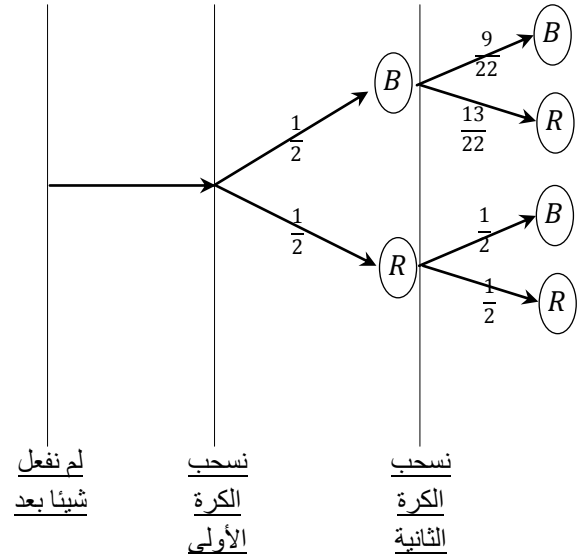


التمرين الأول : (2,5 ن)

1 ■

النموذج الأمثل لحل هذا التمرين هو شجرة الاحتمالات .
من معطيات التجربة العشوائية نستنتج شجرة الاحتمالات التالية :



لدينا حسب الشجرة : $P(R \cap R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

2 ■

لدينا حسب الشجرة : $P(B \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{22} = \frac{9}{44}$

3 ■

لدينا حسب الشجرة :

$$P(\text{لونين مختلفين}) = P(B \cap R) + P(R \cap B) \\ = \frac{1}{2} \times \frac{13}{22} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ = \frac{6}{11}$$

4 ■

نستعمل الاحتمال الشرطي التالي :

$$p_{B_2}(B_1) = \frac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{9}{22}}{\frac{1}{2} \times \frac{9}{22} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

التمرين الثاني : (3,0 ن)

1 ■

نلاحظ في البداية أن (1,1) حل خاص للمعادلة (E)

لأن : $3 \times 1 - 2 \times 1 = 1$ (*)

ليكن (x, y) الحل العام للمعادلة (E) .

إن : $3x - 2y = 1$ (**)

ننجز عملية الفرق بين المتساويتين (*) و (**) نحصل على :

$$3(x - 1) - 2(y - 1) = 0$$

ومن : $3(x - 1) = 2(y - 1)$ إذن : $3 / 2(y - 1)$ $\otimes$

و بما أن : $3 \wedge 2 = 1$ فإنه حسب (Gauss) : $3 / (y - 1)$

إن : $y = 3k + 1$; $(\exists k \in \mathbb{Z})$

نعوض y بقيمته في المتساوية $\otimes$ نحصل على : $3(x - 1) = 2(3k)$

يعني : $x = 2k + 1$

عكسيا : لدينا $3(2k + 1) - 2(3k + 1) = 1$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} = \{(2k + 1 ; 3k + 1) \quad / \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

2 ■

لدينا :

$$3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 42n + 9 - 42n - 8 = 1$$

إن (14n + 3 ; 21n + 4) حل للمعادلة (E) .

2 ■

بما أن : $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1$

فإنه حسب (Bezout) : $(14n + 3) \wedge (21n + 4) = 1$

3 ■

ليكن $(21n + 4) \wedge (2n + 1) = d$

باستعمال خوارزمية إقليدس نحصل على :

$$\begin{array}{r|l} (21n + 4) & (2n + 1) \\ (n - 6) & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} (2n + 1) & (n - 6) \\ 13 & 2 \end{array}$$

من هاتين الإقليديتين نستنتج أن :

$$(21n + 4) \wedge (2n + 1) = (2n + 1) \wedge (n - 6)$$

$$= (n - 6) \wedge 13$$

و لدينا : $(21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3) = 1$

يعني :

$$(n - 1)(21n + 4) \wedge (n - 1)(2n + 1)(14n + 3) = (n - 1)$$

و منه : $A \wedge B = (n - 1)$

خلاصة :

$$(\forall n \geq 2) ; A \wedge B = \begin{cases} 13(n - 1) ; & \text{si } n \equiv 6[13] \\ (n - 1) ; & \text{si } n \not\equiv 6[13] \end{cases}$$

