

I-Travail de la tension d'un ressort:

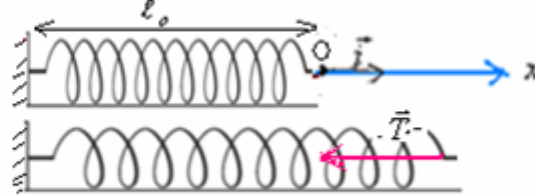
1) Travail d'une force constante lors d'un déplacement rectiligne:

Le travail d'une force constante entre deux points A et B est égale au produit scalaire du vecteur force \vec{F} par le vecteur déplacement \vec{AB} .

$$W_{A \rightarrow B}^{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \times AB \times \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{AB}})$$

2) Travail de la tension d'un ressort:

Considérons un ressort de longueur initiale ℓ_0 et de constante de raideur K placé sur un plan horizontal comme l'indique la figure suivante:



La tension du ressort, $\vec{T} = -K.x\vec{i}$ n'est pas une force constante.

Pour calculer le travail de cette force on doit considérer le travail élémentaire de cette force δW sur un déplacement infiniment petit $\delta \vec{\ell}$ sur lequel nous considérerons que la force est constante $\delta W = \vec{T} \cdot \delta \vec{\ell}$ avec : $\delta \vec{\ell} = \delta x \vec{i}$

$$\text{donc : } \delta W = \vec{T} \cdot \delta \vec{\ell} = -K.x\vec{i} \cdot \delta x \vec{i} = -K.x \cdot \delta x \quad \text{d'où : } \delta W = -K.x \cdot \delta x$$

Le travail total de la tension \vec{T} du ressort lorsque son point d'application se déplace d'un point d'abscisse x_1 à un point d'abscisse x_2 est la somme des travaux élémentaires, on l'obtient en utilisant le calcul intégral on a donc : $dW = -K.x dx$.

$$\Rightarrow W_{M_1 \rightarrow M_2}^{\vec{T}} = \int_{x_1}^{x_2} -K.x dx = -K \int_{x_1}^{x_2} x dx = K \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{2} K (x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2} K (x_1^2 - x_2^2)$$

Donc le travail de la tension du ressort lorsque son point d'application se déplace d'un point M_1 d'abscisse x_1 à un point M_2

d'abscisse x_2 est donné par la relation suivante :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}^{\vec{T}} = \frac{1}{2} K (x_1^2 - x_2^2) \quad (1)$$

I-Etude énergétique du pendule élastique:

1) Énergie potentielle de élastique:

L'énergie potentielle élastique d'un pendule élastique est l'énergie qu'il possède grâce à la déformation du ressort, elle est

donnée par la relation suivante: $E_{pe} = \frac{1}{2} K.x^2 + C$

C: est une constante qui dépend du choix de l'état de référence de l'énergie potentielle élastique .

x : allongement du ressort (en mètre)

E_{pe} : énergie potentielle élastique en (J).

En considérant comme état de référence $E_{pe}=0$ lorsque $x=0$ la constante $C=0$ donc : $E_{pe} = \frac{1}{2} K.x^2$

Remarque : La variation de l'énergie potentielle ne dépend pas de l'état de référence. En effet:

-dans la position x_1 on a : $E_{pe1} = \frac{1}{2} K.x_1^2 + C$

La variation de l'énergie potentielle

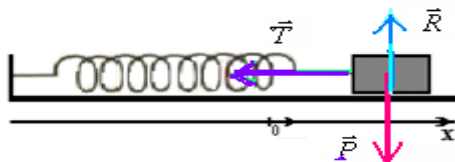
$$\Delta E_p = E_{pe2} - E_{pe1} = \frac{1}{2} K (x_2^2 - x_1^2) \quad (2)$$

-dans la position x_2 on a : $E_{pe2} = \frac{1}{2} K.x_2^2 + C$

D'après (1) et (2) on a : $W_{1 \rightarrow 2}^{\vec{T}} = -\Delta E_{pe}$

2) Conservation de l'énergie mécanique:

