

Systèmes mécaniques oscillants : exercices

Exercice 1 :

1. Définir les notions suivantes :

Oscillateur mécanique - mouvement oscillatoire - oscillation libre - amplitude de mouvement - élongation du mouvement - période propre - amortissement des oscillations mécaniques - oscillations forcées - oscillations entretenues - pendule élastique - pendule pesant - pendule simple - pendule de torsion .

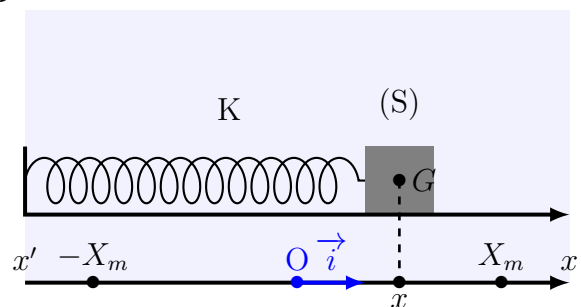
2. Choisir la bonne réponse :

- (a) Plus la raideur d'un ressort est grande , plus la période du pendule élastique horizontal est :
(a) grande (b) petite
- (b) La formule de la période des oscillations du pendule élastique horizontal n'est valable que pour des petites élongations :
(a) vrai (b) faux
- (c) En présence de frottements , l'amplitude d'un pendule de torsion :
(a) croît (b) décroît (c) reste constante
- (d) Plus la longueur du fil d'un pendule simple est grande , plus sa période est :
(a) courte (b) longue
- (e) Plus la constante de torsion est grande , plus la période du pendule de torsion est :
(a) grande (b) petite

Pendule élastique

Exercice 2 : résolution analytique de E.D

Un oscillateur mécanique élastique est constitué d'un ressort de constante de raideur $K = 10N/m$ associé à un solide de masse $m = 250g$. On écarte le système de sa position d'équilibre de $2cm$ et on l'abandonne sans vitesse initiale.



On considère un axe (O, \vec{i}) , avec O coïncide avec la position du centre d'inertie G du solide à l'équilibre et le vecteur unitaire \vec{i} parallèle au déplacement du solide. On repère la position G du solide à chaque instant par l'élongation $OG = x(t)$.

1. Montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide obéit, en absence de frottement , à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos \left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi \right)$$

- Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique et calculer sa valeur .
- Déterminer les paramètres X_m et φ , sachant qu' à l'instant $t=0$, G passe par la position d'équilibre du pendule dans le sens positif .Écrire cette solution.
- Déterminer la vitesse des oscillation à l'instant t , en déduire la vitesse maximale du système en précisant sa positions .
- Déterminer les caractéristiques de la force \vec{F} exercée par le ressort sur le solide dans les deux cas suivant :
 - * lorsque le solide passe par sa position d'équilibre stable ;
 - * lorsque $x = X_m$ et $x = -X_m$

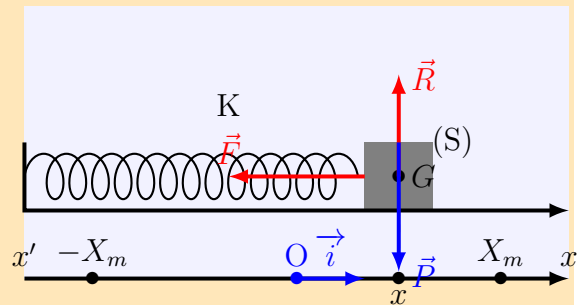
Solution : exercice 2

1. Établissement de l'équation différentielle du mouvement :

Référentiel lié au laboratoire considéré comme Galiléen ;

Système étudié : le solide (S) ;

Bilan des forces exercées sur le système : le poids \vec{P} , la réaction du plan horizontal \vec{R} et la tension du ressort $\vec{F} = -K \cdot \Delta l$;



On applique la deuxième loi de Newton sur (S) :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$$

On projette la relation sur $x'Ox$:

$$0 + 0 - K \cdot \Delta l = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

d'où

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K}{m} \cdot x = 0}$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos \left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi \right)$$

2.1 L'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique :

$x(t)$ solution de l'équation différentielle , donc elle la vérifie , i.e on dérive deux fois $x(t)$ par rapport au temps :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_0^2} x(t)$$

Pour que $x(t)$ soit solution de l'E.D il suffit que

$$\frac{K}{m} = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Application numérique : $T_0 \approx 1s$

2.2 On détermine les paramètres X_m et φ , sachant qu' à l'instant $t=0$, G passe par la position d'équilibre du pendule dans le sens positif :

