

التمرين الأول : (4,0 ن)

■ (1)

ليكن m و n عنصرين من $\mathbb{R}^*$

ليكن : $\left(m + \frac{1}{m} ; m - \frac{1}{m}\right)$ و $\left(n + \frac{1}{n} ; n - \frac{1}{n}\right)$ عنصرين من E

لدينا : $\left(m + \frac{1}{m} ; m - \frac{1}{m}\right) * \left(n + \frac{1}{n} ; n - \frac{1}{n}\right)$

$$= \left(mn + \frac{1}{mn} ; mn - \frac{1}{mn}\right)$$

بما أن : $m \neq 0$ و $n \neq 0$ فإن : $mn \neq 0$

و منه : $\left(mn + \frac{1}{mn} ; mn - \frac{1}{mn}\right) \in E$

و بالتالي : * قانون تركيب داخلي في E .

■ (2) (i)

ليكن $\varphi(m)$ و $\varphi(n)$ عنصرين من E

لدينا حسب السؤال (1) : $\varphi(m) * \varphi(n) = \varphi(mn)$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(E, *)$

ليكن A عنصرا من E . إذن حسب تعريف المجموعة E :

$$(\exists ! m \in \mathbb{R}^*) ; \varphi(m) = A$$

و منه : φ تقابل من $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(E, *)$

و بالتالي φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(E, *)$

■ (2) (ب)

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

لدينا $(\mathbb{R}^*, \times)$ زمرة تبادلية عنصراها المحايد هو العدد 1 و كل

عنصر a يقبل ممتالا $\frac{1}{a}$ بالقانون $\times$.

و بما أن φ تشاكل تقابلي فإن :

$(E, *)$ زمرة تبادلية عنصراها المحايد هو $\varphi(1)$ و كل عنصر

$\varphi(m)$ يقبل ممتالا $\varphi\left(\frac{1}{m}\right)$ بالقانون $*$.

و لدينا : $\varphi(1) = (2, 0)$

و $\varphi\left(\frac{1}{m}\right) = \left(m + \frac{1}{m} ; -m + \frac{1}{m}\right)$

■ (3) (i)

ليكن (x, y) عنصرا من F

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y^2 = x^2 - 4 \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

نطرح السؤال : هل يوجد عدد حقيقي موجب m بحيث : $m + \frac{1}{m} = x$

و للإجابة على هذا السؤال نبين أن المعادلة

$$m + \frac{1}{m} = x \quad \text{تقبل على الأقل حلا موجبا } m$$

لدينا : $m + \frac{1}{m} = x$

$$\Leftrightarrow m^2 - mx + 1 = 0$$

لدينا : $\Delta = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

بما أن : $x \geq 2$ فإن : $\Delta \geq 0$

و منه المعادلة تقبل حلين مختلفين m_1 و m_2

$$m_2 = \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{و} \quad m_1 = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2}$$

الحل m_1 عدد حقيقي موجب قطعاً إذن فإشارة الحل الثاني m_2 لا نهمنا علماً أنه تم إيجاد حل موجب للمعادلة

نستنتج إذن أن :

$$(\forall x \geq 0), (\exists m > 0) ; x = m + \frac{1}{m}$$

و لدينا : $y^2 = x^2 - 4$

إذن : $y = \pm \sqrt{x^2 - 4}$

$$= \pm \sqrt{m^2 + \frac{1}{m^2} + 2 - 4} = \pm \sqrt{\left(m - \frac{1}{m}\right)^2} = \pm \left(m - \frac{1}{m}\right)$$

نختار : $y = \left(m - \frac{1}{m}\right)$

إذن : $(x, y) = \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 / m > 0$

عكسيا : ننطلق من : $\left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 / m > 0$

لنبرهن أن المتراحة $m + \frac{1}{m} \geq 2$

تقبل حلولاً من أجل $m > 0$.

المتراحة تكافئ : $\frac{m^2 + 1}{m} \geq 2$

التمرين الثاني : (3,0 ن)

■ (I) ①

لدينا p و 3 عدنان أوليان .

إذن $3 \wedge p = 1$ و منه 3 لا تقسم p

و بالتالي حسب مبرهنة (Fermat) : $p^{3-1} \equiv 1[3]$

■ (I) ② (أ)

نعلم أن العدد الأولي الزوجي الوحيد هو 2

و بما أن p عدد أولي و أكبر من 5 فإنه بالضرورة p سيكون عددا فرديا .

