

التمرين الأول : (3,0 ن)

■ (1) أ

ليكن n عددا فرديا

إذن : $n = 2k + 1$; $(\exists k \in \mathbb{N})$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) ; n^2 = (2k + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) ; n^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) ; n^2 = 4k(k + 1) + 1$$

k و $(k + 1)$ عددان صحيحان طبيعيين و متتابعان إذن أحدهما فردي و الآخر زوجي. و منه فإن الجداء $k(k + 1)$ عدد زوجي دائما.

إذن : $k(k + 1) = 2m$; $(\exists m \in \mathbb{N})$

$$n^2 = 4k(k + 1) + 1 = 8m + 1$$
 و بالتالي :

$$\Leftrightarrow n^2 - 1 = 8m$$

$$\Leftrightarrow n^2 \equiv 1[8]$$

■ (1) ب

ليكن n عددا زوجيا .

هذا يعني أن : $n = 2k$; $(\exists k \in \mathbb{N})$

العدد الصحيح الطبيعي k يمكن أن يكون فرديا أو زوجيا .

الحالة الأولى: k عدد زوجي

إذن : $k = 2p$; $(\exists p \in \mathbb{N})$

$$n = 4p \text{ : منه } n^2 = 16p^2 = 8(2p^2)$$
 يعني :

$$n^2 \equiv 0[8] \text{ : منه } 8 / n^2$$

الحالة الثانية: k عدد فردي

إذن : $k = 2q + 1$; $(\exists q \in \mathbb{N})$

$$n = 4q + 2 \text{ : منه } n^2 - 4 = 8(2q^2 + 2q)$$
 يعني :

$$n^2 \equiv 4[8] \text{ : منه } 8 / (n^2 - 4)$$

الخلاصة :

إذا كان n عددا زوجيا فإن : $n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8]$

■ (2) أ

نذكر في البداية أن مجموع ثلاثة أعداد فردية هو عدد فردي

و أن مربع أي عدد فردي يكون دائما عددا فرديا .

نفترض أن $(a^2 + b^2 + c^2)$ مربع كامل.

إذن : $(\exists d \in \mathbb{N}) ; a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ (1)

بما أن a و b و c أعداد فردية فإن $(a^2 + b^2 + c^2)$ عدد فردي كذلك .

$$\begin{cases} a^2 \equiv 1[8] \\ b^2 \equiv 1[8] \\ c^2 \equiv 1[8] \end{cases} \text{ و منه حسب نتيجة السؤال (1) أ}$$

إذن : $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3[8]$ (2)

لدينا d و d^2 عددان فرديان

إذن حسب نتيجة السؤال (1) أ : $d^2 \equiv 1[8]$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $3 \equiv 1[8]$

يعني أن : $8 / 2$ و هذا مستحيل حدوثه

و بالتالي $(a^2 + b^2 + c^2)$ ليس مربعا كاملا.

■ (2) ب

لدينا a و b و c أعداد فردية.

$$\begin{cases} a^2 \equiv 1[8] \\ b^2 \equiv 1[8] \\ c^2 \equiv 1[8] \end{cases} \text{ إذن حسب نتيجة السؤال (1) أ :}$$

و منه : $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3[8]$ (4)

و بما أن a و b و c أعداد فردية فإن $(a + b + c)$ عدد فردي كذلك

و منه حسب نتيجة السؤال (1) أ : $(a + b + c)^2 \equiv 1[8]$ (5)

من (4) و (5) نستنتج أن :

$$(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \equiv 1 - 3[8]$$

$$(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \equiv -2[8] \text{ يعني :}$$

$$-2 \equiv 6[8] \text{ و نعلم أن :}$$

$$(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \equiv 6[8] \text{ إذن :}$$

$$2(ab + ac + bc) \equiv 6[8] \text{ و منه : (*)}$$

$$(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + ac + bc)$$
 لأن :

■ (2) ج

نفترض أن العدد $2(ab + ac + bc)$ مربع كامل.

إذن : $2(ab + ac + bc) = m^2$; $(\exists m \in \mathbb{N})$

و لدينا $2(ab + ac + bc)$ عدد زوجي

و منه : m و m^2 عددان زوجيان .

إذن حسب نتيجة السؤال (1) ب :

$$m^2 \equiv 0[8] \text{ أو } m^2 \equiv 4[8]$$

في الحالة الأولى: $m^2 \equiv 0[8]$

لدينا حسب نتيجة السؤال (2) ب : $m^2 \equiv 6[8]$

إذن : $6 \equiv 0[8]$ و هذا مستحيل. لأن 8 لا تقسم 6

في الحالة الثانية: $m^2 \equiv 4[8]$

لدينا حسب نتيجة السؤال (2) ب : $m^2 \equiv 6[8]$

إذن : $6 \equiv 4[8]$ و هذا مستحيل. لأن 8 لا تقسم 2

وبالتالي : $2(ab + bc + ac)$ ليس مربعا كاملا.

■ (2) د

نفترض أن : $(ab + bc + ac)$ مربع كامل.

إذن : $(\exists m \in \mathbb{N}) ; (ab + bc + ac) = m^2$

لدينا : a و b و c أعداد فردية.

إذن : $(ab + bc + ac)$ عدد فردي كذلك.

و منه m^2 عدد فردي . إذن m عدد فردي

و منه حسب (1) : $m^2 \equiv 1[8]$

أي : $ab + bc + ac \equiv 1[8]$

و منه : $2(ab + bc + ac) \equiv 2[8]$

لكن لدينا $2(ab + bc + ac) \equiv 6[8]$ و ذلك حسب (*)

إذن : $6 \equiv 2[8]$

يعني : $8/4$ و هذا بطبيعة الحال مستحيل.

و بالتالي : $(ab + bc + ac)$ ليس مربعا كاملا .

التمرين الثاني : (3,0 ن)

■ (1) ا

ليكن M_a و M_b عنصرين من E

$$\begin{aligned} M_a \times M_b &= \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}(b - \frac{1}{b}) \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab & \frac{a}{\sqrt{3}}(b - \frac{1}{b}) + \frac{1}{b\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}(ab - \frac{1}{ab}) \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix} = M_{ab} \end{aligned}$$

بما أن : $M_a \in E$ و $M_b \in E$ فإن : $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و منه : $ab \neq 0$

■ (1) ب

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}^*$

لدينا : $\varphi : (\mathbb{R}^*, \times) \rightarrow (E, \times)$
 $a \rightarrow \varphi(a) = M_a$

لدينا : $\varphi(a \times b) = M_{ab} = M_a \times M_b = \varphi(a) \times \varphi(b)$

إذن : φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(E, \times)$

و لدينا : $(\forall y \in E), (\exists ! a \in \mathbb{R}^*) ; y = \varphi(a) = M_a$

إذن φ تقابل من $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(E, \times)$.

و بالتالي : φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(E, \times)$.

■ (1) ج

بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(E, \times)$ فإن φ يحافظ على بنية الزمرة.

بما أن : $(\mathbb{R}^*, \times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد 1 و كل

عنصر a يقبل $\frac{1}{a}$ كمثال.

فإن : $(E, \times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد $\varphi(1)$ و كل

عنصر M_a يقبل $\varphi(\frac{1}{a})$ كمثال.

و لدينا : $\varphi(1) = M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

و $\varphi(\frac{1}{a}) = M_{\frac{1}{a}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{a} - a) \\ 0 & a \end{pmatrix}$

■ (2) ا

ليكن N_b و N_a عنصرين من F

$$\begin{aligned} N_a \times N_b &= \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}(b - \frac{1}{b}) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab - b(a - \frac{1}{a}) & \frac{a}{\sqrt{3}}(b - \frac{1}{b}) - \frac{b}{\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ -ab\sqrt{3} + ab\sqrt{3} & -a(b - \frac{1}{b}) + ab \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{b}{a} - \frac{1}{\frac{b}{a}}) \\ 0 & \frac{1}{\frac{b}{a}} \end{pmatrix} = M_{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

■ (2) ب

نضع : $G = E \cup F$

في البداية يجب أن نبرهن على أن :

$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2 ; M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}}$ و

$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2 ; N_b \times M_a = N_{ab}$

لدينا :

$$\begin{aligned} M_a \times N_b &= \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}(b - \frac{1}{b}) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}) \\ -\frac{b}{a}\sqrt{3} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} = N_{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

و لدينا كذلك :

$$N_b \times M_a = \begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}(b - \frac{1}{b}) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}(ab - \frac{1}{ab}) \\ -ab\sqrt{3} & -ab \end{pmatrix} = N_{ab}$$

نحن الآن مسلحون بأربع خاصيات مهمة و هي :

$$\begin{cases} M_a \times M_b = M_{ab} & (1) \\ N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}} & (2) \\ M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}} & (3) \\ N_b \times M_a = N_{ab} & (4) \end{cases}$$

لنبرهن على أن $\times$ قانون تركيب داخلي في G

ليكن X و Y عنصرين من G

إذن نفصل هنا بين أربع حالات :

الحالة الأولى : $X \in E$ و $Y \in E$

إذن حسب الخاصية رقم (1) : $X \times Y \in E$: إذن $X \times Y \in G$

الحالة الثانية : $X \in F$ و $Y \in F$

إذن حسب الخاصية رقم (2) : $X \times Y \in E$: إذن $X \times Y \in G$

الحالة الثالثة : $X \in E$ و $Y \in F$

إذن حسب الخاصية رقم (3) : $X \times Y \in F$: إذن $X \times Y \in G$

الحالة الرابعة : $X \in F$ و $Y \in E$

إذن حسب الخاصية رقم (4) : $X \times Y \in F$: إذن $X \times Y \in G$

نلاحظ أنه في جميع هذه الحالات الأربع لدينا :

$$\forall (X, Y) \in G^2 ; X \times Y \in G$$

و بالتالي $\times$ قانون تركيب داخلي في G .

البحث عن العنصر المحايد :

نعلم أن M_1 هو العنصر المحايد للقانون $\times$ في E و ذلك حسب نتيجة السؤال (1) (ج)

و نعلم كذلك أن العنصر المحايد إن وجد يكون دائما وحيدا .

يكفي الآن أن نبرهن أن :

$$\forall A \in G ; A \times M_1 = M_1 \times A = A$$

لتكن A مصفوفة من G . نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : A فرد من أفراد E

إذن : $A = M_a$; $(\exists! a \in \mathbb{R}^*)$

و لدينا حسب الخاصية رقم (1) :

$$M_a \times M_1 = M_a \text{ و } M_1 \times M_a = M_a$$

إذن : $A \times M_1 = M_1 \times A = A$

الحالة الثانية : A فرد من أفراد F

إذن : $A = N_a$; $(\exists! a \in \mathbb{R}^*)$

و منه حسب الخاصية (4) : $N_a \times M_1 = N_{a \times 1} = N_a$

و كذلك حسب الخاصية (3) : $M_1 \times N_a = N_{\frac{a}{1}} = N_a$

نستنتج إذن أن : $A \times M_1 = M_1 \times A = A$

في كلتا الحالتين لدينا :

$$\forall A \in G ; A \times M_1 = M_1 \times A = A$$

إذن M_1 هو العنصر المحايد لضرب المصفوفات في G .

التمائل :

$(E, \times)$ زمرة تبادلية و مماثل كل عنصر M_a يمتلك مماثلا و هو : $M_{\frac{1}{a}}$

G مجموعة تتكون من اتحاد مجموعتين و هما E و F

لنبحث عن مماثلات عناصر F .

ليكن N_a عنصرا من F .

إذن حسب الخاصية (2) : $N_a \times N_a = M_{\frac{a}{a}} = M_1$

و منه كل عنصر N_a من F يتماثل مع نفسه

و بالتالي جميع عناصر G تمتلك مماثلات من E و F .

خلاصة السؤال (ب) : زمرة لأن $\times$ قانون تركيب داخلي في G و يقبل عنصرا محايدا وحيدا M_1 و كل عنصر يمتلك مماثلا وحيدا من G .

■ (2) ب

ليكن M_a عنصرا من E و N_b عنصرا من F

لدينا حسب الخاصية (3) : $M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}}$

و لدينا حسب الخاصية (4) : $N_b \times M_a = N_{ab}$

إذن : $M_a \times N_b \neq N_b \times M_a$

و بالتالي : $\times$ ليس تبادليا في G

يعني : الزمرة $(G, \times)$ ليست تبادلية .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

■ (1)

لنحل المعادلة : $z^2 + z + 1 = 0$

نحسب Δ نجد أن : $\Delta = (i\sqrt{3})^2$

إذن المعادلة تقبل حلين مترافقين z_1 و z_2 :

$$z_1 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2\pi i}{3}} = j$$

$$z_2 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}} = j$$

■ (2) (i)

لدينا : $z = e^{i\theta}$ إذن : $|z| = 1$ و منه : $z\bar{z} = 1$

لدينا إذن : $z(1 + z + \bar{z}) = z + z^2 + z\bar{z} = z + z^2 + 1$

■ (2) (b)

لدينا $z' \neq 0$ مُعرَّف لأنه إذا كان $\theta \neq \pm \frac{2\pi}{3}$ فإن $z^2 + z + 1 \neq 0$

و لدينا حسب السؤال (i) : $1 + z + z^2 = z(1 + z + \bar{z})$

$$z' = \frac{1}{1 + z + z^2} = \frac{1}{z(1 + z + \bar{z})} \quad \text{إذن :}$$

و منه :

$$|z'| = \left| \frac{1}{z} \right| \cdot \left| \frac{1}{1 + z + \bar{z}} \right| = 1 \cdot \frac{1}{1 + 2 \cos \theta} = \left(\frac{1}{1 + 2 \cos \theta} \right)$$

و لدينا كذلك : $Arg(z') \equiv Arg\left(\frac{1}{z}\right) + Arg\left(\frac{1}{1 + z + \bar{z}}\right) [2\pi]$

$$\Leftrightarrow Arg(z') \equiv -Arg(z) + 0[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow Arg(z') \equiv -\theta[2\pi]$$

$$z' = \left(\frac{1}{1 + 2 \cos \theta} \right) e^{-i\theta} \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (2) (c)

$$z' = x + iy = \left(\frac{1}{1 + 2 \cos \theta} \right) e^{-i\theta} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\cos(-\theta)}{1 + 2 \cos(\theta)} \\ y = \frac{\sin(-\theta)}{1 + 2 \cos(\theta)} \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

و من هذه النظمة نستنتج أن :

$$x^2 + y^2 = \frac{\cos^2(-\theta)}{(1 + 2 \cos(\theta))^2} + \frac{\sin^2(-\theta)}{(1 + 2 \cos(\theta))^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{\cos^2(-\theta) + \sin^2(-\theta)}{(1 + 2 \cos(\theta))^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{1 + 2 \cos(\theta)} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{1 + 2 \cos(\theta) - 2 \cos(\theta)}{1 + 2 \cos(\theta)} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(1 - 2 \left(\frac{\cos(\theta)}{1 + 2 \cos(\theta)} \right) \right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$$

■ (2) (b)

من آخر نتيجة نستخرج ما يلي : $x^2 + y^2 = 1 + 4x^2 - 4x$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 4x + y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}y^2 = \frac{-1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{1}{3}y^2 = \frac{-1}{3} + \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{2}{3} \right)^2}{\left(\frac{1}{3} \right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = 1$$

و منه : $M(z')$ تنتمي إلى الهذلول الذي مركزه هو النقطة $C\left(\frac{2}{3}, 0\right)$

و رأساه هما $S_1(1, 0)$ و $S_2\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

و مقارباها هما المستقيمان (Δ) و (Δ') المعرفين بما يلي :

$$\begin{cases} (\Delta) : y = \sqrt{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ (\Delta') : y = -\sqrt{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

التمرين الرابع : (10 ن)

■ (I) (1)

لدينا : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x} : \forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} \right) = \lim_{u \rightarrow -\infty} - \left(\frac{e^u}{u} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^{-x}}{x} \right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} - \left(\frac{e^u}{u} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-x}}{x} \right) = \lim_{u \rightarrow 0^-} - \left(\frac{e^u}{u} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} \right) = \lim_{u \rightarrow -\infty} - \left(\frac{e^u}{u} \right) = 0$$

■ (II) ①

نعتبر الدالة : $\varphi(x) = e^x - x - 1$

لدينا : $\varphi'(x) = e^x - 1$

إذا كان $x = 0$ فإن : $\varphi'(x) = 0$

إذا كان $x > 0$ فإن : $\varphi'(x) > 0$

إذا كان $x < 0$ فإن : $\varphi'(x) < 0$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$

نستنتج جدول التغيرات التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+
φ	$+\infty$	0	$+\infty$

نلاحظ أن دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و قيمتها الدنيا هي 0

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) \geq 0$

أي : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq (x + 1)$

■ (II) ②

لدينا حسب السؤال ① : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; e^x \geq x + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \leq \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x > 0) ; xe^{-x} \leq \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x > 0) ; \frac{x^2}{x} e^{-x} \leq \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x > 0) ; x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1}$$

■ (II) ③ (i)

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$

يعني : $0 < u_0 \leq \frac{1}{0+1}$

إذن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n = 0$

■ (I) ②

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^*$

لدينا : $f'(x) = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$

بما أن : $\frac{-e^{-x}}{x^2} < 0$ فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(x+1)$

نستنتج إذن الجدول التالي :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
f	$-\infty$	$-e$	$+\infty$	0

■ (I) ③ (i)

الفروع اللانهائية :

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

إذن محور الأرتايب مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C})$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

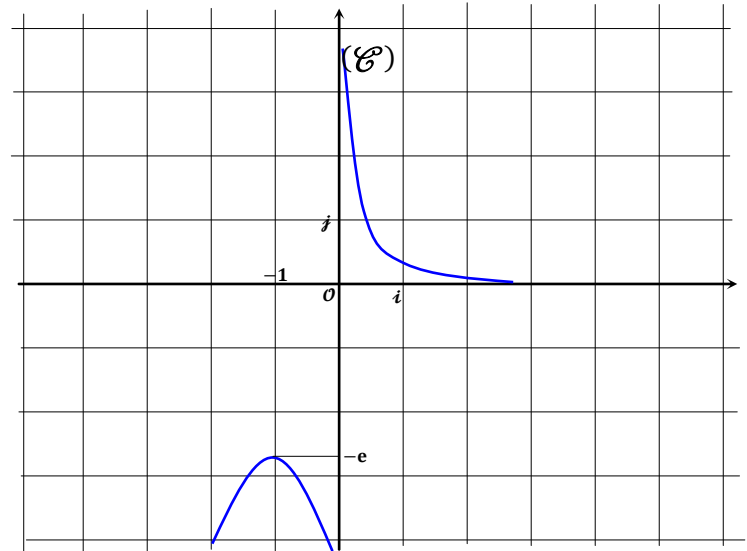
إذن محور الأفاصيل مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

إذن $(\mathcal{C})$ يقبل فرعا شلجيبيا في اتجاه محور الأرتايب نحو الأسفل.

■ (I) ③ (b)

تمثيل الدالة f :



■ (II) 4 (i)

ليكن $k \in \mathbb{N}$. لدينا حسب تعريف المتتالية $(u_n)_n$:

$$(\forall k \in \mathbb{N}) ; u_k = u_{k-1} e^{-u_{k-1}}$$

$$\Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{u_k} = \frac{e^{u_{k-1}}}{u_{k-1}}$$

$$\Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) ; \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \ln\left(\frac{e^{u_{k-1}}}{u_{k-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) ; \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \ln(e^{u_{k-1}}) - \ln(u_{k-1})$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \sum_{k=1}^n u_{k-1} - \sum_{k=1}^n \ln(u_{k-1})$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_k)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = v_n - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_k) - \underbrace{\ln(u_0)}_0$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_k)\right) = v_n$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\ln\left(\frac{1}{u_k}\right) + \ln(u_k)\right) = v_n$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{u_k}{u_k}\right) = v_n$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1) = v_n$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + 0 = v_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{1}{u_n}\right) = v_n}$$

■ (II) 4 (b)

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

و لدينا : $\ln\left(\frac{1}{u_n}\right) = v_n$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) = +\infty$

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$

ننتقل من الطرف $u_n \leq \frac{1}{n+1}$

$$\Leftrightarrow (n+1)u_n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow n u_n + u_n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow n u_n + (2u_n - u_n) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow n u_n + 2u_n \leq 1 + u_n$$

$$\Leftrightarrow (n+2)u_n \leq (1+u_n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+2)u_n}{(1+u_n)} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{u_n}{1+u_n} \leq \frac{1}{n+2}} (*)$$

و لدينا $u_n \geq 0$ إذن حسب نتيجة السؤال (2) :

$$\boxed{(u_n)^2 f(u_n) \leq \frac{u_n}{1+u_n}} (**)$$

من (*) و (**) نستنتج أن : $(u_n)^2 f(u_n) \leq \frac{1}{n+2}$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < (u_n)^2 f(u_n) \leq \frac{1}{n+2}$$

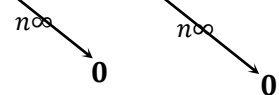
$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)+1}$$

إذن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $(n+1)$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{و بالتالي}$$

■ (II) 3 (b)

بما أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{n+1}\right)$



فإن : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

■ (III) ③ ب

لدينا حسب السؤال ① : $(\forall t \geq 1) ; f(t) \leq e^{-t}$

و لدينا كذلك حسب التمثيل المبياني للدالة f : $(\forall t > 0) ; f(t) \geq 0$

$$\Rightarrow (\forall t > 1) ; f(t) \geq 0$$

ومنه : $(\forall t \geq 1) ; 0 < f(t) \leq e^{-t}$

$$\Rightarrow 0 < \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt \leq \int_{x^2}^{4x^2} e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow 0 < F(x) \leq e^{-x^2} - e^{-4x^2}$$

$$\Rightarrow 0 < F(x) \leq e^{-x^2}(1 - e^{-3x^2})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2}(1 - e^{-3x^2}) = 0(1 - 0) = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (III) ④ ا

لدينا f دالة متصلة على $]0, +\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية نرمز لها بالرمز φ .

$$\varphi'(x) = f(x) \quad \text{بحيث :}$$

$$F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt ; x > 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \int_{x^2}^0 f(t) dt + \int_0^{4x^2} f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \int_0^{4x^2} f(t) dt - \int_0^{x^2} f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \varphi(4x^2) - \varphi(x^2)$$

$$\Rightarrow F'(x) = 8x\varphi'(4x^2) - 2x\varphi'(x^2)$$

$$\Rightarrow F'(x) = 8xf(4x^2) - 2xf(x^2)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{8xe^{-4x^2}}{4x^2} - \frac{2xe^{-x^2}}{x^2}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{2e^{-4x^2}}{x} - \frac{2e^{-x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{2e^{-x^2}(e^{-3x^2} - 1)}{x}$$

■ (III) ① ا

ليكن : $x > 0$

$$\int_{x^2}^{4x^2} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_{x^2}^{4x^2} = \ln(4x^2) - \ln(x^2) = \ln 4$$

■ (III) ① ب

لدينا حسب نتيجة السؤال ① (II) : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq x + 1$

من أجل العدد $-x$ نحصل على : $e^{-x} \geq -x + 1$

$$e^{-x} - 1 \geq -x \quad \text{يعني :}$$

$$-x < 0 \quad \text{إذن } x > 0$$

$$e^{-x} - 1 \leq 0 \quad \text{و منه : } e^{-x} < 1 \quad \text{يعني :}$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x > 0) ; -x \leq e^{-x} - 1 \leq 0$

■ (III) ② ا

ليكن x عددا حقيقيا موجبا

$$\text{لدينا : } -1 < \frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{t} \leq 0 \quad \text{و منه : } -t < e^{-t} - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\int_{x^2}^{4x^2} 1 dt < \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt - \int_{x^2}^{4x^2} \left(\frac{1}{t}\right) dt \leq \int_{x^2}^{4x^2} 0 dt$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 < F(x) - \ln 4 \leq 0$$

■ (III) ② ب

لدينا : $(\forall x > 0) ; -3x^2 \leq F(x) - \ln 4 \leq 0$

$$\Leftrightarrow -3x^2 < \frac{F(x) - 2 \ln 2}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 < \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \leq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -3x = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0 \quad \text{و بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 0 \quad \text{فان :}$$

و بالتالي F دالة قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر و نعلم أن

الإشتقاق يستلزم الإتصال إذن F متصلة على اليمين في الصفر.

■ (III) ③ ا

ليكن t عددا حقيقيا بحيث $t \geq 1$ إذن $\frac{1}{t} \leq 1$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الحقيقي الموجب قطعاً e^{-t} نجد :

$$\frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow f(t) \leq e^{-t}$$

■ (III) 5 (ب)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x} - e^{-4x}) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} (1 - e^{-3x}) \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{(3xe^{-x})}_{x \rightarrow 0^+ \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{e^{-3x} - e^0}{-3x - 0} \right)}_{x \rightarrow 0^+ \rightarrow 1} \underbrace{(x \ln x)}_{x \rightarrow 0^+ \rightarrow 0} = 0$$

■ (III) 5 (ج)

$$G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x} (\ln 4 + \ln x) + e^{-x} \ln x \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow G(x) = F(\sqrt{x}) + (e^{-x} - e^{-4x}) \ln x - e^{-4x} \ln 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\underbrace{F(\sqrt{x})}_{x \rightarrow 0^+ \rightarrow \ln 4} + \underbrace{(e^{-x} - e^{-4x}) \ln x}_{x \rightarrow 0^+ \rightarrow 0} - \underbrace{e^{-4x} \ln 4}_{x \rightarrow 0^+ \rightarrow -\ln 4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 0 \quad \text{و بالتالي :}$$

■ والحمد لله رب العالمين ■

■ (III) 4 (ب)

$$\frac{2e^{-x^2}}{x} > 0 \quad \text{لدينا : } x > 0 \quad \text{إذن :}$$

$$e^{-3x^2} - 1 \quad \text{متعلقة بإشارة } F'(x) \quad \text{ومنه فإن إشارة}$$

$$e^{-3x^2} < 1 \quad \text{و لدينا : } x > 0 \quad \text{إذن : } -3x^2 < 0 \quad \text{ومنه :}$$

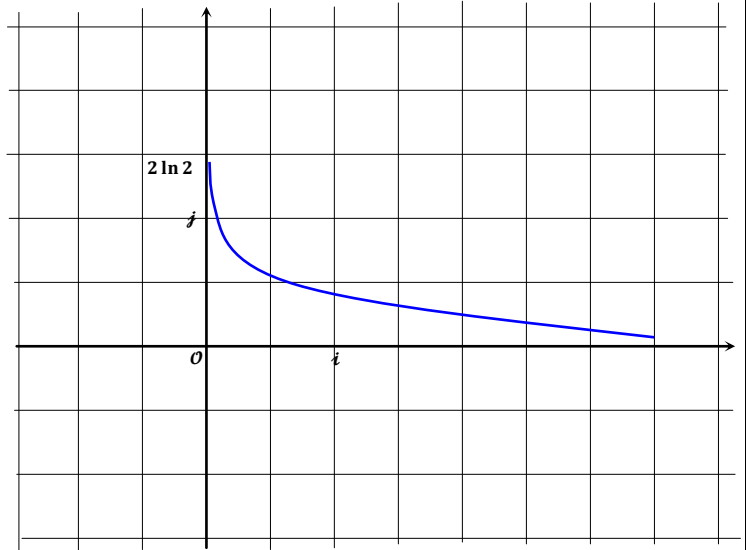
$$e^{-3x^2} - 1 < 0 \quad \text{أي :}$$

$$(\forall x > 0) ; F'(x) < 0$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة F كما يلي :

x	0	$+\infty$
$F'(x)$		-
F	$2 \ln 2$	0

■ (III) 4 (ج)



■ (III) 5 (أ)

ليكن $x > 0$. سوف نستعمل مكاملة بالأجزاء.

$$\text{نضع : } u(t) = \ln t \quad \text{ومنه : } u'(t) = \frac{1}{t}$$

$$\text{ونضع : } v'(t) = e^{-t} \quad \text{ومنه : } v(t) = -e^{-t}$$

$$\text{لدينا : } G(x) = \int_x^{4x} e^{-t} \ln t \, dt = [uv] - \int v u' \, dt$$

$$\Leftrightarrow G(x) = [-\ln t \cdot e^{-t}]_x^{4x} - \int_x^{4x} \frac{-e^{-t}}{t} \, dt$$

$$\Leftrightarrow G(x) = e^{-x} \ln(x) - e^{-4x} \ln(4x) + \int_{(\sqrt{x})^2}^{4(\sqrt{x})^2} \frac{e^{-t}}{t} \, dt$$

$$\Leftrightarrow G(x) = e^{-x} \ln(x) - e^{-4x} \ln(4x) + F(\sqrt{x})$$