

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الانجاز : أربع ساعات



الامتحانات الوطنية الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2006

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن) نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة .

(I) لتكن G مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل :

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} ; (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

① بين أن G جزء مستقر من : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ 0,25 ن

② بين أن $(G, \times)$ زمرة ، هل هي تبادلية ؟ 0,75 ن

③ لتكن $\mathcal{H}$ مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)}$ من G حيث $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ بين أن $\mathcal{H}$ زمرة جزئية للزمرة $(G, \times)$. 0,50 ن

④ ليكن A عنصرا من G حيث : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ 0,50 ن

نضع $A^1 = A$ و $A^2 = A \times A$ و $A^{n+1} = A^n \times A$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

أحسب A^n بدلالة a و n بحيث : $(n \in \mathbb{N}^*)$.

(II) نعتبر في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ قانون التركيب الداخلي $\top$ المعروف بما يلي :

$$(a,b) \top (x,y) = (a + bx, by) : \forall (x,y); (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

ليكن φ التطبيق المعروف من G نحو $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ بما يلي : $\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* : \varphi(M_{(a,b)}) = (a,b)$

① بين أن φ تشاكل تقابلي من $(G, \times)$ نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$. 0,75 ن

② استنتج بنية المجموعة : $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$. 0,25 ن

③ حدد مماثل : $(a,1) \top (a,1) \top \dots \top (a,1)$ في $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \top)$ حيث $a \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$. 0,50 ن

n مرة

التمرين الثاني : (2,5 ن) نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة : $(E) : x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$.

① ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) .

نضع $d = x \wedge y$ و $x = ad$ و $y = bd$.

أ) تحقق أن $b^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$. 0,25 ن

ب) استنتج أن $b = 1$. 0,75 ن

ج) بين أن $a \neq 1$ و $(a-1)$ يقسم $(a+1)$. 0,50 ن

د) استنتج أن $a = 2$ أو $a = 3$. 0,50 ن

② حل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة (E) . 0,50 ن

التمرين الثالث : (5,0 ن)

نضع $(\forall z \in \mathbb{C}) : P(z) = z^2 - (2 + 6i)z$

(I) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، نعتبر $(\mathcal{H})$ مجموعة النقاط M ذات اللق z التي يكون من أجلها $P(z)$ عددا تخيليا صرفا .

① بين أن $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$ معادلة ديكارتية للمجموعة $(\mathcal{H})$.

0,50 ن

② بين أن $(\mathcal{H})$ هذلول و حدد مركزه و رأسيه و معادلتيه مقاربتيه في $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1,00 ن

③ تحقق أن النقطة O ، أصل المعلم ، تنتمي إلى المجموعة $(\mathcal{H})$ ثم أكتب في المعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ معادلة ديكارتية لمماس المنحنى $(\mathcal{H})$ في O .

0,50 ن

④ أنشئ $(\mathcal{H})$ في المعلم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

0,75 ن

①(II) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 4 - 6i$.

0,50 ن

② نضع $u = 1 + 5i$ و $v = 1 + i$ و $\omega = 239 - i$ و $\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ و $\beta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$

أ) تحقق أن : $u^4 \times v = 4\omega$.

0,50 ن

ب) حدد بدلالة α عمدة العدد العقدي u و حدد بدلالة β عمدة العدد العقدي ω .

0,75 ن

ج) استنتج أن : $4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$

0,50 ن

التمرين الرابع : (9,0 ن)

الجزء الأول في هذا الجزء : $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq 3$.

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $g_n(x) = nx + 2 \ln x$

① ضع جدول تغيرات الدالة g_n .

0,50 ن

② بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) , \sqrt{x} > \ln x$.

0,50 ن

③ أ) بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$. و أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

0,75 ن

ب) استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

0,25 ن

الجزء الثاني

(I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-x}$

ليكن $(\mathcal{C})$ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ مع $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\text{cm})$.

① أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة O ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

0,50 ن

② أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا .

0,50 ن

③ أ) بين أن : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$ (*)

0,25 ن

ب) ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,25 ن

④ أنشئ $(\mathcal{C})$ نأخذ : $f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,5$

0,50 ن

(II) نضع : $I = \left[\frac{1}{3}; 1\right]$.	
① ① بين أن : $f(I) = I$.	0,50 ن
② ② باستعمال العلاقة (*), بين أن : $(\forall x \in I), f'(x) \leq \frac{2}{3}$	0,50 ن
③ ③ بين أن : $[f(x) = x \text{ و } x > 0] \Leftrightarrow x = \alpha_3$	0,50 ن
حيث α_3 هو حل المعادلة : $g_3(x) = 0$ الذي تم تعريفه في الجزء الأول.	
② لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $u_0 = \frac{1}{3}$ و $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$	
① ① بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in I$	0,25 ن
② ② بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - \alpha_3 = \frac{2}{3} u_n - \alpha_3$	0,25 ن
③ ③ استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n - \alpha_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$	0,25 ن
④ ④ بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ مقاربة محددا نهايتها .	0,50 ن
(III) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{8x} f(t)dt$	
① ① بين أن : F قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$.	0,25 ن
② ② أحسب $F'(x)$ لكل x من $[0, +\infty[$ ثم استنتج تغيرات الدالة F.	0,75 ن
② ② بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*), 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$	0,50 ن
③ ③ استنتج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$	0,25 ن
④ ④ ضع جدول تغيرات الدالة F.	0,25 ن