إذن : $p = 2q + 1$; $(\exists q \in \mathbb{N})$

يعني : $p^2 = (2q + 1)^2$; $(\exists q \in \mathbb{N})$

يعني : $p^2 = 4q^2 + 4q + 1$; $(\exists q \in \mathbb{N})$

يعني : $p^2 - 1 = 4q(q + 1)$; $(\exists q \in \mathbb{N})$

■ (I) ② (ب)

لدينا : $p^2 - 1 = 4q(q + 1)$; $(\exists q \in \mathbb{N})$

و لدينا q و $(q + 1)$ عدنان صحيحان طبيعيين متتابعان .

إذن أحدهما فردي و الآخر زوجي .

و منه الجداء $q(q + 1)$ عدد زوجي دائما .

يعني : $q(q + 1) = 2m$; $(\exists m \in \mathbb{N})$

إذن : $p^2 - 1 = 4(2m)$; $(\exists m \in \mathbb{N})$

أي : $p^2 - 1 = 8m$; $(\exists m \in \mathbb{N})$

و منه : $8 / (p^2 - 1)$ أي : $p^2 \equiv 1[8]$

■ (I) ③

في البداية وجب التذكير بالخاصية التالية :

إذا كان : p_1 و p_2 و ... و p_k أعداد أولية وكانت n_1 و n_2 و ... و n_k أعدادا صحيحة طبيعية بحيث : $(\forall i) ; (p_i)^{n_i} / a$

$$\left(\prod_{i=1}^k p_i^{n_i} \right) / a : \text{ فإن :}$$

لدينا : $24 = 2^3 \times 3^1$

و لدينا كذلك حسب نتائج الأسئلة السابقة : $8 / (p^2 - 1)$ و $3 / (p^2 - 1)$

يعني : $2^3 / (p^2 - 1)$ و $3^1 / (p^2 - 1)$

و نعلم أن 3 و 2 عدنان أوليان

إذن حسب الخاصية أعلاه : $2^3 \times 3^1 / (p^2 - 1)$

يعني : $24 / (p^2 - 1)$

و بالتالي : $p^2 \equiv 1[24]$

نضرب طرفي المتراجحة في العدد الموجب m نحصل على :

$$m^2 + 1 \geq 2m$$

يعني : $m^2 - 2m + 1 \geq 0$ أي : $(m - 1)^2 \geq 0$

و هذه العبارة صحيحة كيفما كان العدد الحقيقي m .

و بالأخص من أجل $m > 0$

خلاصة :

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 2 \text{ و } y^2 = x^2 - 4\} \\ = \left\{ \left(m + \frac{1}{m}, m - \frac{1}{m} \right) \in \mathbb{R}^2 / m > 0 \right\}$$

■ ③ (ب)

من بين عناصر المجموعة F نجد الزوج $(2, 0)$. إذن : $F \neq \emptyset$

و من الصيغة الثانية للمجموعة F نستنتج أن : $F \subset E$

لأن : $m > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R}^*$

و بالتالي : F جزء غير فارغ من E (1)

ليكن X_m و X_n عنصرين من F بحيث :

$$\begin{cases} X_m = \left(m + \frac{1}{m} ; m - \frac{1}{m} \right) ; m > 0 \\ X_n = \left(n + \frac{1}{n} ; n - \frac{1}{n} \right) ; n > 0 \end{cases}$$

لدينا :

$$X_m * (X_n)' = \left(m + \frac{1}{m} ; m - \frac{1}{m} \right) * \left(n + \frac{1}{n} ; -n + \frac{1}{n} \right) \\ = \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{\frac{m}{n}} ; \frac{m}{n} - \frac{1}{\frac{m}{n}} \right) = X_{\left(\frac{m}{n} \right)}$$

بما أن : $m > 0$ و $n > 0$ فإن : $\frac{m}{n} > 0$ و منه $X_{\left(\frac{m}{n} \right)} \in F$

أي : $(X_m) * (X_n)' \in F$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(F, *)$ زمرة جزئية من $(E, *)$.

■ (II) ②

سوف نستعمل البرهان بالخلف.

