

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الانجاز : أربع ساعات



الإمتحانات الوطنية الموحد
نيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2005

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (2,5 ن)

$x \wedge y$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

$\overline{abc}^{(x)}$ هي كتابة العدد abc في نظمة العد ذات الأساس x .

① نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) : (x + 1)^2 = 9 + 5y$.

أ) ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E) . 0,50 ن

بين أن $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 2[5]$.

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) . 0,50 ن

② بين أن : $(\forall k \in \mathbb{Z}) ; (5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (K - 3) \wedge 8$. 0,75 ن

③ حل في $\mathbb{N}^2$ النظام التالية : $\begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$ 0,75 ن

التمرين الثاني : (4,5 ن)

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر المنحنى $(\mathcal{E}_m)$ الذي معادلته هي :

$$\frac{x^2}{(10 - m)} + \frac{y^2}{(2 - m)} = 1 \quad ; \quad m \in \mathbb{R} \setminus \{2; 10\}$$

① (I) ناقش حسب قيم m طبيعة المنحنى $(\mathcal{E}_m)$. 1,00 ن

② إذا كان $(\mathcal{E}_m)$ مخروطيا ، اعط عناصره المميزة (المركز و الرؤوس و البؤرتان و المقاربان إن وجدا) 1,00 ن

③ أرسم $(\mathcal{E}_1)$. 0,25 ن

(II) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) : z^2 - (6 \cos \alpha)z + 1 + 8 \cos^2 \alpha = 0 \quad \text{حيث} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . 0,50 ن

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) ; $(\Im m(z_1) > 0)$ و M_1 و M_2 النقطتان ذات اللحيين z_1 و z_2 على التوالي.

② أ) تحقق أن : $M_1 \in (\mathcal{E}_1)$. 0,25 ن

ب) بين أنه توجد نقطتان P_1 و P_2 من $(\mathcal{E}_1)$ حيث يكون فيهما المماس للمنحنى $(\mathcal{E}_1)$ موازيا للمستقيم (OM_1) . 0,75 ن

ج) تحقق أن : $OM_1^2 + OP_1^2 = OM_2^2 + OP_2^2$. 0,75 ن

التمرين الثالث : (2,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 20 .

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و $(n - 10)$ كرة سوداء ، نفترض أن كل الكرات غير قابلة للتمييز باللمس

نسحب كرة من الكيس و نسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس . نكرر هذه التجربة n مرة . نسمي p_k احتمال الحصول على k كرة بيضاء $(0 \leq k \leq n)$.

① أحسب p_k بدلالة n و k . 0,50 ن

② نضع : $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}$ حيث : $k \in \{0, 1, \dots, (n - 1)\}$.

① بين أن : $u_k = \frac{(n - k)}{(k + 1)} \times \frac{10}{(n - 10)}$ 0,50 ن

② بين أن : $0 \leq k \leq 9 \Leftrightarrow u_k \geq 1$ و $10 \leq k \leq n - 1 \Leftrightarrow u_k \leq 1$ 0,50 ن

③ استنتج أكبر قيمة M للعدد p_k عندما يتغير k في $\{0, 1, \dots, n\}$. 1,00 ن

و بين أن : $M = \frac{n!}{n^n} \times \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{(n - 10)^{n-10}}{(n - 10)!}$

التمرين الرابع : (10,5 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = (1 + x)e^{-2x}$

ليكن $(\mathcal{C})$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① (I) أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 0,50 ن

② أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C})$. 0,50 ن

③ أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. 0,50 ن

④ أدرس تقعر المنحنى $(\mathcal{C})$. 0,50 ن

⑤ أنشئ $(\mathcal{C})$. 0,50 ن

⑥ بين أن f حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$: (E) . 0,50 ن

⑦ حدد الحل العام للمعادلة (E) . 0,50 ن

(II) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نرمز بـ A_n لمساحة الحيز المحصور بين $(\mathcal{C})$ و محور الأفاصيل و محور الأرتيب و المستقيم ذي المعادلة $x = n$.

① أحسب A_n بدلالة n . 1,00 ن

② أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ 0,50 ن

(III) لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم نضع : $u_n = \int_0^n [f(x)]^n dx$

① باستعمال تقنية تغيير المتغير $(xn = t)$ بين أن : $u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 0,75 ن

② بين أن : $2 - r \leq \frac{1}{r} \leq 1$; $(\forall r \in [1; 2])$ 0,50 ن

③ استنتج : $x - \frac{x^2}{2n} \leq n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall x \in [0; n])$ 0,75 ن

③ بين أن : $u_n \leq \int_0^n e^{-x} dx$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 0,50 ن

④ بين أن : $e^{\frac{-1}{2\sqrt{n}}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x} dx \leq u_n$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 0,75 ن

⑤ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها. 0,75 ن

④ ليكن a عنصرا من المجال $]0, 1[$.

① بين أن : $\int_a^1 n [f(x)]^n dx \leq n(1 - a)[f(a)]^n$ 0,50 ن

② استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^1 n [f(x)]^n dx = 0$ 0,50 ن

③ أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n n [f(x)]^n dx$ 0,50 ن