التمرين الثالث : (4,0 ن)

■ (1) أ

نضع : $z = x + iy$

ننطلق من الكتابة : $z^2 - \bar{z}^2 = a^2 - \bar{a}^2$

$$\Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z}) = (a - \bar{a})(a + \bar{a})$$

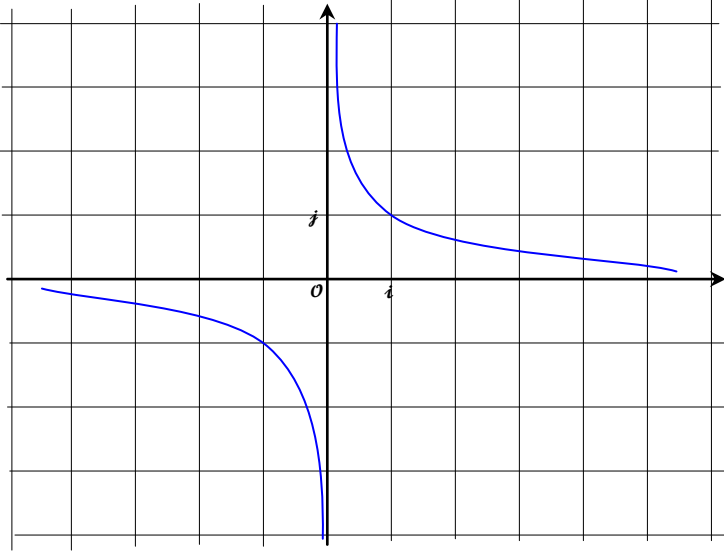
$$\Leftrightarrow (2iy)(2x) = (2i\beta)(2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow xy = \alpha\beta$$

و منه المجموعة $(\mathcal{H})$ هذلول معادلته : $y = \frac{\alpha\beta}{x}$

■ (1) ب

في حالة $a = (1 + i)$ لدينا $(\mathcal{H})$ هذلول معادلته : $y = \frac{1}{x}$



إذن : $d = (n - 6) \wedge 13$ (*)

و منه : $d / 13$

و نعلم أن 13 عدد أولي إذن : $d = 13$ أو $d = 1$

■ (3) ب

إذا كان $d = 13$ فإنه حسب (*) : $d / (n - 6)$

(لأن d قاسم مشترك لـ 13 و $(n - 6)$)

أي : $13 / (n - 6)$ و منه : $n \equiv 6[13]$

■ (4) أ

نضع : $A = P(n) = 21n^2 - 17n - 4$

و : $B = Q(n) = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

لدينا : $P(1) = Q(1) = 0$

إذن : 1 جذر للحدوديتين $P(n)$ و $Q(n)$ في $\mathbb{Z}$.

و منه : $P(n)$ و $Q(n)$ تقبلان القسمة على : $(n - 1)$

■ (4) ب

بالاستعانة بالقسمة الأقليدية نحصل على :

$$A = (n - 1)(21n + 4)$$

$$B = (n - 1)(28n^2 + 20n + 3)$$

بعد تعميل ثلاثية الحدود $(28n^2 + 20n + 3)$ نحصل على :

$$B = (n - 1)(2n + 1)(14n + 3)$$

تذكير بخاصية مهمة :

$$c \wedge a = 1 \Rightarrow (\forall b \in \mathbb{Z}) ; a \wedge b = a \wedge (bc)$$

ليكن : $(21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3) = d$

لدينا حسب السؤال (2) ب $(14n + 3) \wedge (21n + 4) = 1$

إذن حسب الخاصية المذكورة :

$$(21n + 4) \wedge (2n + 1) = (21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3)$$

و منه : $(21n + 4) \wedge (2n + 1) = d$

إذن حسب السؤال (3) أ $d = 13$ أو $d = 1$

الحالة الأولى : إذا كان $d = 13$.

