

التمرين الأول : (3,0 ن)

■ 1 أ

لدينا (x, y) حل للمعادلة (E) .

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 7) = y(2x + y)$$

$$\Leftrightarrow (\delta a)^2((\delta a)^2 + 7) = (\delta b)(2\delta a + \delta b)$$

$$\Leftrightarrow a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a + b) (*)$$

■ 1 ب

لدينا : $x \wedge y = \delta$

$$\Leftrightarrow \delta a \wedge \delta b = \delta$$

$$\Leftrightarrow a \wedge b = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 \wedge b = 1 \quad (1)$$

و لدينا حسب النتيجة (*) : $b / a^2(\delta^2 a^2 + 7)$

و بما أن $a^2 \wedge b = 1$ وذلك حسب النتيجة (1)

فإنه حسب (Gauss) : $b / (\delta^2 a^2 + 7)$

ومنه : $(\exists k \in \mathbb{Z}) : (\delta^2 a^2 + 7) = kb$

في المعادلة (*) نعوض التعبير $(\delta^2 a^2 + 7)$ بالتعبير kb نجد :

$$kba^2 = b(2a + b)$$

$$\Leftrightarrow ka^2 = (2a + b)$$

■ 1 ج

ننطلق من الكتابة : $ka^2 = 2a + b$

$$\Leftrightarrow a(ka - 2) = b$$

$$\Rightarrow a / b$$

$$\Rightarrow a / 1b$$

و بما أن : $a \wedge b = 1$ فإنه حسب (Gauss) : $a / 1$

و نعلم أن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الذي يقسم 1 هو 1 نفسه

$$a = 1 \quad \text{و بالتالي :}$$

■ 1 د

نعوض a بالعدد 1 في المعادلة (*) نجد : $\delta^2 + 7 = b(2 + b)$

$$\Leftrightarrow \delta^2 + 7 = b^2 + 2b$$

$$\Leftrightarrow \delta^2 + 7 + 1 = b^2 + 2b + 1$$

$$\Leftrightarrow \delta^2 + 8 = (b + 1)^2$$

■ 2

ننطلق من الكتابة : $(b + 1)^2 = \delta^2 + 8$

$$\Leftrightarrow (b + 1)^2 - \delta^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow (b + 1 - \delta)(b + 1 + \delta) = 8$$

نفصل هنا بين أربع حالات :

الحالة الأولى :

$$\begin{cases} b + 1 - \delta = -8 \\ b + 1 + \delta = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-11}{2} \\ \delta = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \notin \mathbb{N} \\ y = \frac{-77}{4} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 1 - \delta = -1 \\ b + 1 + \delta = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-11}{2} \\ \delta = \frac{-7}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-7}{2} \notin \mathbb{N} \\ y = \frac{77}{4} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} b + 1 - \delta = 8 \\ b + 1 + \delta = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{7}{2} \\ \delta = \frac{-7}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-7}{2} \notin \mathbb{N} \\ y = \frac{-49}{4} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 1 - \delta = 1 \\ b + 1 + \delta = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{7}{2} \\ \delta = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \notin \mathbb{N} \\ y = \frac{49}{4} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

أو

الحالة الثانية :

$$\begin{cases} b + 1 - \delta = 4 \\ b + 1 + \delta = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ \delta = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin \mathbb{N} \\ y = -2 \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 1 - \delta = 2 \\ b + 1 + \delta = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in \mathbb{N} \\ y = 2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أو

الحالة الثالثة :

$$\begin{cases} b + 1 - \delta = -4 \\ b + 1 + \delta = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in \mathbb{N} \\ y = -4 \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 1 - \delta = -2 \\ b + 1 + \delta = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ \delta = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin \mathbb{N} \\ y = 4 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أو

■ (2) (i)

$$I(x_1) = \frac{3}{4} \int_{x_1}^4 \sqrt{16 - x^2} dx \quad \text{لدينا}$$

$$dx = -4 \sin t \, dt \quad \text{نضع} \quad x = 4 \cos t \quad \text{إذن}$$

$$x_1 = 4 \cos t_1 \quad \text{لأن} \quad t = t_1 \quad \text{فإن} \quad x = x_1 \quad \text{إذا كان}$$

$$\text{إذا كان} \quad x = 4 \quad \text{فإن} \quad t = 0 \quad \text{لأن} \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