D'après les données de l'exercice on $X_m = 2.10^{-2}m$

En considérant les conditions initiales suivantes : à $t = 0$ on a $x(0) = 0$ passe par la position d'équilibre et $v(0) > 0$;

$$X_m \cos\varphi = 0 \text{ donc } \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

et puisque la vitesse à $t=0$ est positive : $-X_m \frac{2\pi}{T_0} \sin(\varphi) > 0$ c'est à dire que $\sin\varphi < 0$, d'où

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

donc la solution de E.D est :

$$x(t) = 2 \times 10^{-2} \cos\left(2\pi.t - \frac{\pi}{2}\right)$$

2.3 La vitesse des oscillation à l'instant t , en déduire la vitesse maximale du système en précisant sa positions :

$$\text{La vitesse des oscillations : } v(t) = -4 \times 10^{-2} \pi \sin\left(2\pi.t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Cette vitesse est maximale lorsque $\sin\left(2\pi.t - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ i.e que $v_{max} = 4 \times 10^{-2} \pi$

2.4 Les caractéristiques de la force \vec{F} exercée par le ressort sur le solide dans les deux cas suivant :

L'intensité de la force : Est une force de rappel qui s'oppose au sens d'allongement $F(t) = K.x(t)$

* lorsque le solide passe par sa position d'équilibre stable ;

nous avons $x(t) = 0$ donc $F(t) = 0$

* lorsque $x = X_m$ et $x = -X_m$

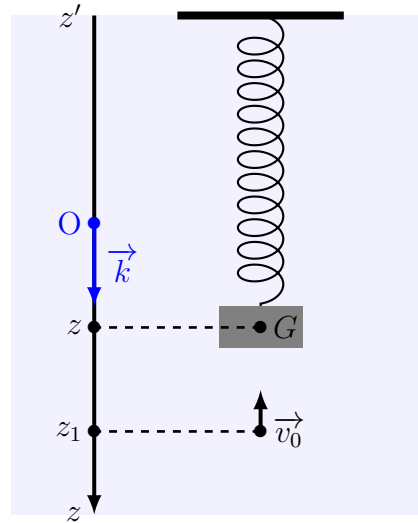
Pour $x = X_m$ nous avons $\vec{F} = K.X_m \vec{i}$ l'intensité de la force est maximale et dans le même sens que \vec{i} .

Pour $x = -X_m$ nous avons $\vec{F} = -K.X_m \vec{i}$ l'intensité est maximale et dans le sens opposé de \vec{i}

Exercice 3 : Pendule élastique vertical

Un pendule élastique vertical est constitué d'un ressort de constante de raideur $K = 10\text{N/m}$ associé à un solide de masse $m = 300\text{g}$. On écarte le système de sa position d'équilibre de $z_1 = 2\text{cm}$ et à l'instant $t=0$ (origine des dates) on l'abandonne avec une vitesse initiale $v_0 = 0.3\text{m/s}$ dans le sens négatif de l'axe (O, \vec{k}) orienté vers le bas et avec O coïncide avec la position du centre d'inertie G du solide à l'équilibre stable et le vecteur unitaire \vec{k} parallèle au déplacement du solide.

On repère la position G du solide à chaque instant par l'élongation $OG = z(t)$.



1. Montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide obéit, en absence de frottement, à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{z} + \frac{K}{m}.z = 0$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = Z_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t} + \varphi\right)$$

- (a) Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique et calculer sa valeur .
 - (b) Déterminer les paramètres Z_m et φ .
3. Étudions le cas où on lance le système à $t=0$, à partir de l'état d'équilibre stable, dans le sens positive avec une vitesse $v_0 = 0,3\text{m/s}$. Déterminer les paramètres Z_m et φ .

Solution : exercice 3

1. Établissement de l'équation différentielle du mouvement :

Référentiel lié au laboratoire considéré comme Galiléen ;

Système étudié : le solide (S) ;

Bilan des forces exercées sur le système : le poids \vec{P} et la tension du ressort $\vec{F} = -K.\Delta l$;

Étude du système à l'état d'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{F} = -K.\Delta l_0 = \vec{0}$$

On projette sur $z'Oz$, on aura :

$$m.g - K.\Delta l_0 = 0 \quad (1)$$

À l'instant t on applique la deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{F} = m.\vec{a}_z$$

$$mg - K.\Delta l = m.\frac{d^2 z}{dt^2}$$

avec $\Delta l = \Delta l_0 + x$ Donc :