إذن حسب السؤال (3) ب : $n \equiv 6[13]$

و لدينا : $(21n + 4) \wedge (2n + 1)(14n + 3) = 13$

يعني :

$$(n - 1)(21n + 4) \wedge (n - 1)(2n + 1)(14n + 3) = 13(n - 1)$$

و منه : $A \wedge B = 13(n - 1)$

الحالة الثانية : إذا كان $d = 1$ فإن : $n \not\equiv 6[13]$

$$\bar{u} = \frac{4a\bar{a}}{u} \quad \text{لدينا حسب المعادلة الثانية :}$$

نعوض $\bar{u}$ بقيمته في المعادلة الأولى نحصل على :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u+2a) = \frac{4a\bar{a}}{u} \left(\frac{4a\bar{a}}{u} + 2\bar{a} \right) \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 2au - \left(\frac{4a\bar{a}}{u} \right)^2 - 2\bar{a} \left(\frac{4a\bar{a}}{u} \right) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^4 + 2au^3 - 16a^2\bar{a}^2 - 8a\bar{a}^2u = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u^4 - 8a\bar{a}^2u) + (2au^3 - 16a^2\bar{a}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u^3 - 8a\bar{a}^2) + 2a(u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S') \quad \begin{cases} (u+2a)(u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0 \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

■ (3) ب

لنحل النظام (S') بحيث : $a = re^{i\theta}$

لدينا حسب المعادلة الثانية من النظام (S') :

$$(u+2a)(u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (u+2a) = 0 \quad \text{أو} \quad (u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow u = -2re^{i\theta} \quad \text{أو} \quad u^3 = 8r^3e^{i\theta}$$

حلول المعادلة : $u^3 = 8r^3e^{-i\theta}$ هي الجذور النونية من الدرجة الثالثة للعدد للعقدي $8r^3e^{-i\theta}$ و التي تكتب بصفة عامة على شكل :

$$k\{0,1,2\} \text{ مع } u_k = \left[\sqrt[3]{8r^3}, \frac{-\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right]$$

$$u_0 = \left[2r ; \frac{-\theta}{3} \right] = 2re^{\frac{-\theta}{3}} \quad \text{ولدينا :}$$

$$u_1 = \left[2r ; \frac{-\theta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right] = 2re^{\frac{-\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}}$$

$$u_2 = \left[2r ; \frac{-\theta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right] = 2re^{\frac{-\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}}$$

$$2re^{\frac{-\theta}{3}}$$

$$-2re^{-i\theta}$$

إذن حلول النظام هي :

$$2re^{\frac{-\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}}$$

$$2re^{\frac{-\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}}$$

■ (2) ا

ليكن : $z = x + iy$

ننتقل من الكتابة : $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a}$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - (z\bar{a} + a\bar{z}) + a\bar{a} = 4a\bar{a}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2) - (2\alpha x + 2\beta y) + \alpha^2 + \beta^2 = (2|a|)^2$$

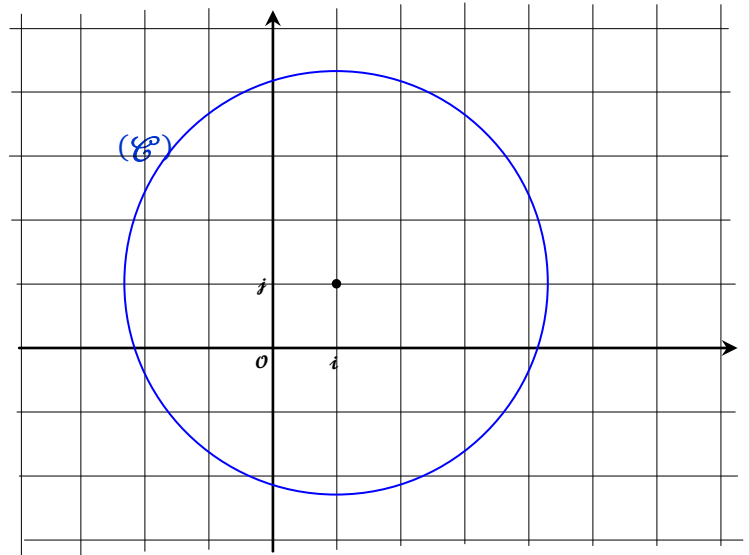
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + (y^2 - 2\beta y + \beta^2) = (2|a|)^2$$