إذن :

$$I(x_1) = \frac{3}{4} \int_{t_1}^0 (4 \sin t)(-4 \sin t) dt = -12 \int_{t_1}^0 \sin^2 t \, dt$$

$$\sin^2 t = \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) \quad \text{نعلم أن}$$

$$\text{و ذلك بإخطاط الدالة المثلثية} \quad t \rightarrow \sin^2 t$$

$$I(x_1) = -12 \int_{t_1}^0 \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt \quad \text{إذن}$$

$$\Leftrightarrow I(x_1) = -12 \left(\left[\frac{t}{2} \right]_{t_1}^0 - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2t}{2} \right]_{t_1}^0 \right)$$

$$\Leftrightarrow I(x_1) = -12 \left(\frac{-t_1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{-\sin 2t_1}{2} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow I(x_1) = 6t_1 - 3 \sin 2t_1$$

■ (2) (ب)

لدينا M_1 نقطة من (E) و أفصولها x_1 .

إذن : أرئوبها y_1 يحقق ما يلي :

$$y_1 = \frac{3}{4} \sqrt{16 - x_1^2}$$

$$\Leftrightarrow y_1 = \frac{3}{4} \sqrt{16 - (4 \cos t_1)^2}$$

$$\Leftrightarrow y_1 = \frac{3}{4} \sqrt{16(1 - \cos^2 t_1)}$$

$$\Leftrightarrow y_1 = \frac{3}{4} \sqrt{16 \sin^2 t_1}$$

$$\Leftrightarrow y_1 = \frac{3}{4} \cdot 4 \sin t_1$$

$$\Leftrightarrow y_1 = 3 \sin t_1$$

نستنتج من هذه الدراسة أن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا في $(\mathbb{N}^*)^2$

و هو الزوج : $(x, y) = (1, 2)$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■ (1) (i)

يكون التعبير $\sqrt{16 - x^2}$ معرفًا إذا كان $16 - x^2 \geq 0$

و يبين الجدول التالي إشارة :

	$-\infty$	-4	4	$+\infty$	
$(4 - x)$	+		+	0	-
$(4 + x)$	-	0	+		+
$(16 - x^2)$	-	0	+	0	-

يكون إذن التعبير $\sqrt{16 - x^2}$ معرفًا إذا كان $x \in [-4; 4]$

و لدينا : $y = \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2} \geq 0$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{9}{16} (16 - x^2)$$

$$\Rightarrow y^2 + \frac{9}{16} x^2 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

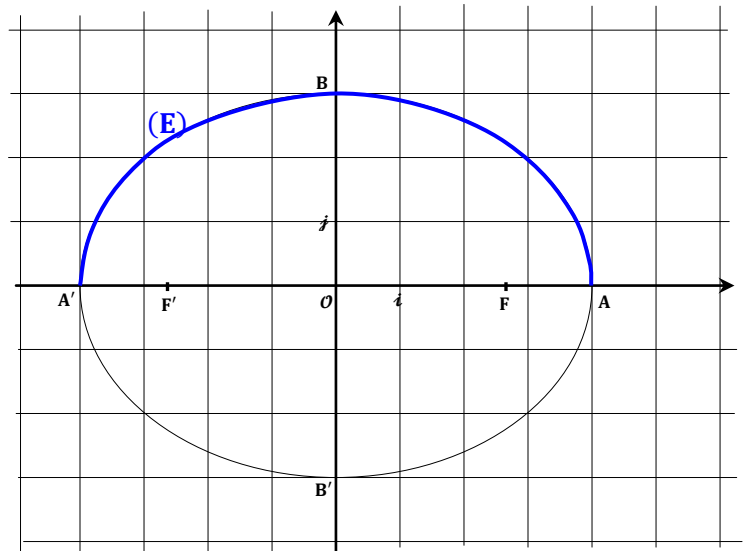
$$\Rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \quad ; \quad x \in [-4; 4] \quad ; \quad y \geq 0$$

إذن : (E) هو النصف العلوي للإهليلج الذي مركزه O

و رؤوسه $A(4, 0)$ و $A'(-4, 0)$ و $B(0, 3)$ و $B'(0, -3)$

و بؤرتاه : $F(\sqrt{7}; 0)$ و $F'(-\sqrt{7}; 0)$

■ (1) (ب)