نفترض وجود الأعداد a_1 و a_2 و... و a_{23}

بحيث : $a_k \wedge 24 = 1$; $(\forall k \in \llbracket 1, 23 \rrbracket)$ و $a_1^2 + \dots + a_{23}^2 = 23997$

لدينا كل عدد a_k أولي مع 24

$$\begin{cases} a_1^2 \equiv 1[24] \\ a_2^2 \equiv 1[24] \\ \vdots \\ a_{23}^2 \equiv 1[24] \end{cases} \quad \text{إذن حسب السؤال (II) ①}$$

عند المرور إلى الجمع بين هذه المتفاوتات نحصل على :

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{23}^2 \equiv 23[24]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{23997 \equiv 23[24]} \quad (1)$$

نستعين بالآلة الحاسبة لنحصل على : $\boxed{23997 \equiv 21[24]}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $23 \equiv 21[24]$

يعني : $24 / 2$ و هذا مستحيل بطبيعة الحال

و بالتالي : لا وجود لأعداد a_1 و a_2 و... و a_{23} أولية مع 24

$$\text{و تحقق : } a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{23}^2 = 23997$$

التمرين الثالث : (5,8 ن)

■ (I) ① ①

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2)e^{\frac{-2}{x}} = 2 \times e^{-\infty} = 0 = f(0)$$

إذن f متصلة على اليمين في الصفر .

■ (I) ① ②

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+2)e^{\frac{-2}{x}}}{x} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{\frac{-2}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-2}{x}} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-2}{x}\right) e^{\frac{-2}{x}} \\ &= 0 - \lim_{u \rightarrow -\infty} u e^u \\ &= 0 - 0 = 0 = f'_d(0) \end{aligned}$$

و أشير إلى أنه يوجد شكل آخر للخاصية المذكورة و هو كالتالي :

$$\begin{cases} m/a \\ n/a \\ m \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow mn/a$$

■ (II) ①

لدينا a عدد صحيح طبيعي بحيث : $a \wedge 24 = 1$

نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان a عددا أوليا.

لدينا : $2 \wedge 24 \neq 1$ و $3 \wedge 24 \neq 1$ و $5 \wedge 24 \neq 1$

إذن : a عدد أولي أكبر من 5

و منه حسب نتائج الفقرة (I) : $a^2 \equiv 1[24]$

الحالة الثانية : إذا كان a غير أولي

ليكن $(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k})$ تفكيك العدد a إلى جداء عوامل أولية

بما أن $a \wedge 24 = 1$ أي : $a \wedge (2^3 3^1) = 1$

فإن : جميع الأعداد الأولية p_1 و p_2 و... و p_k تخالف 2 و تخالف 3

و منه : $p_i \geq 5$; $(\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket)$

إذن يمكننا استعمال نتائج الفقرة الأولى من التمرين.

لدينا : $p_1^2 \equiv 1[24]$ إذن : $(p_1^2)^{n_1} \equiv 1[24]$

و لدينا : $p_2^2 \equiv 1[24]$ إذن : $(p_2^2)^{n_2} \equiv 1[24]$

و لدينا : $p_3^2 \equiv 1[24]$ إذن : $(p_3^2)^{n_3} \equiv 1[24]$

$\vdots$

$\vdots$

و لدينا : $p_k^2 \equiv 1[24]$ إذن : $(p_k^2)^{n_k} \equiv 1[24]$

عند المرور إلى الجداء نحصل على : $p_1^{2n_1} p_2^{2n_2} p_3^{2n_3} \dots p_k^{2n_k} \equiv 1[24]$

و منه : $(p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_k^{n_k})^2 \equiv 1[24]$

و بالتالي : $\boxed{a^2 \equiv 1[24]}$

■ (I) ① ج

ليكن x عنصرا من $[0, +\infty[$

لدينا : $f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}}$

إن : $f'(x) = e^{\frac{-2}{x}} + \left(\frac{-2}{x}\right)' (x+2)e^{\frac{-2}{x}}$

$$\Leftrightarrow f'(x) = e^{\frac{-2}{x}} + \frac{2}{x^2} (x+2)e^{\frac{-2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{2x+4+x^2}{x^2}\right) e^{\frac{-2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{x^2+2x+1+3}{x^2}\right) e^{\frac{-2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{(x+1)^2+3}{x^2}\right) e^{\frac{-2}{x}} > 0$$

إن f دالة تزايدية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$.