$$\Leftrightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (2|a|)^2$$

إذن : $(\mathcal{C})$ دائرة مركزها النقطة $C(\alpha, \beta)$ و شعاعها $r = 2|a|$

■ (2) ا

في حالة $a = (1 + i)$ لدينا $(\mathcal{C})$ دائرة مركزها $C(1,1)$ و شعاعها $2\sqrt{2}$



■ (3) ا

لدينا : $u = z - a$ إذن : $\bar{u} = \bar{z} - \bar{a}$

$$\begin{cases} z^2 - \bar{z}^2 = a^2 - \bar{a}^2 \\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases} \quad \text{ننتقل من الكتابة :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2 \\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (z-a)(z+a) = (\bar{z}-\bar{a})(\bar{z}+\bar{a}) \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u+2a) = \bar{u}(\bar{u}+2\bar{a}) \\ u\bar{u} = 4a\bar{a} \end{cases}$$

■ 1 (ب)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(4e^{-x \ln 2} - \frac{2}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{بما أن :}$$

فإن : (ع) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2 \quad \text{و بما أن :}$$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = -2$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$

■ 2 (ا) (ب)

$$f'(x) = 4(1 - x \ln 2)e^{-x \ln 2}$$

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 4e^{-x \ln 2} > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1 - x \ln 2)$

$$f'(x) = 0 \quad \text{فإن} \quad x = \frac{1}{\ln 2} \quad \text{إذا كان :}$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{فإن} \quad x > \frac{1}{\ln 2} \quad \text{إذا كان :}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{فإن} \quad x < \frac{1}{\ln 2} \quad \text{إذا كان :}$$

$$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{4}{e \ln 2} - 2 \quad \text{و لدينا :}$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\frac{4}{e \ln 2} - 2$	-2

■ 2 (ج)

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f :

$$\left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right] \quad f \text{ دالة متصلة و تزايدية قطعاً على}$$

$$\text{إذن } f \text{ تقابل من المجال } \left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right] \text{ نحو المجال } \left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right]$$

$$\text{و لدينا : } f\left(\left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right]\right) = \left] -\infty, \frac{4}{e \ln 2} - 2 \right] \approx \left] -\infty, \frac{1}{10} \right]$$

$$\text{و بما أن : } 0 \in \left] -\infty, \frac{1}{10} \right]$$

$$\text{إذن } 0 \text{ يمتلك سابقاً واحداً وحيداً بالتقابل } f \text{ في المجال } \left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right]$$

$$\text{و لدينا : } f(1) = 4e^{-\ln 2} - 2 = 0$$

$$\text{و } 1 \in \left] -\infty, \frac{1}{\ln 2} \right]$$

و نعلم أن : $z = u + \mathfrak{a}$

إذن القيم التي يأخذها z هي :

$$2re^{-\frac{\theta}{3}} + re^{i\theta}$$

$$-re^{-i\theta}$$

$$2re^{-\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}} + re^{i\theta}$$

$$2re^{-\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}} + re^{i\theta}$$

■ 3 (ج)

نضع : $z_0(A)$ و $z_1(B)$ و $z_2(C)$

نريد أن نبرهن على أن المثلث ABC متساوي الأضلاع .

لدينا :

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{2r - 2rj}{2rj - 2rj} = \frac{1 - j}{j - j} = \frac{1 - j}{-\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

$$\arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \quad \text{و} \quad \left|\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right| \equiv 1 \quad \text{إذن :}$$

و منه :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \quad \text{و} \quad |z_C - z_A| = |z_B - z_A|$$

و بالتالي : ABC مثلث متساوي الأضلاع (غير مباشر)

التمرين الرابع : (10 ن)