■ 2 (هـ)

لدينا : $M_1 \begin{pmatrix} 4 \cos t_1 \\ 3 \sin t_1 \end{pmatrix}$

يعني : $\overrightarrow{OM_1} = 4 \cos(t_1) \vec{i} + 3 \sin(t_1) \vec{j}$

من أجل : $t_1 = \frac{\pi}{4}$ نحصل على : $\overrightarrow{OM_1} = 2\sqrt{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{j}$

ونعلم أن : $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$ و $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

إذن : $\overrightarrow{OM_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OB}$

و منه النقطة M_1 مُعرَّفة بالزوج : $(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$ في المعلم $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

التمرين الثالث : (4,5 ن)

■ 1 (I)

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتين من E

لدينا :

$$\begin{aligned} M(a, b) + M(c, d) &= \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d & d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a+b) + (c+d) & -(b+d) \\ (b+d) & (a+c) \end{pmatrix} \\ &= M((a+c), (b+d)) \in E \end{aligned}$$

إذن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned} M(a, b) \times M(c, d) &= \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c+d & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ac-bd) + (bc+ad+bd) & -(bc+ad+bd) \\ (bc+ad+bd) & (ac-bd) \end{pmatrix} \\ &= M((ac-bd); (bc+ad+bd)) \in E \end{aligned}$$

إذن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

■ 2 (I)

لدينا E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$

إذن + قانون تركيب داخلي في E .

و بما أن : + تبادلي و تجميعي في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

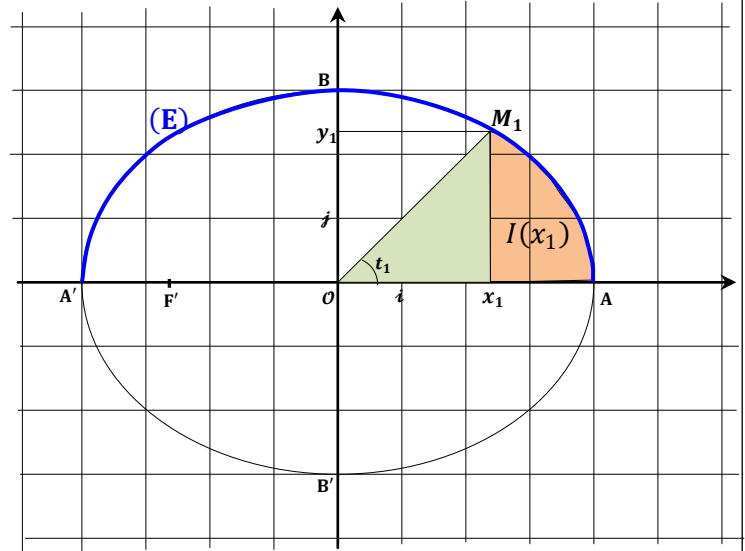
فإن + تبادلي و تجميعي في E .

و بما أن $M(0,0)$ هو العنصر المحايد لـ + في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن : $M(0,0)$ هو العنصر المحايد لـ + في E .

■ 2 (ج)

نستعين بالشكل التالي :



لدينا حسب هذا الشكل : $\mathcal{S}(x_1) = \mathcal{S}(Ox_1M_1) + I(x_1)$

$$\begin{aligned} &= \frac{x_1 \times y_1}{2} + I(x_1) \\ &= \frac{4 \cos(t_1) \times 3 \sin(t_1)}{2} + I(x_1) \\ &= 6 \cos(t_1) \sin(t_1) + I(x_1) \\ &= 3 \sin(2t_1) + I(x_1) \\ &= 3 \sin(2t_1) + 6t_1 - 3 \sin(2t_1) \\ &= 6t_1 \end{aligned}$$

■ 2 (د)

لدينا : $\mathcal{S}(x_1) = 6t_1$

إذن : $\mathcal{S} = \mathcal{S}(0) = \frac{6\pi}{2} = 3\pi$

■ 2 (و)

$$\mathcal{S}(x_1) = \frac{1}{2} \mathcal{S}$$

$$\Leftrightarrow 6t_1 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{4}$$

و لدينا :

$$M(a, b) + M(-a, -b) = M(-a, -b) + M(a, b) = M(0, 0)$$

إذن كل مصفوفة $M(a, b)$ من E تقبل مماثلة $M(-a, -b)$ بالنسبة لـ $+$

و بالتالي : $(E, +)$ زمرة تبادلية . (1)

بما أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة .

و بما أن E جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

فإن : $\times$ تجميعي و توزيعي على $+$ في E . (2)

و لدينا : $M(a, c) \times M(1, 0) = M(a, c)$

و : $M(1, 0) \times M(a, c) = M(a, c)$

إذن $M(1, 0)$ هو العنصر المحايد لـ $\times$ في E . (3)

و لدينا :

$$M(a, b) \times M(c, d) = M((ac - bd); (bc + ad + bd))$$

$$= M(c, d) \times M(a, b)$$

و منه : $\times$ تبادلي في E . (4)

من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$(E, +, \times)$ حلقة واحدة تبادلية.

■ (I) 3 (i)

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث : $x^2 + xy + y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - xy = -xy \\ x^2 + xy + y^2 + xy = xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = -xy \geq 0 \\ (x + y)^2 = xy \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow xy = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 0$$

إذن : $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ نقطة من الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها O و شعاعها 0

و لإيقاف هذا العبث المبين نقول : $x = y = 0$

عكسيا : إذا كان $x = y = 0$ فإن : $x^2 + xy + y^2 = 0$

و بالتالي :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x^2 + xy + y^2) \Leftrightarrow (x = y = 0)$$

■ (I) 3 (b)

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Rightarrow \det M(a, b) = a^2 + ab + b^2$$

إذن : تكون المصفوفة $M(a, b)$ قابلة للقلب إذا كان $a^2 + ab + b^2 \neq 0$

يعني : $a \neq 0$ أو $b \neq 0$

و بالتالي : جميع عناصر المجموعة $E \setminus \{M(0, 0)\}$ قابلة للقلب .

$$(M(a, b))^{-1} = \frac{1}{a^2 + ab + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & (a+b) \end{pmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{1}{a^2 + ab + b^2} \begin{pmatrix} (a+b) + (-b) & -(-b) \\ (-b) & (a+b) \end{pmatrix}$$

$$= M\left(\frac{a+b}{a^2 + ab + b^2}; \frac{-b}{a^2 + ab + b^2}\right)$$

■ (I) 3 (c)

نعتبر المجموعة $(E \setminus \{M(0, 0)\}; \times)$

لدينا : $\times$ قانون تركيب داخلي في $E \setminus \{M(0, 0)\}$

لأن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

و لدينا : $M(1, 0)$ هو العنصر المحايد لـ $\times$ في $E \setminus \{M(0, 0)\}$

و كل عنصر يقبل ممثلا (مقلوبا) في $E \setminus \{M(0, 0)\}$

إذن : $(E \setminus \{M(0, 0)\}; \times)$ زمرة . (5)

و نعلم أن : $(E, +)$ زمرة تبادلية (6)

و نعلم كذلك أن $\times$ تبادلي و توزيعي على $+$ في $E \setminus \{M(0, 0)\}$ (7)

إذن من النتائج (5) و (6) و (7) نستنتج أن : $(E, +, \times)$ جسم تبادلي

■ (II) 1

ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$

إذن : $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$; $(\exists \sigma_1 \in \mathbb{R}), (\exists \sigma_2 \in \mathbb{R}^*)$

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا .

نضع : $z = m_1 + m_2 \sigma$

$$\Rightarrow z = m_1 + m_2(\sigma_1 + i\sigma_2)$$

$$\Rightarrow z = m_1 + m_2\sigma_1 + im_2\sigma_2$$

بما أن : $z = x + iy$ فإن : $\begin{cases} x = m_1 + m_2\sigma_1 \\ y = m_2\sigma_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} m_1 = \left(x - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}y\right) \in \mathbb{R} \\ m_2 = \left(\frac{y}{\sigma_2}\right) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{و منه :}$$

■ (II) ④

لدينا : $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

إن : $\sigma^2 + 1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1$
 $= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$
 $= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma$ إذن : $\sigma^2 + 1 = \sigma$

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتين من E

لدينا : $\psi(M(a, b) \times M(c, d)) = \psi(M(ac - bd ; bc + ad + bd))$

$= (ac - bd) + \sigma(bc + ad + bd)$

و لدينا من جهة أخرى :

$\psi(M(a, b)) \times \psi(M(c, d)) = (a + \sigma b) \times (c + \sigma d)$

$= ac + ad\sigma + bc\sigma + \sigma^2 bd$
 $= ac + ad\sigma + bc\sigma + (\sigma - 1)bd$
 $= ac + ad\sigma + bc\sigma + bd\sigma - bd$
 $= (ac - bd) + \sigma(bc + ad + bd)$

نستنتج إذن أن :

$\psi(M(a, b) \times M(c, d)) = \psi(M(a, b)) \times \psi(M(c, d))$

و بالتالي : ψ تشاكل من $(E, \times)$ نحو $(\mathbb{C}, \times)$

التمرين الرابع : (9,0 ن)

■ (I) ①

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4}{x}\right) \left(\frac{\ln x}{x}\right) - \frac{1}{2} = -\infty$

إن محور الأرتايب مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C})$

و لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x}\right) \left(\frac{\ln x}{x}\right) - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$

إن المستقيم $y = \frac{-1}{2}$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

■ (I) ② (i)

f دالة قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ لأنها عبارة عن تشكيلة من الدوال

المعرفة و القابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$

ليكن x عنصرا من $]0; +\infty[$

لدينا : $f'(x) = 4 \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{4(x - 2x \ln x)}{x^4}$
 $= \frac{4(1 - 2 \ln x)}{x^3}$

يعني : $(\forall z \in \mathbb{C}), (\exists (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2) ; z = m_1 + m_2 \sigma$

إن $\{1; \sigma\}$ أسرة مولدة لـ $\mathbb{C}$. (8)

لتكن $x + \sigma y = 0$ تأليف خطية منعقدة لـ 1 و σ يعني :

$\Leftrightarrow x + y(\sigma_1 + i\sigma_2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y\sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

إن $\{1; \sigma\}$ أسرة حرة (9)

من (8) و (9) نستنتج أن $\{1; \sigma\}$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

■ (II) ②

لتكن $M(a, b)$ و $M(c, d)$ مصفوفتين من E

لدينا : $\psi(M(a, b) + M(c, d)) = \psi(M(a + c ; b + d))$

$= (a + c) + \sigma(b + d)$

$= (a + \sigma b) + (c + \sigma d)$

$= \psi(M(a, b)) + \psi(M(c, d))$

إن ψ تشاكل من $(E, +)$ نحو $(\mathbb{C}, +)$

ليكن $(a + \sigma b)$ عنصرا من $\mathbb{C}$.

لنحل المعادلة $\psi(M(x, y)) = a + \sigma b$ ذات المجهول $M(x, y)$ في E

لدينا : $\psi(M(x, y)) = a + \sigma b$

$\Leftrightarrow x + \sigma y = a + \sigma b$

بما أن $(1, \sigma)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

فإن كل عدد عقدي يكتب بكيفية وحيدة على شكل تأليف خطية للعنصرين 1 و σ

لدينا : $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

و بالتالي :

$(\forall (a + \sigma b) \in \mathbb{C}) ; \exists ! M(x, y) \in E : \psi(M(x, y)) = (a + \sigma b)$

و منه : ψ تقابل من $(E, +)$ نحو $(\mathbb{C}, +)$

و بالتالي ψ تشاكل تقابلي من $(E, +)$ نحو $(\mathbb{C}, +)$

■ (II) ③

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - z + 1 = 0$

لدينا : $\Delta = (i\sqrt{3})^2$

إن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$
 $= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ و $= e^{i\frac{\pi}{3}}$
 $= e^{-i\frac{\pi}{3}}$

