ (II) ⑤ د






للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

■ (III) ① —

لنحل المعادلة : $f(x) = x$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{e^x - 1} = x$$

$$\Leftrightarrow \quad x = xe^x - x$$

$$\Leftrightarrow \quad e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = ln\, 2$$

إذن $\ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$

■ (III) ② أ —

يكفي أن نبين أن : $\frac{-1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

لدينا حسب السؤال (II) ⑤ ج $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)$ ; $f''(x) > 0$

إذن $f'$ دالة تزايدية على $\mathbb{R}^*$

إذا كان $x > 0$ فإن : $f'(x) \geq f'(0)$

يعني : $\boxed{f'(x) \geq \frac{-1}{2}}$ (1)

لدينا من جهة أخرى : $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2} \leq 0$

و ذلك لأن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})$ ; $g(x) \geq 0$

إذن من الكتابة $f'(x) \leq 0$ نستنتج أن : $f'(x) \leq 0 \leq \frac{1}{2}$

و منه : $\boxed{f'(x) \leq \frac{1}{2}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)$ ; $\frac{-1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

يعني : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)$ ; $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

■ (III) ② ب —

بما أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإنه بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال من $\mathbb{R}$ . نختار المجال الذي طرفاه $\ln 2$ و $u_n$ .

إذن يوجد عدد $c$ محصور بين $\ln 2$ و $u_n$ بحيث :

$$\frac{f(u_n) - f(\ln 2)}{u_n - \ln 2} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{f(u_n) - f(\ln 2)}{u_n - \ln 2}\right| = |f'(c)|$$

$$\Rightarrow \quad |f(u_n) - f(\ln 2)| = |f'(c)||u_n - \ln 2|$$

بما أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)$ ; $f'(x) \leq \frac{1}{2}$

إذن : $|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$ و منه : $f'(c) \leq \frac{1}{2}$

و بالتالي : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$ ; $|f(u_n) - f(\ln 2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|}$$

■ (III) ② ج —

لدينا حسب السؤال ب

$$(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$$

$$\Leftrightarrow \quad |u_n - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \ln 2|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |u_{n-2} - \ln 2|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |u_{n-3} - \ln 2|$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_{n-n} - \ln 2|$$

نستنتج إذن أن :

$$(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ |u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \ln 2|$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ محصور بين 1 و $-1$

إذن : $\lim_{n\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

و منه : $\lim_{n\infty} |u_n - \ln 2| = 0$

يعني : $\lim_{n\infty} u_n = \ln 2$

و بالتالي : $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى $\ln 2$ .

■ (IV) ① أ —

باستعمال البرهان بفصل الحالات نفصل بين حالتين :

**الحالة الأولى : إذا كان $x > 0$ .**

لدينا : $F(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt$

مع العلم أن $f$ دالة تناقصية على $\mathbb{R}$ و ذلك حسب السؤال (II) ③ ب

ليكن : $x \leq t \leq 2x$

يعني : $f(x) \geq f(t) \geq f(2x)$



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

و منه : $\frac{x}{e^x-1} \geq \frac{t}{e^t-1} \geq \frac{2x}{e^{2x}-1}$

ندخل التكامل على هذا الترتيب نحصل على :

$$\int_x^{2x}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)dt \geq \int_x^{2x}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)dt \geq \int_x^{2x}\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)dt$$

و منه : $\left(\frac{x^2}{e^x-1}\right) \geq F(x) \geq \left(\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\right)$

**الحالة الثانية : إذا كان $x < 0$.**

ليكن : $2x \leq t \leq x$

يعني : $f(2x) \geq f(t) \geq f(x)$

$$\int_{2x}^{x} f(2x)\,dt \geq \int_{2x}^{x} f(t)\,dt \geq \int_{2x}^{x} f(x)\,dt$$

$$-\int_{x}^{2x} f(2x)\,dt \geq -\int_{x}^{2x} f(t)\,dt \geq -\int_{x}^{2x} f(x)\,dt$$

$$-xf(2x) \geq -F(x) \geq -xf(x)$$

$$xf(2x) \leq F(x) \leq xf(x)$$

$$\left(\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)$$

**خلاصة :** $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ \left(\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)$

## ■ (IV) ① ب

نعلم أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ \left(\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\frac{e^{2x}-e^0}{2x-0}}\right) = \left(\frac{0}{e^0}\right) = 0$

و لدينا كذلك: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{e^x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\frac{e^x-e^0}{x-0}}\right) = \left(\frac{0}{e^0}\right) = 0$

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 0 = F(0)$

أي $F$ دالة متصلة في $0$

## ■ (IV) ① ج

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ \left(\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)}_{x\to 0} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \underbrace{\left(\frac{x}{e^x-1}\right)}_{x\to 0}$$

(1) (1)

و منه : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{F(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right) = 1 = F'(0)$

## ■ (IV) ② أ

لدينا الدالة $f$ متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $[x, 2x]$ مع $x\epsilon\mathbb{R}^*$

إذن $f$ تقبل دالة أصلية $h$ بحيث : $F(x) = h(2x) - h(x)$

لدينا $x \to h(x)$ و $x \to 2x$ دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ .

إذن $x \to h(2x)$ دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ .

و لدينا : $F(x) = h(2x) - h(x)$

إذن : $F'(x) = 2h'(2x) - h'(x)$

$$\Leftrightarrow\quad F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow\quad F'(x) = 2\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right) - \left(\frac{x}{e^x-1}\right)$$

و بما أنك تلميذ من السنة الثانية بكالوريا علوم رياضية

فإنك تستطيع الوصول إلى النتيجة انطلاقا من التعبير أعلاه.

و منه : $\Leftrightarrow \boxed{F'(x) = \left(\frac{3-e^x}{e^x+1}\right)f(x)}$

## ■ (IV) ② ب

لدينا حسب جدول إشارة $f$ في السؤال (II) ③ ب

$$(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) > 0$$

و ذلك لأن $f$ متصلة و تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ و قيمتها الدنوية هي : $0$

إذن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(3-e^x)$ .

لأن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^x + 1 > 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات $F$ كما يلي :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln 3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | $+$ | $1$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $F$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $F(\ln 3)$ | ↘ | $0$ |

■ و الحمد لله رب العالمين ■



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma