

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الانجاز : أربع ساعات



الامتحانات الوطنية الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2004

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (2,5 ن)

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و 10 كرات حمراء لا يمكن التمييز بينها باللمس، نسحب عشوائيا كرة من الكيس . إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نعيدها إلى الكيس و إذا كانت بيضاء نضع بدلها 3 كرات حمراء في الكيس ثم نسحب كرة من الكيس.

- ① أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين. 0,50 ن
- ② أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوين. 0,50 ن
- ③ أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين. 0,75 ن
- ④ أحسب الإحتمال لكي تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء علما أن الكرة الثانية المسحوبة بيضاء. 0,75 ن

التمرين الثاني : (3,0 ن)

- ① حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $(E) : 3x - 2y = 1$. 0,75 ن
- ② ليكن $n \in \mathbb{N}$. 0,25 ن
- ① بين أن : $(14n + 3, 21n + 4)$ حل للمعادلة (E) . 0,50 ن
- ② استنتج أن العددين $(14n + 3)$ و $(21n + 4)$ أوليان فيما بينهما. 0,50 ن
- ③ ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين $(2n + 1)$ و $(21n + 4)$. 0,50 ن
- ① بين أن : $d = 1$ أو $d = 13$. 0,25 ن
- ② بين أن : $d = 13 \Leftrightarrow n \equiv 6[13]$. 0,25 ن
- ④ من أجل كل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n \geq 2$ نضع : 0,25 ن
- $A = 21n^2 - 17n - 4$ و $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$ 0,50 ن
- ① بين أن العددين A و B قابليين للقسمة على $(n - 1)$ في المجموعة $\mathbb{Z}$. 0,25 ن
- ② حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر لـ A و B . 0,50 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$

① ليكن $\mathbb{H}$ عددا عقديا غير منعدم مكتوب في شكله الجبري التالي : $\mathbb{a} = \alpha + i\beta$.

لتكن $(\mathcal{H})$ مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق : $z^2 - (\bar{z})^2 = \mathbb{a}^2 - (\bar{\mathbb{a}})^2$.

① حدد طبيعة $(\mathcal{H})$.

0,50 ن

② أنشئ $(\mathcal{H})$ في الحالة : $\mathbb{a} = 1 + i$.

0,50 ن

② لتكن $(\mathcal{E})$ مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق $(z - \mathbb{a})(\bar{z} - \bar{\mathbb{a}}) = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}}$.

① حدد طبيعة $(\mathcal{E})$.

0,75 ن

② أنشئ $(\mathcal{E})$ في الحالة : $\mathbb{a} = 1 + i$.

0,25 ن

③ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ النظام التالية :

$$(S) : \begin{cases} z^2 - (\bar{z})^2 = \mathbb{a}^2 - (\bar{\mathbb{a}})^2 \\ (z - \mathbb{a})(\bar{z} - \bar{\mathbb{a}}) = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \end{cases}$$

نضع : $u = z - \mathbb{a}$.

① بين أن النظام (S) تكافئ النظام :

$$(S') : \begin{cases} u\bar{u} = 4\mathbb{a}\bar{\mathbb{a}} \\ (u + 2\mathbb{a})(u^3 - 8\mathbb{a}(\bar{\mathbb{a}})^2) = 0 \end{cases}$$

0,75 ن

② نضع $\mathbb{a} = re^{i\theta}$ حيث $r > 0$ و $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

0,75 ن

حدد بدلالة r و θ ألقاق نقط تقاطع $(\mathcal{E})$ و $(\mathcal{H})$.

③ استنتج أن تقاطع $(\mathcal{E})$ و $(\mathcal{H})$ يتضمن ثلاث نقط و هي رؤوس لمثلث متساوي الأضلاع .

0,50 ن

التمرين الرابع : (10,5 ن)

(I) لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي : $f(x) = 4xe^{-x \ln 2} - 2$ و $g(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$

و ليكن $(\mathcal{E})$ و $(\mathcal{T})$ المنحنيين الممثلين للدالتين f و g على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① أحسب نهايتي f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

0,75 ن

② حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{E})$.

0,50 ن

② بين أن : $f'(x) = 4(1 - x \ln 2)e^{-x \ln 2}$; $(\forall x \in \mathbb{R})$.

0,75 ن

③ اعط جدول تغيرات الدالة f .

0,75 ن

بين أن العددين 1 و 2 هما الحلين الوحيديين للمعادلة $f(x) = 0$

③ أدرس الدالة g : الفروع اللانهائية - النهايات - التغيرات .

0,75 ن

④ ارسم $(\mathcal{E})$ و $(\mathcal{T})$ في نفس المعلم . $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4cm)$

0,50 ن

تحديد نقط الإنعطاف غير مطلوب نأخذ : $\frac{1}{\ln 2} \approx 1,4$ و $\frac{1}{e} \approx 0,4$ و $e \approx 2,7$ و $\ln 2 \approx 0,7$

(II) ليكن k عددا حقيقيا بحيث : $0 < k < \frac{2}{e}$	
① ① تحقق مبيانيا أن المعادلة $g(x) = k$ تقبل حلين مختلفين لـ α و β بحيث : $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$	0,75 ن
② ② حدد قيمة k بحيث يكون α و β هما حلا المعادلة $f(x) = 0$.	0,75 ن
نعتبر الدالة العددية f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_k(x) = 4xe^{-kx} - 2$	
③ ② تأكد من أن : $f'_k(x) = 4(1 - kx)e^{-kx}$; $(\forall x \in \mathbb{R})$.	0,50 ن
④ ② إعط جدول تغيرات f_k.	0,50 ن
⑤ ③ استنتج أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين a و b . بحيث : $a < \frac{1}{k} < b$	0,50 ن
⑥ ③ بين أن $a = \alpha$ و $b = \beta$	0,75 ن
⑦ ④ باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^t xe^{-kx} dx = \frac{1}{k^2}(1 - kte^{-kt} - e^{-kt})$; $(\forall t \in \mathbb{R})$	0,75 ن
⑧ ④ أحسب التكامل : $I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x) dx$ بدلالة α و β.	0,75 ن
⑨ ④ استنتج أن : $\ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$	0,50 ن
⑩ ⑤ بين أنه إذا كان u و v عددا حقيقيين موجبين قطعاً . بحيث : $\frac{\ln(u)}{u} = \frac{\ln(v)}{v}$	0,75 ن
فإن : $\ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1$	