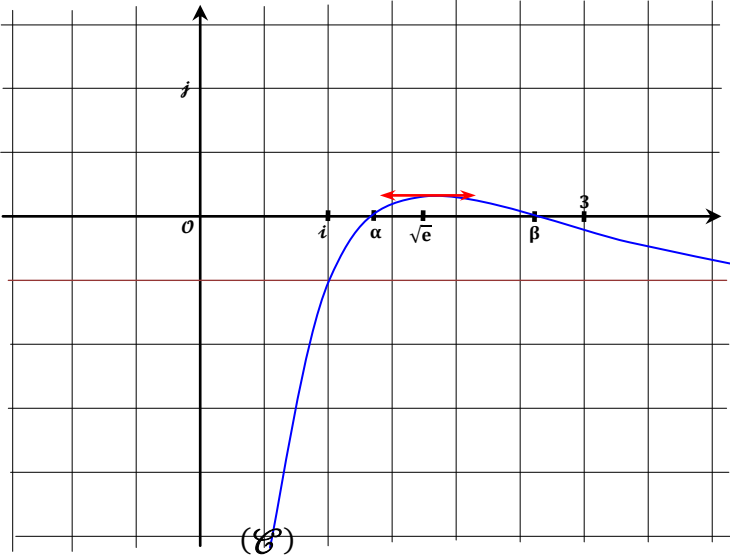
■ (I) ④

معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الألفصول 1 يكتب على شكل :

$$\begin{aligned}(T) : y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= 4(x-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 4x - \frac{9}{2}\end{aligned}$$

و بالتالي : $(T) : y = 4x - \frac{9}{2}$

■ (I) ⑤



■ (II) ①

ليكن $t \geq 0$ إذن $-t^2 \leq 0$ ومنه $1 - t^2 \leq 1$

$$(1-t)(1+t) \leq 1 \quad \text{أي :}$$

نضرب كلا الطرفين في العدد الموجب $\left(\frac{1}{1+t}\right)$ نحصل على :

$$(1) \quad 1 - t \leq \frac{1}{1+t}$$

$$(2) \quad \frac{1}{1+t} \leq 1 \quad \text{ولدينا كذلك } 1+t \geq 1 \quad \text{إذن :}$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\forall t \in [0; +\infty[\quad ; \quad 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

■ (II) ②

ليكن a عنصرا من $[0; +\infty[$

$$\forall t \in [0; +\infty[\quad ; \quad 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Rightarrow \int_0^a (1-t) dt \leq \int_0^a \left(\frac{1}{1+t}\right) dt \leq \int_0^a 1 dt$$

$$\Rightarrow \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^a \leq [\ln(1+t)]_0^a \leq [t]_0^a$$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{a^2}{2}\right) \leq \ln(1+a) \leq a$$

■ (I) ② ب

$$\text{لدينا : } \forall x \in]0; +\infty[\quad ; \quad f'(x) = \frac{4(1-2\ln x)}{x^3}$$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-2\ln x)$

$$\text{إذا كان : } x = \sqrt{e} \quad \text{فإن : } f'(x) = 0$$

$$\text{إذا كان : } x > \sqrt{e} \quad \text{فإن : } f'(x) < 0$$

$$\text{إذا كان : } x < \sqrt{e} \quad \text{فإن : } f'(x) > 0$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
f	$-\infty$	$\frac{2}{e} - \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

■ (I) ③

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f :

f دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $]0; \sqrt{e}[$

إذن f تقابل من أي مجال I ضمن $]0; \sqrt{e}[$ نحو صورته $f(I)$.

إذن : f تقابل من المجال $]1; \sqrt{e}[$ نحو $]f(1); f(\sqrt{e})[$

أي f تقابل من $]1; \sqrt{e}[$ نحو $] -0,5 ; 0,2[$

و بما أن : $0 \in] -0,5 ; 0,2[$ فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً α في المجال

$$(1) \quad \exists! \alpha \in]1; \sqrt{e}[\quad ; \quad f(\alpha) = 0 \quad \text{أي :} \quad f \text{ بالتقابل }]1; \sqrt{e}[$$

وبنفس الطريقة :

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال $[\sqrt{e}; +\infty[$

إذن f تقابل من أي مجال J ضمن $[\sqrt{e}; +\infty[$ نحو صورته $f(J)$

أي f تقابل من المجال $[\sqrt{e}; 3[$ نحو المجال $]f(3); f(\sqrt{e})[$

أي f تقابل من $[\sqrt{e}; 3[$ نحو $] -0,01 ; 0,2[$

و بما أن $0 \in] -0,01 ; 0,2[$ فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً β في

المجال $[\sqrt{e}; 3[$ بالتقابل f

$$(2) \quad \exists! \beta \in [\sqrt{e}; 3[\quad ; \quad f(\beta) = 0 \quad \text{أي :}$$

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين α و β

$$\text{بحيث : } 1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3$$

(III) ③ ب

x	0	1	$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	-	0	+
$(\mathcal{E}_n)$ و $(\mathcal{E}_{n+1})$	$(\mathcal{E}_n)$ أسفل $(\mathcal{E}_{n+1})$	$(\mathcal{E}_n)$ و $(\mathcal{E}_{n+1})$ يتقاطعان	$(\mathcal{E}_{n+1})$ فوق $(\mathcal{E}_n)$

(III) ④

لدينا f_n دالة تزايدية قطعاً على $]0; \sqrt{e}[$

إذن f_n تقابل من أي مجال I ضمن $]0; \sqrt{e}[$ نحو صورته $f_n(I)$

و منه f_n تقابل من $]1; \sqrt{e}[$ نحو $]0,5; 0,2[$

و بما أن : $0 \in]0,5; 0,2[$ فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً u_n من $]1; \sqrt{e}[$.

يعني : $(1) \quad \exists! u_n \in]1; \sqrt{e}[; f_n(u_n) = 0$

وبنفس الطريقة : لدينا f_n تناقصية قطعاً على $[\sqrt{e}; +\infty[$

إذن f_n تقابل من أي مجال J ضمن $[\sqrt{e}; +\infty[$ نحو صورته $f_n(J)$

و منه : f_n تقابل من $[\sqrt{e}; n[$ نحو $]f_n(n); 0,2[$

و بما أن $0 \in]f_n(n); 0,2[$ لأن $\frac{\ln n}{n} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً v_n من $[\sqrt{e}; n[$

يعني : $(2) \quad \exists! v_n > \sqrt{e} ; f_n(v_n) = 0$

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين

u_n و v_n بحيث : $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$

(III) ⑤

لدينا : $\sqrt{e} > u_n > 1$ إذن حسب (III) ③ : $f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n)$

و نعلم أن : $f_{n+1}(u_{n+1}) = f_n(u_n) = 0$

إذن : $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$

و بما أن f_{n+1} دالة تزايدية على $]1; \sqrt{e}[$ فإن : $u_n > u_{n+1}$

و بالتالي : $(u_n)_{n \geq 4}$ متتالية تناقصية قطعاً .

(III) ⑥ ا

لدينا : $\forall a \in [0; +\infty[; a - \frac{a^2}{2} \leq \ln(1+a) \leq a$

و لدينا : $u_n > 1$ إذن : $u_n - 1 > 0$

و منه : $(u_n - 1) - \frac{1}{2}(u_n - 1)^2 \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)$

$\Leftrightarrow (\forall n \geq 4) ; \frac{2(u_n - 1) - (u_n - 1)^2}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)$

$\Leftrightarrow (\forall n \geq 4) ; \frac{(u_n - 1)(2 - u_{n+1})}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1)$

(III) ①

لدينا f_n دالة قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$

لأنها تضم تركيبة من الدوال الاعتيادية القابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$

ليكن x عنصراً من $]0; +\infty[$

$$f'_n(x) = n \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)' = \frac{n(1 - 2 \ln x)}{x^3}$$

بما أن : $\forall x > 0 ; \frac{n}{x^3} \geq 0$

فإن إشارة $f'_n(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1 - 2 \ln x)$

نستنتج إذن الجدول التالي :

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
f_n	$-\infty$	$\frac{n}{2e} - \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

(III) ②

دراسة النقعر و نقط الانعطاف يستدعي حساب المشتقة الثانية لـ f_n

$$f''_n(x) = \frac{x^3 \left(\frac{-2n}{x} \right) - 3x^2 n(1 - 2 \ln x)}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow f''_n(x) = \frac{n(6 \ln x - 5)}{x^4}$$

إذن $f''_n(x)$ تنعدم إذا كان $(6 \ln x - 5) = 0$

يعني : $\ln x = \frac{5}{6}$ أي : $x = e^{\frac{5}{6}}$

إذا كان $x > e^{\frac{5}{6}}$ فإن : $(6 \ln x - 5) > 0$ و منه : $f''(x) > 0$

إذا كان $x < e^{\frac{5}{6}}$ فإن : $(6 \ln x - 5) < 0$ و منه : $f''(x) < 0$

نلاحظ أن $f''_n(x)$ تنعدم في النقطة ذات الأفضول $e^{\frac{5}{6}}$ و تغير إشارتها

بجوار تلك النقطة

إذن $(\mathcal{E}_n)$ يقبل نقطة انعطاف و هي : $\left(e^{\frac{5}{6}} ; \frac{5n}{6} e^{-\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} \right)$