الجزء الأول

■ 1 (أ)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4xe^{-x \ln 2} - 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(\frac{4}{\ln 2}\right) \frac{1}{\left(\frac{e^{x \ln 2}}{x \ln 2}\right)} - 2 \right)$$

$$= \left(\frac{4}{\ln 2}\right) \left(\frac{1}{0^-}\right) - 2 = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{4}{\ln 2}\right) \frac{1}{\left(\frac{e^{x \ln 2}}{x \ln 2}\right)} - 2 \right)$$

$$= \left(\frac{4}{\ln 2}\right) \left(\frac{1}{+\infty}\right) - 2 = \boxed{-2}$$

■ (3) ب

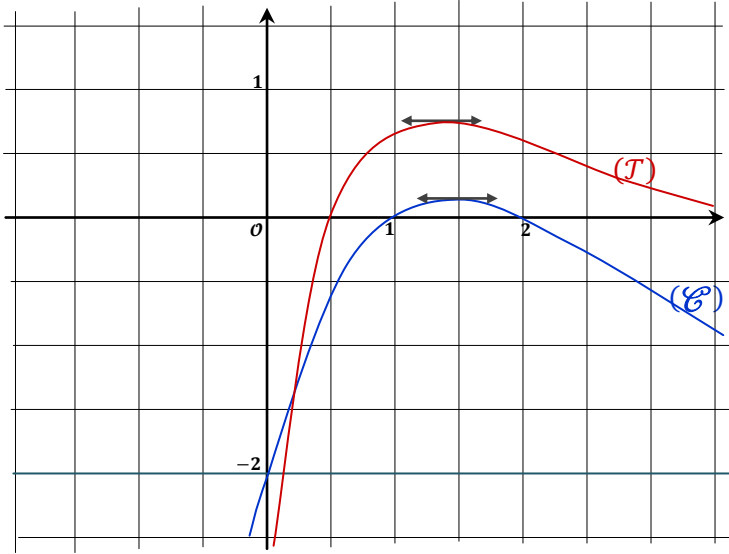
قبل رسم (T) أضيف نقطة تقاطع (T) مع محور الأفاسيل و التي يحقق أقصولها المعادلة $g(x) = 0$

لنحل المعادلة : $g(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2x)}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x) = \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



الجزء الثاني

■ (1) أ

لدينا : $g'\left(\frac{e}{2}\right) = 0$

إذن (T) يقبل مماسا أفقيا في النقطة $\Omega\left(\frac{e}{2}; \frac{2}{e}\right)$

و منه المستقيم $(\Delta): y = \frac{2}{e}$ يقطع (T) في نقطة واحدة و هي Ω

و لدينا حسب الرسم المبياني : (T) مقعر

إذن كل مستقيم $y = k$: (D) متواجد بين (Δ) و محور الأفاسيل يقطع (T) في نقطتين

و بالتالي : المعادلة $g(x) = k$ تقبل حلين α و β مختلفين بشرط

$$0 < k < \frac{2}{e} \quad \text{أن يكون}$$

بما أن : $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ و α و β مختلفين فإن أحدهما أصغر

$$\frac{1}{2} < \alpha < \beta \quad \text{من الآخر ونضع}$$

و لدينا كذلك حسب جدول تغيرات الدالة f

f دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $\left[\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$ إذن f تقابل من $\left[\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$ نحو صورته $\left]-2, \frac{1}{10}\right]$

$$\text{مع : } \frac{4}{e \ln 2} - 2 \approx \frac{1}{10}$$

$$\text{و بما أن : } 0 \in \left]-2, \frac{1}{10}\right]$$

فإن الصفر يمتلك سابقاً وحيداً بالتقابل f في المجال $\left[\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$

و لدينا : $2 \in \left[\frac{1}{\ln 2}, +\infty\right[$ ولدينا : $f(2) = 0$

خلاصة : العددين 1 و 2 هما الحلان الوحيدان للمعادلة $f(x) = 0$

■ (3) أ

دراسة الدالة g : $g(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$

لدينا g دالة معرفة على المجال $]0, +\infty[$

$$\text{و لدينا : } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(2x)}{x}\right) = -\infty$$

إذن محور الأرتاب مقارب عمودي لـ (T)

$$\text{و لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(2x)}{x}\right) = 0$$

إذن محور الأفاسيل مقارب أفقي لـ (T) بجوار $+\infty$

$$g'(x) = \frac{1 - \ln(2x)}{x^2}$$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{إذا كان : } x = \frac{e}{2} \quad \text{فإن : } g'(x) = 0 \\ \text{إذا كان : } x > \frac{e}{2} \quad \text{فإن : } g'(x) < 0 \\ \text{إذا كان : } x < \frac{e}{2} \quad \text{فإن : } g'(x) > 0 \end{array} \right.$$

$$\text{و لدينا : } g\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{2}{e}$$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

x	0	$\frac{e}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	-
g	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

و بنفس الطريقة لدينا f_k تقابل من $+\infty$; $\frac{1}{k}$ نحو $2 - \frac{4}{ke}$; $-\infty$ لأنها متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $+\infty$; $\frac{1}{k}$.

بما أن $2 - \frac{4}{ke} - 2 \in 0$ فإن الصفر يمتلك سابقاً وحيداً b

من المجال $+\infty$; $\frac{1}{k}$ بالتقابل f_k

يعني : $f_k(b) = 0$ و $b > \frac{1}{k}$

و بالتالي : المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين

$a < \frac{1}{k} < b$ بحيث a و b

■ (3) ب

نلاحظ أن $f_{\ln 2}(x) = f(x)$

و نعلم أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين وحيدين و هما 1 و 2

إذن المعادلة $f_{\ln 2}(x) = 0$ تقبل كذلك حلين وحيدين فقط و هما 1 و 2

و لدينا المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين a و b

كيفما كان $0 < k < \frac{2}{e}$

إذن لدينا بالضرورة $a = 1$ و $b = 2$ لأن a و b وحيدين.

■ (4) ا

$$\int_0^t x e^{-kx} dx = \left[\frac{x e^{-kx}}{-k} \right]_0^t - \int_0^t \left(\frac{e^{-kx}}{-k} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t x e^{-kx} dx = \left[\frac{x e^{-kx}}{-k} \right]_0^t + \frac{1}{k} \left[\frac{e^{-kx}}{-k} \right]_0^t$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t x e^{-kx} dx = \left(\frac{t e^{-kt}}{-k} \right) + \frac{1}{k} \left(\frac{e^{-kt}}{-k} \right) + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} \right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^t x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2} (1 - k t e^{-kt} - e^{-kt})$$

■ (4) ب

$$I_k = \int_a^\beta f_k(x) dx = \int_a^\beta (4x e^{-kx} - 2) dx \quad \text{لدينا :}$$

$$= 4 \left(\int_a^\beta x e^{-kx} dx \right) - 2(\beta - a)$$

■ (1) ب

ليكن α و β حلاً للمعادلة $f(x) = 0$

بما أن : $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

فإنه حسب السؤال (2) ج من الجزء الأول : $\alpha = 1$ و $\beta = 2$

من جهة أخرى لدينا حسب السؤال (1) ا من الجزء الثاني :

α و β هما حلاً للمعادلة $g(x) = k$

ومنه : $g(1) = k$ و $g(2) = k$

أي : $\ln 2 = k$ و $\ln 4 = 2k$

و بالتالي : $k = \ln 2$

■ (2) ا

ليكن x عنصراً من $\mathbb{R}$

$$f'_k(x) = 4(e^{-kx} - kx e^{-kx}) = 4(1 - kx)e^{-kx}$$

■ (2) ب

x	$-\infty$	$\frac{1}{k}$	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	0	-
f_k	$-\infty$	$\frac{4}{ke} - 2$	-2

■ (3) ا

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_k :

f_k تقابل من $-\infty$; $\frac{1}{k}$ نحو $2 - \frac{4}{ke}$; $-\infty$ لأنها متصلة و تزايدية قطعاً

و لدينا : $2 - \frac{4}{ke} - 2 \in 0$

لأن :

$$\begin{aligned} & \text{لدينا : } 0 < k < \frac{2}{e} \\ & \text{إذن : } \frac{1}{k} > \frac{e}{2} \\ & \text{ومنه : } \frac{4}{ke} > 2 \\ & \text{أي : } \frac{4}{ke} - 2 > 0 \end{aligned}$$