■ (I) ② ا

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(x+2)}_{+\infty} \underbrace{e^{\frac{-2}{x}}}_{1} = +\infty$$

■ (I) ② ب

ليكن t عددا حقيقيا موجبا

$$\begin{cases} \varphi(t) = 1-t \\ \psi(t) = 1-t + \frac{t^2}{2} \\ h(t) = e^{-t} \end{cases} \quad \text{نضع :}$$

$$\begin{cases} \varphi'(t) = -1 \\ \psi'(t) = t-1 \\ h'(t) = -e^{-t} \end{cases} \quad \text{إن :}$$

لدينا : $t \geq 0$: إن $-t \leq 0$

ومنه : $-e^{-t} \leq -1$: يعني $h'(t) \leq \varphi'(t)$

و بما أن : $h(0) = \varphi(0) = 1$

فإن : $\forall t \in [0, +\infty[; h(t) \leq \varphi(t)$

(1) يعني : $\forall t \in [0, +\infty[; e^{-t} \leq 1-t$

من النتيجة (1) نستنتج أن : $-e^{-t} \geq t-1$

إن : $h'(t) \geq \psi'(t)$

و بما أن : $h(0) = \psi(0) = 1$

فإن : $h(t) \geq \psi(t)$

(2) يعني : $\forall t \in [0, +\infty[; e^{-t} \geq 1-t + \frac{t^2}{2}$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\forall t \in [0, +\infty[; 1-t \leq e^{-t} \leq 1-t + \frac{t^2}{2}$$

و بالتالي : $\forall t \in [0, +\infty[; 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$

■ (I) ② ج

ليكن $x > 0$ إذن $\frac{2}{x} > 0$

$$0 \leq e^{\frac{-2}{x}} + \frac{2}{x} - 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^2$$

$$\text{ومنه : } \left(1 - \frac{2}{x}\right) \leq e^{\frac{-2}{x}} \leq \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$$

نضرب طرفي هذا التأيير في العدد الموجب $(x+2)$ نحصل على :

$$(x+2) \left(1 - \frac{2}{x}\right) \leq (x+2) e^{\frac{-2}{x}} \leq (x+2) \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على : $\left(x - \frac{4}{x}\right) \leq f(x) \leq \left(x - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right)$

$$\text{إن : } \frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{-2}{x} + \frac{4}{x^2} \quad (\forall x > 0)$$

■ (I) ② د

$$\text{لدينا : } \frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{-2}{x} + \frac{4}{x^2} \quad (\forall x > 0)$$

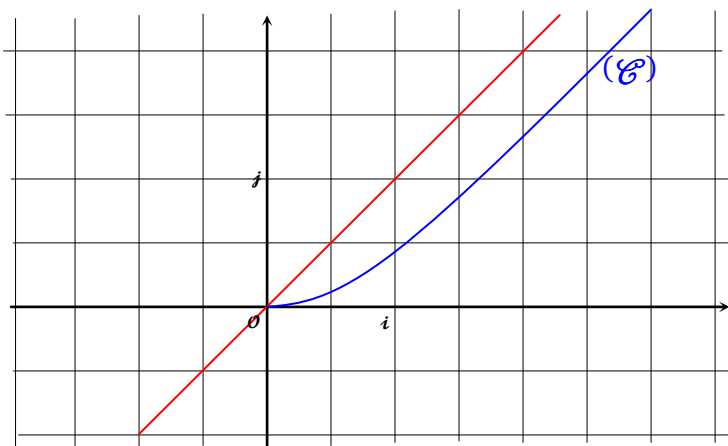
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}\right) = 0 \quad \text{بما أن :}$$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0 \quad \text{فإن :}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و لدينا حسب السؤال ② ا}$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\mathcal{E})$ يقبل مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$

■ (I) ③



■ (II) ③ ٣

$$\begin{aligned} & \left(f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} \right) - \left(f_n(x) - \frac{2}{n} \right) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} + e^{\frac{-2}{x}} \left(\frac{-2}{n(n+1)} \right) \\ &= \frac{-2}{n(n+1)} \left(e^{\frac{-2}{x}} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{-2}{x} < 0 \quad \text{و لدينا } x > 0 \text{ إذن}$$

$$\text{و منه : } e^{\frac{-2}{x}} < 1 \text{ يعني : } e^{\frac{-2}{x}} - 1 < 0$$

$$\text{و بالتالي : } \frac{-2}{n(n+1)} \left(e^{\frac{-2}{x}} - 1 \right) > 0$$

و منه :

$$(\forall x > 0), (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$$

■ (II) ③ ٣

$$f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} \right) > \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f_n(x) - \frac{2}{n} \right)$$

$$\Leftrightarrow 0 - f_n(a_{n+1}) > 0 - f_n(a_n)$$

$$\Leftrightarrow f_n(a_{n+1}) < f_n(a_n)$$

و بما أن f دالة تزايدية قطعاً فإن : $a_{n+1} < a_n$

و منه المتتالية $(a_n)_n$ تناقصية . و بما أنها مصغورة بالعدد 0 فإنها متقاربة.