(III) ③ ا

لدينا : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

إذا كان $x = 0$ فإن $f_{n+1}(x) = f_n(x)$

إذا كان $x > 1$ فإن $f_{n+1}(x) > f_n(x)$

إذا كان $x < 1$ فإن $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

■ (III) 6 د

لدينا : $\frac{1}{2n} \leq (u_n - 1) \leq \frac{e}{n}$

إذن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - 1) = 0$ أي : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$

■ (III) 7 ا

لدينا : $n \geq 4$

$$\Rightarrow \frac{5n}{6} e^{-\frac{5}{3}} \geq \frac{20}{6} e^{-\frac{5}{3}}$$

باستعمال الآلة الحاسبة لدينا : $\frac{20}{6} e^{-\frac{5}{3}} \approx 0,63 > 0,5$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{20}{6} e^{-\frac{5}{3}} &> \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{5n}{6} e^{-\frac{5}{3}} &\geq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{5n}{6} e^{-\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} &\geq 0 \\ \Rightarrow f_n \left(e^{\frac{5}{6}} \right) &\geq f_n(v_n) \end{aligned}$$

و بما أن f_n دالة تناقصية على المجال $[\sqrt{e}; +\infty[$

فإن : $e^{\frac{5}{6}} \leq v_n$

■ (III) 7 ب

لدينا : $f_n(v_n) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{n \ln(v_n)}{(v_n)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(v_n) = \frac{(v_n)^2}{2n} \quad (*)$$

ولدينا : $v_n > e^{\frac{5}{6}}$ إذن : $\ln(v_n) > \frac{5}{6}$

ومنه باستعمال (*) نجد : $\frac{(v_n)^2}{2n} > \frac{5}{6}$

$$\Leftrightarrow (v_n)^2 > \frac{10}{6} n$$

$$\Leftrightarrow v_n > \sqrt{\frac{10n}{6}}$$

بما أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{10n}{6}} = +\infty$

فإن : $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 4) ; \frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{2} \leq \ln(u_n) \leq (u_n - 1) \quad (*)$$

■ (III) 6 ب

ونعلم أن : $f_n(u_n) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{n \ln(u_n)}{(u_n)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(u_n) = \frac{(u_n)^2}{2n}$$

ننتقل إذن من الشق الأول من التأيير (*) : $\ln(u_n) \leq u_n - 1$

$$\Leftrightarrow \frac{(u_n)^2}{2n} \leq u_n - 1 \quad (7)$$

و لدينا كذلك حسب الشق الثاني من التأيير (*) :

$$\frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{2} \leq \ln(u_n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(u_n - 1)(3 - u_n)}{2} \leq \frac{(u_n)^2}{2n}$$

$$\Leftrightarrow (u_n - 1) \leq \frac{2(u_n)^2}{2n(3 - u_n)}$$

$$\Leftrightarrow (u_n - 1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3 - u_n)} \quad (8)$$

من (7) و (8) نحصل على التأيير (9) التالي :

$$(9) \quad (\forall n \geq 4) ; \frac{(u_n)^2}{2n} \leq (u_n - 1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3 - u_n)}$$

■ (III) 6 ج

لدينا $u_n < \sqrt{e}$ إذن : $\frac{(u_n)^2}{2n} < \frac{e}{2n}$ (10)

و $3 - u_n > 3 - \sqrt{e}$

$$(11) \quad \frac{1}{3 - u_n} < \frac{1}{3 - \sqrt{e}} < 1 \quad \text{إذن :}$$

من (10) و (11) نستنتج أن : $\frac{(u_n)^2}{(3 - u_n)} < e$

$$(12) \quad \frac{(u_n)^2}{n(3 - u_n)} < \frac{e}{n} \quad \text{ومنه :}$$

من (9) و (10) و (12) نستنتج أن :

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{(u_n)^2}{2n} \leq (u_n - 1) \leq \frac{(u_n)^2}{n(3 - u_n)} \leq \frac{e}{n}$$

و بالتالي : $(\forall n \geq 4) ; \frac{1}{2n} \leq (u_n - 1) \leq \frac{e}{n}$