Pendant les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique horizontal constitué d'un corps S de masse m et d'un ressort de constante de raideur K, appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur le corps S entre un point M_1 d'abscisse x_1 à d'abscisse x_2 un point M_2 :



$$\Delta E_c = W_{1 \rightarrow 2}^{\vec{P}} + W_{1 \rightarrow 2}^{\vec{R}} + W_{1 \rightarrow 2}^{\vec{T}} \quad \text{On a : } W_{1 \rightarrow 2}^{\vec{P}} = 0 \quad \text{et} \quad W_{1 \rightarrow 2}^{\vec{R}} = 0 \quad \text{donc : } \Delta E_c = W_{1 \rightarrow 2}^{\vec{T}} \quad \text{or : } W_{1 \rightarrow 2}^{\vec{T}} = -\Delta E_{pe}$$

$$\text{donc : } \Delta E_c = -\Delta E_{pe} \Rightarrow E_{c2} - E_{c1} = -(E_{pe2} - E_{pe1}) \Rightarrow E_{c2} - E_{c1} = E_{pe1} - E_{pe2}$$

⇒ $E_{c2} + E_{c2} = E_{c1} + E_{pe1}$ d'où: $E_{m2} = E_{m1}$ donc l'énergie mécanique est constante.

3 Détermination de l'équation différentielle par étude énergétique:

Si les frottements sont négligeables, l'énergie mécanique de l'oscillateur est constante: $E_m = C^{te}$ donc: $\frac{dE_m}{dt} = 0$

Or : $E_m = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2$ donc: $\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2 \right) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} m (2 \dot{x} \ddot{x}) + \frac{1}{2} K (2 x \dot{x}) = 0 \Rightarrow \dot{x} (m \ddot{x} + K x) = 0 \text{ d'où l'équation différentielle: } m \ddot{x} + K x = 0$$

4) Expression de l'énergie mécanique du pendule élastique:

La solution de l'équation différentielle: $m \ddot{x} + K x = 0$ est: $x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right)$ avec: $T_o = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$

donc: $v = \dot{x} = -x_m \frac{2\pi}{T_o} \sin\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right)$

$$E_m = E_{pe} + E_c = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} K x_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) + \frac{1}{2} m x_m^2 \frac{4\pi^2}{T_o^2} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) \text{ avec: } T_o^2 = \frac{4\pi^2 m}{K}$$

donc: $E_m = \frac{1}{2} K x_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) + \frac{1}{2} m x_m^2 \frac{4\pi^2 K}{4\pi^2 m} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right)$

$$= \frac{1}{2} K x_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) + \frac{1}{2} K x_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) = \frac{1}{2} K x_m^2 [\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right)] = \frac{1}{2} K x_m^2$$

5) Diagramme énergétiques:

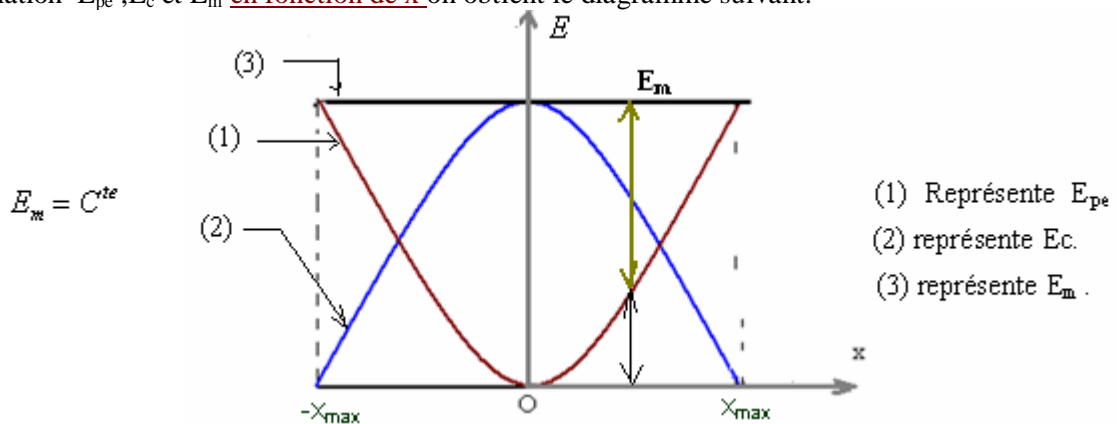
a) Cas des oscillations sans frottements:

Dans le cas des oscillations sans frottements l'énergie mécanique de l'oscillateur mécanique est constante.

$$E_m = \frac{1}{2} K x_m^2 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = C^{te}$$