■ (II) ③ ٣

$$f_n(a_n) = \frac{2}{n} \quad \text{لدينا :}$$

$$\left(a_n + \frac{2}{n} \right) e^{\frac{-2}{a_n}} = \frac{2}{n} \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{\left(a_n + \frac{2}{n} \right)}{e^{\frac{2}{a_n}}} = \frac{2}{n} \quad \text{يعني :}$$

$$2e^{\frac{2}{a_n}} = n \left(a_n + \frac{2}{n} \right) \quad \text{و منه :}$$

$$2e^{\frac{2}{a_n}} = na_n + 2 \quad \text{أي :}$$

$$2e^{\frac{2}{a_n}} - 2 = na_n \quad \text{و منه :}$$

■ (II) ① ١

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(x + \frac{2}{n} \right) e^{\frac{-2}{x}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2}{nx} \right) e^{\frac{-2}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-2}{x}} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{n} \frac{1}{\left(\frac{e^{\frac{2}{x}}}{2} \right)} \\ &= 0 + \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{+\infty} \right) = 0 \end{aligned}$$

إذن f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر. و لدينا : $(f_n)'_d(0) = 0$

■ (II) ② 2

ليكن x عنصراً من $[0, +\infty[$.

$$f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n} \right) e^{\frac{-2}{x}} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \left(e^{\frac{-2}{x}} \right) + \left(\frac{-2}{x} \right) \left(x + \frac{2}{n} \right) e^{\frac{-2}{x}} \quad \text{و منه :} \\ &= \left(e^{\frac{-2}{x}} \right) + \frac{2}{x^2} \left(x + \frac{2}{n} \right) e^{\frac{-2}{x}} \\ &= \left(1 + \frac{2}{x^2} \left(x + \frac{2}{n} \right) \right) e^{\frac{-2}{x}} > 0 \end{aligned}$$

إذن f_n دالة تزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$.

■ (II) ③ ٣

لدينا f_n دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$.

إذن f_n تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو المجال $]0, +\infty[$

$$\text{و لدينا : }]0, +\infty[= \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right[$$

$$\varphi_n(x) = f_n(x) - \frac{2}{n} \quad \text{نضع :}$$

لدينا : φ دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

$$\varphi'_n(x) = f'_n(x) > 0 \quad \text{لأن}$$

إذن φ_n تقابل من المجال $]0, +\infty[$ نحو المجال

$$\left] \varphi_n(0) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) \right[=]0, +\infty[$$

و من هذا التقابل نستنتج وجود عدد وحيد a_n من المجال $]0, +\infty[$

$$\varphi_n(a_n) = 0 \quad \text{بحيث :}$$

$$f_n(a_n) = \frac{2}{n} \quad \text{يعني :}$$

■ (III) ③

نفترض أن : $a \neq 0$

$$2e^{\frac{2}{a_n}} - 2 = na_n \quad \text{لدينا}$$

و لدينا : $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = (+\infty) \times a = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2e^{\frac{2}{a_n}} - 2 \right) = 2e^{\frac{2}{a}} - 2 \quad \text{و}$$

$$2e^{\frac{2}{a}} - 2 = +\infty \quad \text{إذن}$$

و هذا تناقض إذن : $a = 0$

■ (III) ① (i)

ليكن x عددا حقيقيا موجبا بحيث : $x < 2x$

و ليكن t عددا حقيقيا بحيث : $x \leq t \leq 2x$

بما أن f تزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$

$$f(x) \leq f(t) \leq f(2x) \quad \text{فإن}$$

و بما أن f متصلة على المجال $[0, +\infty[$.

$$\int_x^{2x} f(x) dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(2x) dt \quad \text{فإن}$$

$$f(x)[t]_x^{2x} \leq F(x) \leq f(2x)[t]_x^{2x} \quad \text{يعني}$$

$$xf(x) \leq F(x) \leq xf(2x) \quad \text{أي}$$

■ (III) ① (b)

$$F(x) \geq xf(x) \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \quad \text{و منه}$$

■ (III) ② (i)

ليكن x عنصراً من $[0, +\infty[$

لدينا f دالة متصلة على $[0, +\infty[$

$$\psi'(x) = f(x) \quad \text{إذن } f \text{ تقبل دالة أصلية } \psi \text{ بحيث}$$

لدينا :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt = \int_x^0 f(t) dt + \int_0^{2x} f(t) dt \\ = -\psi(x) + \psi(2x)$$

بما أن : $x \rightarrow 2x$ و $x \rightarrow \psi(x)$ قابليتين للإشتقاق على المجال $]0, +\infty[$

فإن F قابلة للإشتقاق على المجال $]0, +\infty[$.