إذن 0 يمتلك سابقاً وحيداً a في المجال $-\infty$; $\frac{1}{k}$ بالتقابل f_k

و بالتالي بالرجوع إلى (*) نحصل على :

$$\ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$$

■ (5)

ليكن u و v عدنان حقيقيان مختلفان و موجبان قطعاً بحيث :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(u)}{u} &= \frac{\ln(v)}{v} \\ \Leftrightarrow \frac{\ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{2\left(\frac{u}{2}\right)} &= \frac{\ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{2\left(\frac{v}{2}\right)} \\ \Leftrightarrow \frac{\ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)} &= \frac{\ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\frac{\ln\left(2\frac{u}{2}\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{\ln\left(2\frac{v}{2}\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)} = k \quad \text{نضع :}$$

إذن العدنان $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلين للمعادلة : $\frac{\ln(2x)}{x} = k$

أو بتعبير آخر $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلين للمعادلة : $g(x) = k$

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة g :

$\frac{2}{e}$ قيمة قصوى للدالة g على المجال $]0; +\infty[$

إذن : $\forall x \in]0; +\infty[; 0 \leq \frac{\ln(2x)}{x} \leq \frac{2}{e}$

و منه : $0 \leq k \leq \frac{2}{e}$

لدينا إذن $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلا للمعادلة : $g(x) = k$ بحيث $0 \leq k \leq \frac{2}{e}$

و بالتالي يمكننا تطبيق نتائج التمرين و خصوصاً نتيجة السؤال (4) (ج)

$$\ln\left(2\frac{u}{2}\right) \cdot \ln\left(2\frac{v}{2}\right) \leq 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1 \quad \text{و بالتالي :}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx &= \int_0^{\beta} x e^{-kx} dx - \int_0^{\alpha} x e^{-kx} dx \\ &= \frac{1}{k^2} (1 - k\beta e^{-k\beta} - e^{-k\beta} - 1 + k\alpha e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k^2} (k\alpha e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha} - k\beta e^{-k\beta} - e^{-k\beta})$$

و نعلم أن : $f_k(\alpha) = 0$ و $f_k(\beta) = 0$

$$\text{إذن : } 4\alpha e^{-k\alpha} - 2 = 0 \quad \text{و} \quad 4\beta e^{-k\beta} - 2 = 0$$

$$\text{ومنه : } \boxed{2\alpha = e^{ak}} \quad \text{و} \quad \boxed{2\beta = e^{\beta k}} \quad (1) \quad (2)$$

بالرجوع إلى التعبير الأخير للتكامل $\int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx$

$$\text{نحصل على : } \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2} \left(\frac{k\alpha}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} - \frac{k\beta}{2\beta} - \frac{1}{2\beta} \right)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\beta} \right)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-kx} dx = \frac{(\beta - \alpha)}{2\alpha\beta k^2}$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعبير التكامل I_k نحصل على :

$$I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x) dx = 4 \left(\int_{\alpha}^{\beta} (x e^{-kx}) dx \right) - 2(\beta - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow I_k = \frac{4(\beta - \alpha)}{2\alpha\beta k^2} - 2(\beta - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow I_k = 2(\beta - \alpha) \left(\frac{1}{\alpha\beta k^2} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I_k = \frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha\beta k^2} (1 - \alpha\beta k^2)}$$

■ (4) (ج)

بما أن α و β عدنان حقيقيان موجبان قطعاً و $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

فإن التكامل I_k يقيس مساحة و منه I_k كمية موجبة.

$$\text{إذن : } (1 - \alpha\beta k^2) \geq 0$$

$$\text{يعني : } (*) \quad (\alpha k)(\beta k) \leq 1$$

باستعمال العلاقتين (1) و (2) نستنتج منهما :

$$\boxed{(\beta k) = \ln(2\beta)}$$

و

$$\boxed{(\alpha k) = \ln(2\alpha)}$$