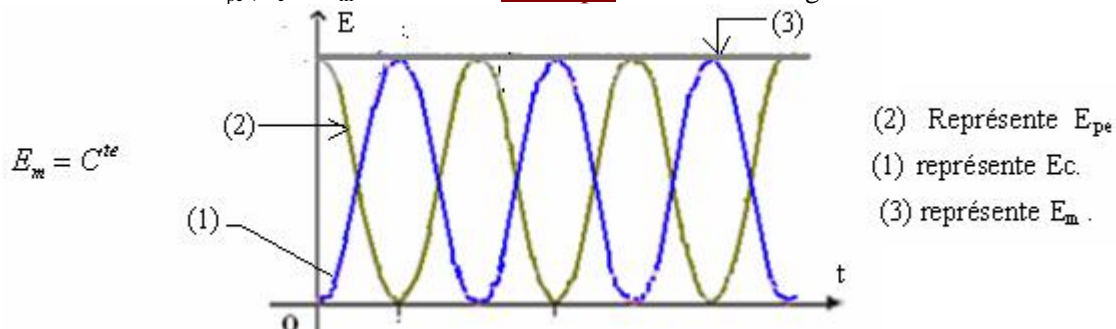
En considérant comme état de référence $E_{pe}=0$ lorsque $x=0$ on a $C=0$ donc: $E_{pe} = \frac{1}{2} K x^2$

En représentant la variation E_{pe} , E_c et E_m en fonction de x on obtient le diagramme suivant:



A chaque instant on a: $E_m = E_c + E_{pe}$ donc: $E_c = E_m - E_{pe}$

Et en représentant la variation de E_{pe} , E_c et E_m en fonction du temps on obtient le diagramme suivant:

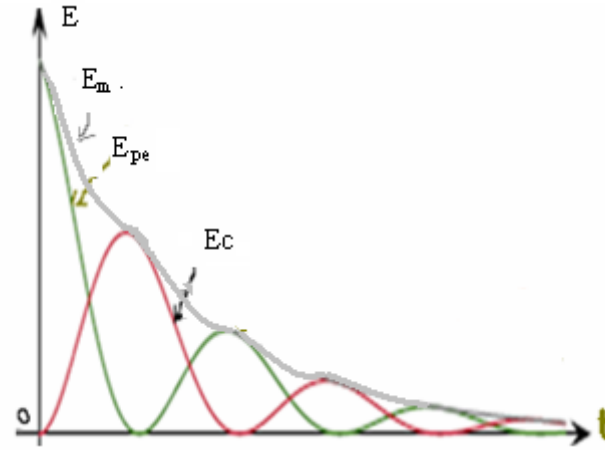


Car: $E_{pe} = \frac{1}{2} K x^2$ avec: $x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right)$ donc: $E_{pe} = \frac{1}{2} K x_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right)$

b) Cas des oscillations avec frottements:

Dans le cas des oscillations avec frottements l'énergie mécanique de l'oscillateur mécanique diminue jusqu'à ce qu'elle s'annule.

Diagramme énergétique:



II-Etude énergétique d'un pendule de torsion:

1) Energie cinétique du système:

L'énergie cinétique du pendule de torsion est égale à l'énergie cinétique de la tige qui est donnée par l'expression suivante:

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 \quad J_{\Delta} : \text{est le moment d'inertie de la tige} \quad \dot{\theta} : \text{est la vitesse angulaire} ,$$

2) Energie potentielle de torsion:

L'énergie potentielle de torsion est donnée par la relation suivante: $E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta^2 + C^{te}$

C^{te} : est une constante qui dépend du choix de l'état de référence de l'énergie potentielle de torsion .

En considérant comme état de référence $E_{pt}=0$ lorsque: $\theta = 0$ donc $E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta^2$ la constante $C=0$

3) Energie mécanique du pendule de torsion:

L'énergie mécanique du pendule de torsion est la somme de son énergie cinétique et son énergie potentielle de torsion.

$$E_m = E_c + E_{pe}$$

En considérant comme état de référence $E_{pt}=0$ lorsque $\theta = 0$, l'énergie mécanique du pendule de torsion s'écrit:

$$E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2$$

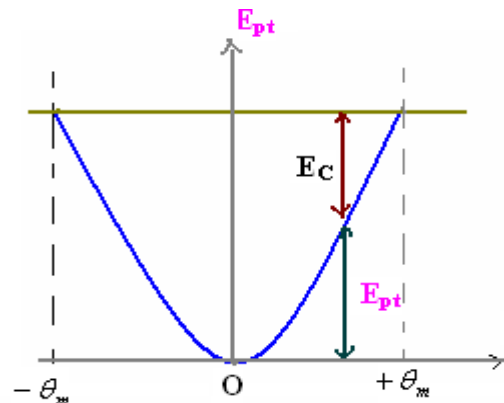
Si les frottements sont négligeables, l'énergie mécanique de l'oscillateur est constante : $\frac{dE_m}{dt} = 0$ donc: $E_m = C^{te}$

$$\text{Or : } E_m = E_c + E_{pt} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2 \text{ donc: } \frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} (2 \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{dt}) + \frac{1}{2} C (2 \theta \frac{d\theta}{dt}) = 0 \Rightarrow J_{\Delta} \dot{\theta} \ddot{\theta} + C \theta \dot{\theta} = 0 \text{ d'où: } J_{\Delta} \ddot{\theta} + C \theta = 0 \Rightarrow \text{équation différentielle.}$$

4) Diagramme énergétiques :

En considérant comme état de référence $E_{pt}=0$ lorsque $\theta = 0$, la constante $C=0$ donc: $E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta^2$



III-Etude énergétique du pendule pesant:

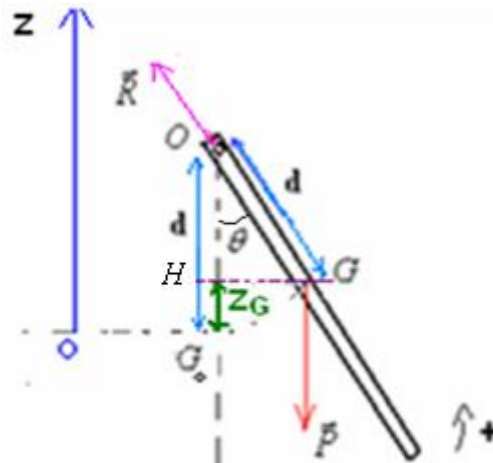
1) Energie cinétique du système:

L'énergie cinétique du pendule pesant est: $E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$

2) Energie potentielle de pesanteur:

L'énergie potentielle de pesanteur du pendule pesant est : $E_{pp} = m.gz + C^{te}$

En considérant comme état de référence $E_{pp}=0$ lorsque $z=0$ la constante $C=0$ donc: $E_{pp} = m.g.z$



Lorsque le pendule pesant est incliné d'un angle θ , son énergie potentielle de pesanteur est : $E_{pp} = m.gz_G$

$$z_G = d - OH = d - d \cos \theta = d(1 - \cos \theta) \Rightarrow E_{pp} = m.gd(1 - \cos \theta) \quad \text{avec : } -\theta_m \leq \theta \leq +\theta_m$$

donc pour : $\cos \theta = -1$ L'énergie potentielle de pesanteur est maximale : $E_{ppmax} = 2.m.g.d$

On a deux cas possibles:

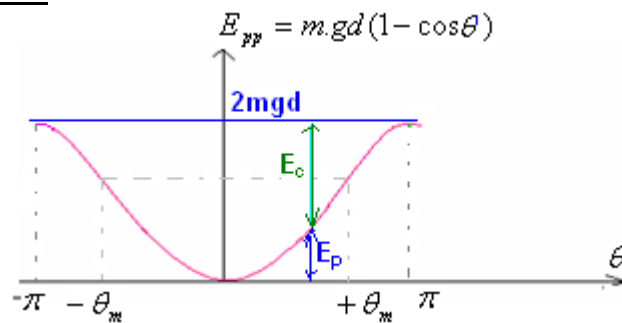
- Si $E_m > 2mgd$, l'énergie cinétique du système ne s'annule pas et le système se met à tourner sans arrêt et ce n'est pas un oscillateur mécanique.
- Si $E_m < 2mgd$ l'énergie cinétique du système ne s'annule aux positions $\theta = \pm\theta_m$ et il oscille de façon périodique.

3) Energie mécanique du pendule pesant:

En considérant comme état de référence $E_{pp}=0$ lorsque $z=0$, L'énergie mécanique du système :

$$E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + mgz$$

4) Diagramme énergétiques :



Pour les petites oscillations $\theta \leq 15^\circ$ $1 - \cos \theta = \frac{\theta^2}{2}$ on peut écrire par approximation : $E_{pp} = \frac{m.gd.\theta^2}{2}$ dans ce cas on a:

