

التمرين الثاني : (4,5 ن)

■ (1) أ

$$\begin{aligned}
 & \text{لدينا :} \\
 & p^2 - (3 \cos \theta + 5i \sin \theta)^2 \\
 & = (5 \cos \theta + 3i \sin \theta)^2 - (3 \cos \theta + 5i \sin \theta)^2 \\
 & = 25 \cos^2 \theta - 9 \sin^2 \theta - 9 \cos^2 \theta + 25 \sin^2 \theta \\
 & = 25(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 9(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
 & = 25 - 9 \\
 & = 16
 \end{aligned}$$

■ (1) ب

$$\Delta' = p^2 - 16 = (3 \cos \theta + 5i \sin \theta)^2 \quad \text{لدينا :}$$

إن المعادلة (E) تقبل حلين في $\mathbb{C}$.

$$z_1 = p + (3 \cos \theta + 5i \sin \theta) = 2e^{-i\theta}$$

$$z_2 = p - (3 \cos \theta + 5i \sin \theta) = 8e^{i\theta}$$

■ (2) أ

ليكن θ عنصرا من $[0; 2\pi[$.

$$\text{نضع : } aff(M_1) = 2e^{-i\theta} = x + iy$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(-\theta) + 2i \sin(-\theta) = x + iy$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos(\theta) = x \\ -2 \sin(\theta) = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (2 \cos(\theta))^2 + (-2 \sin(\theta))^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2^2$$

إن : $M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ تنتمي إلى الدائرة ($\mathcal{C}$) التي مركزها O و شعاعها 2.

■ (2) ب

لدينا P هي منتصف القطعة $[M_1 M_2]$

$$\Leftrightarrow aff(P) = \frac{aff(M_1) + aff(M_2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow aff(P) = \frac{2e^{-i\theta} + 8e^{i\theta}}{2}$$

$$\Leftrightarrow aff(P) = (\cos \theta - i \sin \theta) + 4(\cos \theta + i \sin \theta)$$

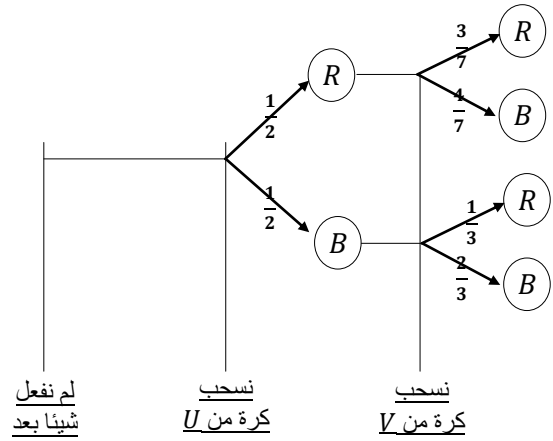
$$\Leftrightarrow aff(P) = 5 \cos \theta + 3i \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow aff(P) = p$$

التمرين الأول : (3,0 ن)

■ (1)

النموذج الأمثل لحل هذا التمرين هو استعمال شجرة الاحتمالات التالية :



$$\text{لدينا حسب الشجرة : } P(R_1) = P(B_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

■ (2)

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P_{R_1}(B_2) = \frac{P(R_1 \cap B_2)}{P(R_1)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$$

■ (3)

$$\text{لدينا : } P(B_2) = P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2)$$

$$\begin{aligned}
 & = P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \\
 & = \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{13}{21}
 \end{aligned}$$

■ (4)

الطريقة الأولى : استعمال تقنية الحدث المؤكد

$$P(B_2) + P(R_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(R_2) = 1 - P(B_2)$$

$$\Leftrightarrow P(R_2) = 1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21}$$

الطريقة الثانية : (استعمال الشجرة)

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2)$$

$$\Leftrightarrow P(R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(R_2)$$

$$\Leftrightarrow P(R_2) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{21}$$

■ (4) (أ)

لدينا : $P(5 \cos \theta ; 3 \sin \theta)$

إن معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) في النقطة P هي :

$$(T) : \frac{5x \cos \theta}{5^2} + \frac{3y \sin \theta}{3^2} = 1$$

$$(T) : 3x \cos \theta + 5y \sin \theta = 15$$

■ (4) (ب)

لدينا : $(T) : 3x \cos \theta + 5y \sin \theta = 15$

$$(T) : y = \left(\frac{-3 \cos \theta}{5 \sin \theta} \right) x + \left(\frac{3}{\sin \theta} \right)$$

إن : ميل المستقيم (T) هو : $\left(\frac{-3 \cos \theta}{5 \sin \theta} \right)$

لنحسب الآن ميل المستقيم $(M_1 M_2)$.

لدينا : $M_1 \left(\frac{2 \cos \theta}{-2 \sin \theta} \right)$ و $M_2 \left(\frac{8 \cos \theta}{8 \sin \theta} \right)$.

$$m = \frac{8 \sin \theta - (-2 \sin \theta)}{8 \cos \theta - 2 \cos \theta} = \left(\frac{5 \sin \theta}{3 \cos \theta} \right) \quad \text{إن :}$$

إن ميل المستقيم $(M_1 M_2)$ هو $\left(\frac{5 \sin \theta}{3 \cos \theta} \right)$.

و بالتالي : (T) و $(M_1 M_2)$ متعامدان لأن جداء ميليهما يساوي (-1) .

$$\left(\frac{-3 \cos \theta}{5 \sin \theta} \right) \times \left(\frac{5 \sin \theta}{3 \cos \theta} \right) = -1$$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ (1)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \quad \text{نضع :}$$

$$3^2 - 2 \times 2^2 = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$A = M(3,2) \in E \quad \text{إن :}$$

■ (2) (أ)

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

$$M(a,b) \times M(c,d) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d\sqrt{2} \\ d\sqrt{2} & c \end{pmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow M(a,b) \times M(c,d) = \begin{pmatrix} ac + 2bd & (bc + ad)\sqrt{2} \\ (bc + ad)\sqrt{2} & ac + 2bd \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M(a,b) \times M(c,d) = M(ac + 2bd ; ad + bc) \quad (*)$$

نضع : $p = x + iy$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \cos(\theta) \\ y = 3 \sin(\theta) \end{cases}$$

لدينا حسب نتيجة السؤال (1) (أ) : $p^2 - (3 \cos \theta + 5i \sin \theta)^2 = 16$

$$\Leftrightarrow (x + iy)^2 - \left(\frac{3x}{5} + \frac{5i}{3} y \right)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{25} x^2 + \frac{16}{9} y^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

إن عندما يتغير العدد θ في المجال $[0; 2\pi[$

فإن النقطة P تتغير على الإهليلج (Γ) الذي مركزه O

و رؤوسه : $A(5,0)$ و $A'(-5,0)$ و $B(0,3)$ و $B'(0,-3)$.

و بؤرتاه : $F(4,0)$ و $F'(-4,0)$.

$$(c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 \Rightarrow c = 4 \quad \text{لأن :})$$

■ (3) (أ)

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{C} \setminus \{4\}$ بحيث : $\left(\frac{b+4}{b-4} \right) = - \left(\frac{a+4}{a-4} \right)$

$$\Leftrightarrow (b+4)(4-a) = (b-4)(a+4)$$

$$\Leftrightarrow 2ab = 32$$

$$\Leftrightarrow ab = 16$$

■ (3) (ب)

لدينا : $z_2 = 8e^{i\theta} \neq 4$ و $z_1 = 2e^{-i\theta} \neq 4$.

$$z_1 z_2 = 16e^{i\theta} e^{-i\theta} = 16 \quad \text{إن :}$$

$$\left(\frac{z_2 + 4}{z_2 - 4} \right) = - \left(\frac{z_1 + 4}{z_1 - 4} \right) \quad \text{و منه حسب (3) (أ) :}$$

■ (3) (ج)

$$\left(\frac{z_2 + 4}{z_2 - 4} \right) = - \left(\frac{z_1 + 4}{z_1 - 4} \right) \quad \text{ننتقل من الكتابة :}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4 - z_1}{-4 - z_1} \right) = - \left(\frac{4 - z_2}{-4 - z_2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_F - z_1}{z_{F'} - z_1} \right) = - \left(\frac{z_F - z_2}{z_{F'} - z_2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z_F - z_1}{z_{F'} - z_1} \right) \equiv \pi + \arg \left(\frac{z_F - z_2}{z_{F'} - z_2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{M_1 F} ; \overrightarrow{M_1 F'} \right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{M_2 F} ; \overrightarrow{M_2 F'} \right) [2\pi]$$

توصلنا كذلك إلى أن كل عنصر $M(a, b)$ يقبل ممتالا و هو $M(a, -b)$

نستنتج إذن أن $(E, \times)$ زمرة.

و بما أن $\times$ تبادلي في E .

فإن $(E, \times)$ زمرة تبادلية.

■ (3) أ

ليكن $\times$ عنصرا من G .

إذن : $X = A^m$; $(\exists m \in \mathbb{N})$

نريد أن نبرهن على أن $A^n \in E$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

لدينا من أجل $n = 0$: $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(1, 0) \in E$

نفترض أن : $A^n \in E$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

لدينا : $A^n \in E$ و $A \in E$

إذن $A^n \times A \in E$

لأن $\times$ قانون داخلي في E .

إذن : $A^{n+1} \in E$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; A^n \in E$

ومنه : $X = A^m \in E$

خلاصة القول : $G \subset E$

■ (3) ب

للإجابة على هذا السؤال يكفي أن نبين أن : $(A^n)^{-1} = B^n$

من أجل $n = 0$ لدينا : $(A^0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^0$

نفترض أن : $(A^n)^{-1} = B^n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

لدينا : $(A^{n+1})^{-1} = (A^n \times A)^{-1}$

$= A^{-1} \times (A^n)^{-1}$

$= B \times B^n$

$= B^{n+1}$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; (A^n)^{-1} = B^n$

■ (3) ج

لنبرهن في البداية على الخاصية (#) التالية :

(#) $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; A^m \times B^n \in G \cup H$

ليكن m و n عددين صحيحين طبيعيين

نفصل هنا بين حالتين أساسيتين :

الحالة الأولى : إذا كان $m \geq n$

لدينا : $A^m \times B^n = A^{m-n} \times (A \times B)^n$

$= A^{m-n} \times I$

$= A^{m-n} \in G \subset G \cup H$

و لدينا :

$$\begin{aligned} (ac + 2bd)^2 - 2(bc + ad)^2 &= (ac)^2 + 4(bd)^2 - 2(bc)^2 - 2(ad)^2 \\ &= c^2 \underbrace{(a^2 - 2b^2)}_1 + 2d^2 \underbrace{(2b^2 - a^2)}_{-1} \\ &= c^2 - 2d^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذن : $M(ac + 2bd ; bc + ad) \in E$

و بالتالي : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

بالإستعانة بالعلاقة (*) لدينا :

$$\begin{aligned} M(a, b) \times M(c, d) &= M(ac + 2bd ; ad + bc) \\ &= M(ca + 2db ; cb + da) \\ &= M(c, d) \times M(a, b) \end{aligned}$$

إذن القانون $\times$ تبادلي في E .

■ (2) ب

لتكن $M(a, b)$ مصفوفة من E

$$\begin{aligned} (M(a, b))^{-1} &= \frac{1}{\det M(a, b)} \begin{pmatrix} a & -b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(a^2 - 2b^2)} \begin{pmatrix} a & -b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b\sqrt{2} \\ -b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} = M(a, -b) \in E \end{aligned}$$

و بالتالي : مقلوب كل مصفوفة $M(a, b)$ هو المصفوفة $M(a, -b)$

بتعبير آخر : $(M(a, b))^{-1} = M(a, -b)$

■ (2) ج

لدينا حسب الأسئلة السابقة :

$\times$ قانون تركيب داخلي في المجموعة E لأن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

و بما أن $\times$ تجميعي في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن $\times$ تجميعي كذلك في E .

و بما أن المصفوفة $I = M(1, 0)$ هي العنصر المحايد لـ $\times$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن $I = M(1, 0)$ هو العنصر المحايد لـ $\times$ في E

و ذلك لأن العنصر المحايد إن وجد فإنه يكون دائما وحيدا.

الحالة الرابعة : إذا كان $X \in H$ و $Y \in G$:

إذن : $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2$; $X = B^n$ و $Y = A^m$

$$\begin{aligned} X \times Y^{-1} &= B^n \times (A^m)^{-1} \\ &= B^n \times B^m \\ &= B^{m+n} \in H \subset G \cup H \end{aligned}$$

و منه : $X \times Y^{-1} \in G \cup H$

خلاصة القول : نلاحظ أنه في جميع هذه الحالات الأربع نجد :

$$(\forall X, Y \in G \cup H) ; X \times Y^{-1} \in G \cup H$$

وبالتالي : $G \cup H$ زمرة جزئية من $(E, \times)$.

التمرين الرابع : (9,5 ن)

■ (1) أ

لدينا : $g_n(x) = x + e^{-nx}$

إذن g_n قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

لأنها مجموع دالتين اعتياديتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

ولدينا : $g'_n(x) = 1 - ne^{-nx} = e^{-nx}(e^{nx} - n)$

بما أن : $(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall n \in \mathbb{N}) ; e^{-nx} > 0$

فإن إشارة $g'_n(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(e^{nx} - n)$

إذا كان $x = \frac{\ln n}{n}$ فإن : $g'_n(x) = 0$

إذا كان $x > \frac{\ln n}{n}$ فإن : $g'_n(x) > 0$ يعني g_n تزايدية

إذا كان $x < \frac{\ln n}{n}$ فإن : $g'_n(x) < 0$ يعني g_n تناقصية

■ (1) ب

لدينا الدالة g_n متصلة على $\mathbb{R}$.

و تناقصية على $]-\infty ; \frac{\ln n}{n}[$.

و تزايدية على $[\frac{\ln n}{n} ; +\infty[$

و تتعدم في $\frac{\ln n}{n}$

إذن g_n تقبل قيمة دنوية عند $u_n = \frac{\ln n}{n}$ و هذه القيمة هي

$$g_n(u_n) = \frac{1 + \ln n}{n}$$

إذن : $A^m \times B^n \in G \cup H$

الحالة الثانية : إذا كان $m \leq n$:

لدينا : $A^m \times B^n = (A \times B)^m \times B^{n-m}$

$$= I \times B^{n-m}$$

$$= B^{n-m} \in H \subset G \cup H$$

إذن : $A^m \times B^n \in G \cup H$

وبالتالي : $(\#) \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 ; A^m \times B^n \in G \cup H$

نستغل إذن هذه الخاصية الثمينة للإجابة على السؤال (ج) :

من الواضح أن $G \cup H$ جزء غير فارغ من E لأن : $(G, H) \subset E^2$

لتكن X و Y مصفوفتين من $G \cup H$ و نفصل بين أربع حالات أساسية :

الحالة الأولى : إذا كان $X \in G$ و $Y \in G$:

إذن : $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2$; $X = A^n$ و $Y = A^m$

و منه : $X \times Y^{-1} = A^n \times (A^m)^{-1}$

أي : $X \times Y^{-1} = A^n \times B^m$

إذن : $A^n \times B^m \in G \cup H$ و ذلك حسب خاصيتنا الثمينة (#) .

و منه : $X \times Y^{-1} \in G \cup H$

الحالة الثانية : إذا كان $X \in H$ و $Y \in H$:

إذن : $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2$; $X = B^n$ و $Y = B^m$

و منه : $X \times Y^{-1} = B^n \times (B^m)^{-1}$

أي : $X \times Y^{-1} = B^n \times A^m$

إذن : $B^n \times A^m \in G \cup H$ و ذلك حسب خاصيتنا الثمينة (#) .

و منه : $X \times Y^{-1} \in G \cup H$

الحالة الثالثة : إذا كان $X \in G$ و $Y \in H$:

إذن : $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2$; $X = A^n$ و $Y = B^m$

و منه : $X \times Y^{-1} = A^n \times (B^m)^{-1}$

أي : $X \times Y^{-1} = A^n \times A^m = A^{m+n} \in G \subset G \cup H$

و منه : $X \times Y^{-1} \in G \cup H$

بما أن : $e^{-x} > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$ فإن إشارة الفرق $g_1(x) - g_2(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1 - e^{-x})$ و نفصل هنا بين ثلاث حالات :

الحالة الأولى : إذا كان $x = 0$

فإن : $(1 - e^{-x}) = 0$ و منه $g_1(x) = g_2(x)$

إذن : $(\mathcal{E}_1)$ و $(\mathcal{E}_2)$ يتقاطعان في النقطة $(0,1)$.

الحالة الثانية : إذا كان $x > 0$

فإن : $(1 - e^{-x}) > 0$ و منه $g_1(x) > g_2(x)$

إذن : $(\mathcal{E}_1)$ يوجد فوق $(\mathcal{E}_2)$

الحالة الثالثة : إذا كان $x < 0$

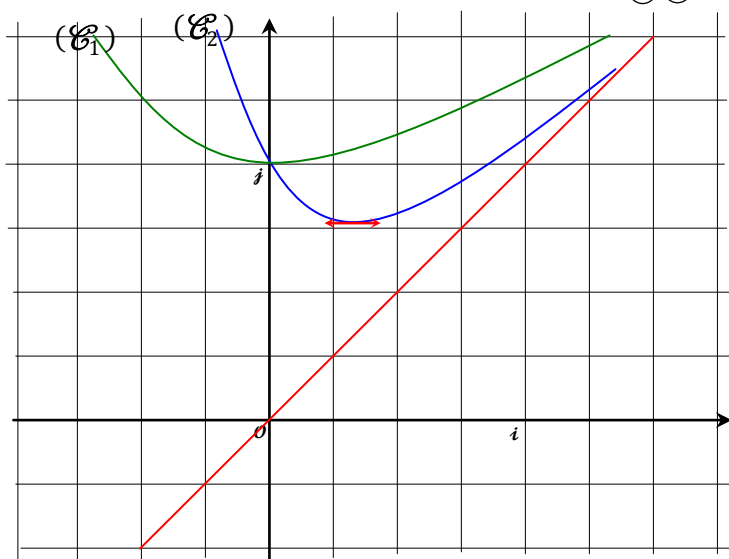
فإن : $(1 - e^{-x}) < 0$ و منه $g_1(x) < g_2(x)$

إذن : $(\mathcal{E}_1)$ يوجد أسفل $(\mathcal{E}_2)$

خلاصة :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_1(x) - g_2(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي $(\mathcal{E}_2)$ و $(\mathcal{E}_1)$	$(\mathcal{E}_2)$ فوق $(\mathcal{E}_1)$	$(\mathcal{E}_2)$ و $(\mathcal{E}_1)$ يتقاطعان في $(0,1)$	$(\mathcal{E}_1)$ فوق $(\mathcal{E}_2)$

■ (3) ب



■ (4) ا

$$I(x) = \int_0^x \underbrace{t}_{u'} \underbrace{e^{-2t}}_{v'} dt$$

$$\Leftrightarrow I(x) = \left[\frac{-te^{-2t}}{2} \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-2t} dt$$

$$\Leftrightarrow I(x) = \left[\frac{-te^{-2t}}{2} \right]_0^x + \frac{1}{2} \left[\frac{-e^{-2t}}{2} \right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow I(x) = \frac{-xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

■ (2) ا

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^{-nx}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{n}{nxe^{nx}} \right) \\ &= (-\infty) \left(1 + \frac{n}{0^-} \right) \\ &= (-\infty)(-\infty) \\ &= (+\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-nx}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{n}{nxe^{nx}} \right) \\ &= (+\infty) \left(1 + \frac{n}{(+\infty)} \right) \\ &= (+\infty)(1) \\ &= (+\infty) \end{aligned}$$

■ (2) ب

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_n(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n}{nxe^{nx}} \right) \quad \text{و لدينا :} \\ &= \left(1 + \frac{n}{+\infty} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g_n(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0$

إذن المنصف الأول للمعلم $y = x$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{E}_n)$ بجوار $(+\infty)$.

و لدينا من جهة أخرى : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{n}{nxe^{nx}} \right) = (-\infty) \quad \text{و}$$

إذن : $(\mathcal{E}_n)$ يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتيب.

■ (3) ا

لدراسة الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{E}_1)$ و $(\mathcal{E}_2)$

ندرس إشارة الفرق : $g_1(x) - g_2(x)$

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } g_1(x) - g_2(x) &= (x + e^{-x}) - (x + e^{-2x}) \\ &= e^{-x} - e^{-2x} \\ &= e^{-x}(1 - e^{-x}) \end{aligned}$$

■ (II) 2

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f_n :

f_n دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

إذن f_n تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

و بما أن : 0 عدد حقيقي فإنه يقبل سابقاً واحداً α_n بالتقابل f_n

بتعبير آخر : $\exists! \alpha_n \in \mathbb{R} ; f_n(\alpha_n) = 0$

■ (II) 3 (i)

بما أن f_n تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

فإن f_n تقابل من أي مجال I من $\mathbb{R}$ نحو صورته $f_n(I)$.

نأخذ المجال $\left[-\ln 2 ; \frac{-1}{2}\right]$ و نقول من أجل $n = 1$:

f_1 تقابل من $\left[-\ln 2 ; \frac{-1}{2}\right]$ نحو صورته $\left[\frac{1}{2} - \ln 2 ; \frac{-1}{2} + e^{\frac{-1}{2}}\right]$

و باستعمال القيم المقربة نحصل على :

f_1 تقابل من $\left[-\ln 2 ; \frac{-1}{2}\right]$ نحو $] -0,2 ; 0,1[$

و بما أن $0 \in] -0,2 ; 0,1[$ فإنه يمتلك سابقاً واحداً α_1 من $\left[-\ln 2 ; \frac{-1}{2}\right]$

يعني : $\exists! \alpha_1 \in \left[-\ln 2 ; \frac{-1}{2}\right] ; f_1(\alpha_1) = 0$

■ (II) 3 (b)

لدينا $f_1(\alpha_1) = 0$ إذن : $(\alpha_1 + e^{\alpha_1}) = 0$ و منه : $-\alpha_1 = e^{\alpha_1}$

الحالة الأولى : إذا كان $(x - \alpha_1) > 0$

فإن : $x > \alpha_1$ و منه $e^x > e^{\alpha_1}$

يعني : $e^x > -\alpha_1$ إذن : $(e^x + \alpha_1) > 0$

الحالة الثانية : إذا كان $(x - \alpha_1) < 0$

فإن : $x < \alpha_1$ و منه $e^x < e^{\alpha_1}$

يعني : $e^x < -\alpha_1$ إذن : $(e^x + \alpha_1) < 0$

نستنتج من هاتين الحالتين أن الكميّتين $(x - \alpha_1)$ و $(e^x + \alpha_1)$ لهما نفس الإشارة .

■ (II) 4 (i)

لدينا : $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$

إذن : $\varphi'(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}$

من أجل : $x \leq \frac{-1}{2}$

لدينا : $e^x \leq e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

و منه : $e^x - \frac{1}{\sqrt{e}} \leq 0$

أي : $\forall x \in \left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right] ; \varphi'(x) \leq 0$

و بالتالي : φ دالة تناقصية على المجال $\left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow I(x) = \frac{-e^{-2x}}{4} (2x + 1 - e^{2x})$$

■ (II) 4 (b)

لدينا : $\forall x \in [0; \ln 2] ; h_2(x) = x + e^{-2x}$

إذن h_2 متصلة على المجال : $[0; \ln 2]$

و $\forall x \in [0; \ln 2] ; h_2(x) > 0$

إذن حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران التمثيل المبياني لـ h_2

حول محور الأفاصيل هو :

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} (h_2(x))^2 dx$$

$$\Leftrightarrow V = \pi \int_0^{\ln 2} (x + e^{-2x})^2 dx$$

$$\Leftrightarrow V = \pi \int_0^{\ln 2} (x^2 + e^{-4x} + 2xe^{-2x}) dx$$

$$\Leftrightarrow V = \pi \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\ln 2} + \left[\frac{-e^{-4x}}{4} \right]_0^{\ln 2} + 2I(\ln 2) \right)$$

$$\Leftrightarrow V = \pi \left(\frac{(\ln 2)^3}{3} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{39}{64} \right)$$

■ 5

لدينا حسب نتيجة السؤال 1 (b) :

$$u_n = \frac{\ln n}{n} \quad \text{و} \quad v_n = g_n(u_n) = \left(\frac{1 + \ln n}{n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \ln n}{n} \right) = 0$$

إذن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتاليتان متقاربتان و تؤولان معا إلى الصفر.

■ (II) 1

لدينا : $f_n(x) = x + e^{nx}$

إذن $f'_n(x) = 1 + ne^{nx} > 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f_n كما يلي :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
f_n	$-\infty$	$+\infty$

■ (II) 4 (ب)

نعلم أن الدالة Exp قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن نستطيع تطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على أي مجال من $\mathbb{R}$.

نختار المجال الذي طرفاه α_1 و x بحيث: $x \in]-\infty; \frac{-1}{2}]$

إذن يوجد c محصور بين α_1 و x بحيث:

$$\frac{e^x - e^{\alpha_1}}{x - \alpha_1} = e^c \Leftrightarrow \frac{e^x + \alpha_1}{x - \alpha_1} = e^c$$

و بما أن $(e^x + \alpha_1)$ و $(x - \alpha_1)$ لهما نفس الإشارة فإن:

$$\Rightarrow \frac{|e^x + \alpha_1|}{|x - \alpha_1|} = e^c$$

$$\Leftrightarrow |e^x + \alpha_1| = e^c |x - \alpha_1| \quad (*)$$

من جهة أخرى لدينا: $c \in]-\infty; \frac{-1}{2}]$ إذن: $c < \frac{-1}{2}$

و منه: $e^c < \frac{1}{\sqrt{e}}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|x - \alpha_1|$ نحصل على:

$$(**) \quad e^c |x - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$$

من النتيجتين (*) و (**) نستنتج أن:

$$\forall x \in]-\infty; \frac{-1}{2}] ; |e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$$

■ (II) 5 (أ)

في البداية يجب أن نبرهن على أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}$$

من أجل: $n = 0$ لدينا: $\frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_0 = \frac{-1}{2} \leq \frac{-1}{2}$

نفترض أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}$

$$\text{إذن: } e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}} \leq e^{\beta_n} \leq e^{\frac{-1}{2}}$$

$$\text{و منه: } \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq -e^{\beta_n} \leq -e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}}$$

بالاستعانة بالآلة الحاسبة نجد: $-e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}} \approx -0,54 < \frac{-1}{2}$

$$\text{إذن: } \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq -e^{\beta_n} \leq \frac{-1}{2}$$

$$\text{أي: } (\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_{n+1} \leq \frac{-1}{2}$$

و بالتالي حسب مبدأ التراجع: $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{-1}{\sqrt{e}} \leq \beta_n \leq \frac{-1}{2}$

$$(*) \quad \beta_n \leq \frac{-1}{2} \quad \text{ما يهمنا في هذا التأطير هو الشق:}$$

و ذلك من أجل تطبيق نتيجة السؤال (ب)

لدينا حسب نتيجة السؤال (ب):

$$\forall x \in]-\infty; \frac{-1}{2}] ; |e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$$

إذن من أجل: $x = \beta_n$ المنتمي إلى $]-\infty; \frac{-1}{2}]$ حسب (*): نجد:

$$|e^{\beta_n} + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1|$$

$$\Leftrightarrow |-e^{\beta_n} - \alpha_1| = |e^{\beta_n} + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1|$$

$$\Leftrightarrow |\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_n - \alpha_1| \quad (777)$$

و بالتالي: $(\exists a = \frac{1}{\sqrt{e}} \in \mathbb{R}) |\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq a |\beta_n - \alpha_1|$

لدينا باستعمال النتيجة (777):

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow |\beta_n - \alpha_1| &\leq \frac{1}{\sqrt{e}} |\beta_{n-1} - \alpha_1| \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 |\beta_{n-2} - \alpha_1| \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^3 |\beta_{n-3} - \alpha_1| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n |\beta_0 - \alpha_1| \end{aligned}$$

$$\text{إذن: } (\forall n \in \mathbb{N}) ; |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{-1}{2} - \alpha_1\right|$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right|$$

بما أن $\alpha_1 < 0$ فإن: $\left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right| < \frac{1}{2}$

$$(1111) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) ; |\beta_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} \quad \text{و منه:}$$

نلاحظ أن: $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}$ متتالية هندسية أساسها العدد الموجب

و الأصغر من 1: $\frac{1}{\sqrt{e}}$

$$\text{إذن: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} = 0$$

و منه حسب التأطير (1111) نستنتج أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n - \alpha_1| = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \alpha_1 \quad \text{أي:}$$