و لدينا كذلك : $xf(x) \leq F(x) \leq xf(2x)$

$$f(x) \leq \frac{F(x)}{x} \leq f(2x) \quad \text{يعني}$$

$$f(x) \leq \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \leq f(2x) \quad \text{يعني}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(2x) = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \right) = 0 \quad \text{و منه}$$

و بالتالي : f قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر و $F'_d(0) = 0$

■ (III) ② (b)

لدينا حسب السؤال (i)

$$F(x) = \psi(2x) - \psi(x)$$

$$F'(x) = 2\psi'(2x) - \psi'(x) \quad \text{إذن}$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = 2(2x+2)e^{\frac{-1}{x}} - (x+2)e^{\frac{-2}{x}}$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = e^{\frac{-2}{x}} \left(2(2x+2)e^{\frac{1}{x}} - (x+2) \right)$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = e^{\frac{-2}{x}} \left((4x+4)e^{\frac{1}{x}} - (x+2) \right)$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = e^{\frac{-2}{x}} \left((x+2+3x+2)e^{\frac{1}{x}} - (x+2) \right)$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = e^{\frac{-2}{x}} \left((x+2)e^{\frac{1}{x}} + (3x+2)e^{\frac{1}{x}} - (x+2) \right)$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = e^{\frac{-2}{x}} \left((x+2) \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) + (3x+2)e^{\frac{1}{x}} \right)$$

و لدينا كذلك حسب السؤال (i) ② $F'_d(0) = 0$

■ (1) ب

ننطلق من الكتابة : $f(z) = z$

$$\Leftrightarrow \frac{iz - 1}{z^2 + 2z + 1} = z$$

$$\Leftrightarrow z^3 + 2z^2 + z = iz - 1$$

$$\Leftrightarrow z^3 + 2z^2 + (1 - i)z + 1 = 0$$

هذه المعادلة تقبل حلا خاصا و هو العدد 1 و ذلك حسب السؤال (i)

ننجز القسمة الأقليدية للحدودية $z^3 + 2z^2 + (1 - i)z + 1$ على الحدودية $(z - i)$ نحصل على :

$$(z - i)(z^2 + (2 + i)z + i) = 0$$

بتعميل ثلاثية الحدود $z^2 + (2 + i)z + i$ نحصل على :

$$\Delta = (2 + i)^2 - 4i = 3$$

إذن ثلاثية الحدود تقبل جذرين z_1 و z_2 :

$$z_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{و} \quad z_2 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

و بالتالي : المعادلة $f(z) = z$ تقبل ثلاثة حلول و هي : $z_0 = i$ و z_1 و z_2 .

■ (2) ا

$$\begin{aligned} z_1 + 1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \\ &= e^{-\frac{i\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\frac{11\pi}{6} \equiv \frac{-\pi}{6} [2\pi] \quad \text{و بما أن :}$$

$$(1) \quad z_1 + 1 = e^{-\frac{\pi i}{6}} = e^{\frac{11\pi i}{6}} \quad \text{فإن :}$$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned} z_2 + 1 &= \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = e^{-\frac{5i\pi}{6}} \end{aligned}$$

■ (III) 3

بما أن : $x > 0$ فإن : $e^{\frac{1}{x}} - 1 > 0$

$$\text{و } (3x + 2) > 0 \quad \text{و } (x + 2) > 0$$

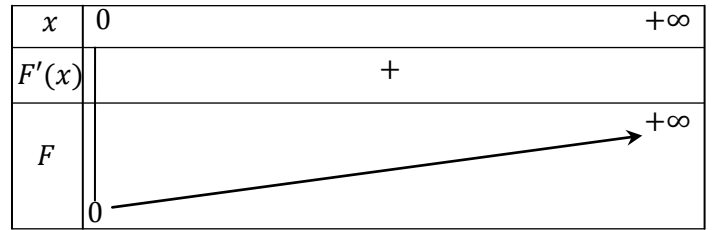
$$\text{و منه : } F'(x) > 0$$

و بالتالي : F دالة تزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$.

$$\text{و لدينا : } xf(x) \leq F(x) \leq xf(2x)$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xf(2x) = 0$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$$



التمرين الرابع : (4,5 ن)

■ (1) ا

ننطلق من الكتابة : $f(iy) = iy$

$$\Leftrightarrow \frac{i(iy) - 1}{(iy + 1)^2} = iy$$

$$\Leftrightarrow iy(iy + 1)^2 = -y - 1$$

$$\Leftrightarrow iy(-y^2 + 2iy + 1) = -y - 1$$

$$\Leftrightarrow -iy^3 + iy - 2y^2 = -y - 1$$

$$\Leftrightarrow i(-y^3 + y) + (1 - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-y^3 + y) = 0 \\ (1 - y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(1 - y)(1 + y) = 0 \\ (1 - y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ أو } y = 1 \text{ أو } y = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = 1$$

و بالتالي : $f(i) = i$

نستعين بالعلاقة المثلثية التالية : $\sin(2\varphi) = 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)$
نحصل على :

$$\sin \theta = \left(\frac{\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \theta \equiv \frac{17\pi}{12}[2\pi]$$

$$\text{و بالتالي : } z_1 = 2 \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) e^{\frac{17i\pi}{12}}$$

ليكن $z_2 = se^{i\varphi}$ لدينا حسب النتيجة (2) : $z_2 + 1 = e^{\frac{7i\pi}{6}}$

$$\Leftrightarrow z_2 + 1 = e^{\frac{7i\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = e^{\frac{7i\pi}{6}} - 1$$

$$\Leftrightarrow se^{i\varphi} = e^{\frac{7i\pi}{6}} - 1$$

$$\Leftrightarrow (S_2) : \begin{cases} s \cos \varphi = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 1 \\ s \sin \varphi = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \end{cases}$$

بنفس الطريقة نحسب أولا s .

$$s^2 = 2 \left(1 - \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right) \Leftrightarrow s = \pm 2 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

بنفس الطريقة

نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائما عددا حقيقيا موجبا

$$\text{إذن : } s = 2 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

نعوض s بقيمته في المعادلة الثانية من النظام (S_2) نحصل على :

$$2 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \sin \varphi = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)} \right) = \frac{\text{بنفس الطريقة}}{\text{بنفس الطريقة}} = \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi \equiv \frac{13\pi}{12}[2\pi] \quad \text{و منه :}$$

$$\text{و بالتالي : } z_2 = 2 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) e^{\frac{13i\pi}{12}}$$

$$\text{و بما أن : } \frac{7\pi}{6} \equiv \frac{-5\pi}{6}[2\pi]$$

$$(2) \quad z_2 + 1 = e^{\frac{-5i\pi}{6}} = e^{\frac{7i\pi}{6}} \quad \text{فإن :}$$

■ 2 ب

ليكن $z_1 = re^{i\theta}$ لدينا حسب النتيجة (1) : $z_1 + 1 = e^{\frac{11\pi}{6}}$

$$\Leftrightarrow z_1 + 1 = e^{\frac{11i\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow re^{i\theta} = e^{\frac{11i\pi}{6}} - 1$$

$$\Leftrightarrow (S_1) : \begin{cases} r \cos \theta = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 1 \\ r \sin \theta = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \end{cases}$$

لنحسب أولا r

$$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = \left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 1 \right)^2 + \left(\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right)^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 = \cos^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) + 1 - 2 \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 2 \left(1 - \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right)$$

نستعين بالعلاقة المثلثية التالية : $\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$

نحصل على :

$$\Leftrightarrow r^2 = 2 \left(1 - 2 \cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) + 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 4 \left(1 - \cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right)$$

ثم نستعين بعد ذلك بالعلاقة المثلثية التالية : $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$$\text{نحصل على : } r^2 = 4 \sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$\text{و منه : } r = \pm 2 \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائما عددا حقيقيا موجبا

$$\text{إذن : } r = 2 \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

نعوض r بقيمته في المعادلة الثانية من النظام (S_1) نحصل على :

$$2 \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \sin \theta = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)} \right)$$

■ (3) ج

لدينا : $z = e^{i\alpha}$

في هذا السؤال يجب استحضار جميع قواعد الحساب المثلثي.

$$f(z) = f(e^{i\alpha}) = \frac{ie^{i\alpha} - 1}{(e^{i\alpha} + 1)^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$(e^{i\alpha} + 1)^2 = (\cos \alpha + i \sin \alpha + 1)^2 \quad \text{ولدينا :}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (e^{i\alpha} + 1)^2 &= (\cos \alpha + i \sin \alpha + 1)^2 \\ &= \left(2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 + 2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1\right)^2 \\ &= \left(2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 \\ &= \left(2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right)^2 \\ &= 4 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \\ &= 4 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\alpha} \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{ie^{i\alpha} - 1}{4 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\alpha}} = \left(\frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) \left(\frac{ie^{i\alpha} - 1}{2e^{i\alpha}}\right) \quad \text{إذن :}$$

$$\left(\frac{ie^{i\alpha} - 1}{2e^{i\alpha}}\right) : \text{سنحاول الآن إيجاد الشكل المثلثي للتعبير :}$$

$$\left(\frac{ie^{i\alpha} - 1}{2e^{i\alpha}}\right) = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi) \quad \text{نضع :}$$

$$\Leftrightarrow e^{-i\alpha} (ie^{i\alpha} - 1) = 2r \cos(\varphi) + 2i r \sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow i - e^{-i\alpha} = 2r \cos(\varphi) + 2i r \sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow i - \cos(-\alpha) - i \sin(-\alpha) = 2r \cos(\varphi) + 2i r \sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow i - \cos(\alpha) + i \sin(\alpha) = 2r \cos(\varphi) + 2i r \sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow -\cos(\alpha) + i(1 + \sin(\alpha)) = 2r \cos(\varphi) + i(2r \sin(\varphi))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\cos(\alpha) = 2r \cos(\varphi) \\ 1 + \sin(\alpha) = 2r \sin(\varphi) \end{cases}$$

$$(2r \cos \varphi)^2 + (2r \sin \varphi)^2 = 4r^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow (-\cos \varphi)^2 + (1 + \sin(\alpha))^2 = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + \sin(\alpha)) = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1 - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 4r^2$$

■ (3) ا

لدينا : $z = e^{i\alpha}$ إذن : $|z| = 1$ و منه : $z\bar{z} = 1$

لدينا :

$$\begin{aligned} \overline{f(z)} &= \overline{\left(\frac{iz - 1}{(z + 1)^2}\right)} = \frac{-i\bar{z} - 1}{(\bar{z} + 1)^2} = \frac{\bar{z}i(-1 + iz)}{\bar{z}^2(1 + z)^2} \\ &= iz \left(\frac{-1 + iz}{(1 + z)^2}\right) \\ &= izf(z) \end{aligned}$$

■ (3) ب

ننتقل من الكتابة : $f(z) + \overline{f(z)} = 0$

$$\Leftrightarrow f(z) + izf(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + iz)f(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + iz) = 0 \\ f(z) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + iz = 0 \\ iz - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z = -i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\alpha} = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ e^{i\alpha} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

بما أن : $0 \leq \alpha \leq \pi$ إذن α تأخذ قيمة وحيدة و هي : $\frac{\pi}{2}$

$$\alpha \equiv \frac{\pi}{2} \quad \text{و بالتالي :}$$

$$(2) \quad \varphi \equiv \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) [2\pi] \quad \text{إذن :}$$

$$\left(\frac{ie^{i\alpha} - 1}{2e^{i\alpha}} \right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{من (1) و (2) نستنتج أن :}$$

$$f(z) = \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right)}_{r \text{ المعيار}} e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{و بالتالي :} \quad \varphi \text{ العمدة}$$

■ (4)

بما أن $|z| = 1$ فإن z يكتب على الشكل $e^{i\alpha}$.

$$\Re(f(z)) = \frac{1}{2} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \Re\left(\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \times \frac{\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 1$$

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cancel{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \cancel{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 = 4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1 - 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1\right) = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 4r^2$$

$$\Leftrightarrow r = \pm \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

بما أن معيار عدد عقدي يكون دائما عدد موجبا

$$0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} < \pi \quad \text{و بما أن :}$$

$$0 \leq \alpha < \pi \quad \text{لأن :}$$

$$(1) \quad r = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{فإن :}$$

نعوض r بقيمته في المعادلة الأولى من النظام نجد :

$$-\cos(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi - \alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\pi - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\varphi) = \frac{2\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{و لدينا :}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{2\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)} \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\cancel{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}} \quad \text{و منه :}$$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1}{2} \quad \text{أو} \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \equiv \frac{2\pi}{3} [\pi] \quad \text{أو} \quad \frac{\alpha}{2} \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \alpha \equiv \frac{4\pi}{3} [\pi] \quad \text{أو} \quad \alpha \equiv \frac{2\pi}{3} [\pi]$$

$$\Leftrightarrow z_1 = e^{\frac{4i\pi}{3}} \quad \text{أو} \quad z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أو} \quad z_2 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■