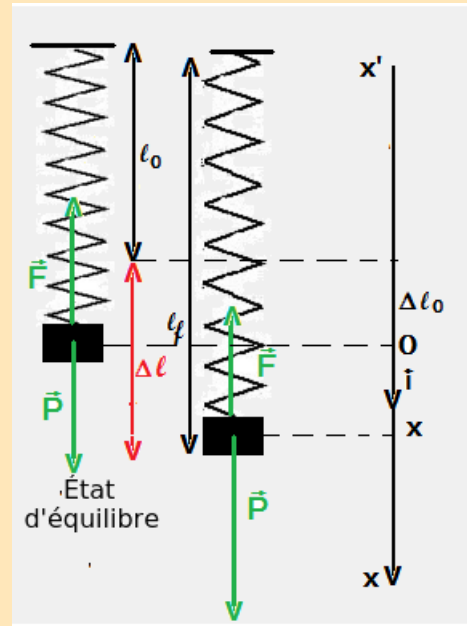
$$mg - K.\Delta l_0 - K.z = m.\frac{d^2 z}{dt^2}$$

et d'après l'état d'équilibre on a $m.g - K.\Delta l_0 = 0$, I.e que E.D sera :

$$-K.x = m.\frac{d^2 z}{dt^2}$$

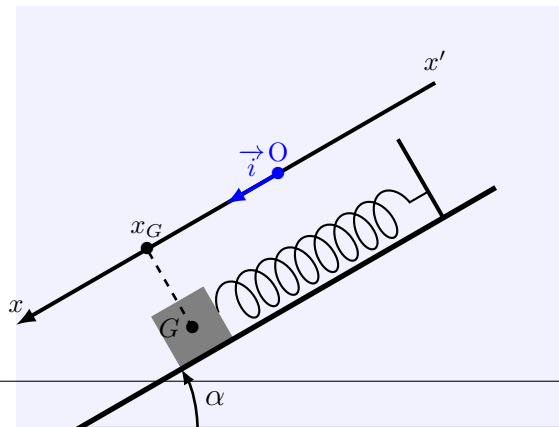
$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{K}{m}.z = 0$$

2.



Exercice 4 : Pendule élastique incliné

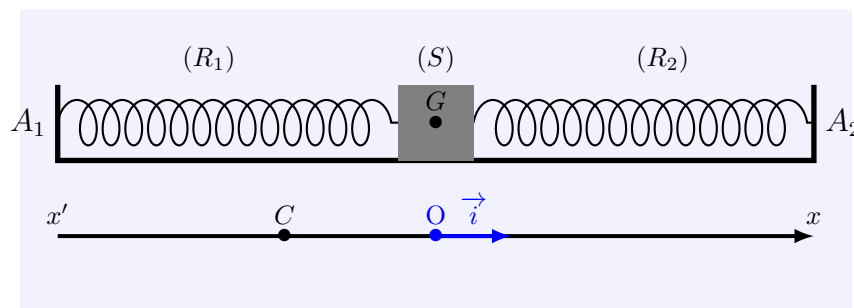
Un ressort de masse négligeable, à spires non jointives, parfaitement élastique n est accroché par l'une des extrémités à un support fixe et l'autre extrémité, on accroche un solide de masse $m = 500g$. L'ensemble est situé sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale. Les frottements sont négligés dans tout l'exercice.



1. Le ressort de longueur $l_0 = 20cm$ au repos , à l'équilibre la longueur du ressort est $l = 25cm$. En déduire la valeur de la constante de raideur K du ressort . On prend $g = 10m/s^2$
2. On écarte le solide vers le bas , de sa position d'équilibre à $t=0$ d'une distance de $d = 3cm$ et on le lâche sans vitesse initiale . Par une étude dynamique trouver l'équation horaire du mouvement .
3. La période des oscillations dépend-t-elle de l'angle α ?

Exercice 5 : Association de deux ressorts

On place un cavalier de masse $M = 700g$ sur un rail à coussin d'air horizontal et on le fixe aux extrémités de deux ressorts semblables R_1 et R_2 de mêmes constantes de raideur $K_1 = K_2 = 20N/m$. La longueur initiale de chaque ressort est $l_{01} = l_{02} = 18cm$ et à l'équilibre , ils ont même allongement $\Delta l_1 = \Delta l_2 = 2cm$.



1. On écarte le cavalier de sa position d'équilibre de distance $OC = 2cm$ de sens vers A_1 et de direction de A_1A_2 , puis on l'abandonne sans vitesse initiale , à l'instant $t=0$.
 - (a) Déterminer, À un instant t , les expressions des allongements de Δl_1 et Δl_2 pour chaque ressort en fonction de x l'abscisse de G
 - (b) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de G .
 - (c) La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme suivante :

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec ω_0 est la pulsation propre du mouvement de G , $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. Donner l'expression de ω_0 et T_0 . Déterminer φ et X_m

2. On fixe au cavalier une petite plaque de masse négligeable puis on l'immerge dans un liquide . Sachant que la force de frottement appliquée par le liquide sur la plaque au cours du mouvement du cavalier est de la forme $\vec{f} = -\alpha \cdot \vec{v}$ où α est une constante positive et \vec{v} le vecteur vitesse de G . Montrer que l'équation différentielle du mouvement de G peut s'écrire sous la forme suivante :

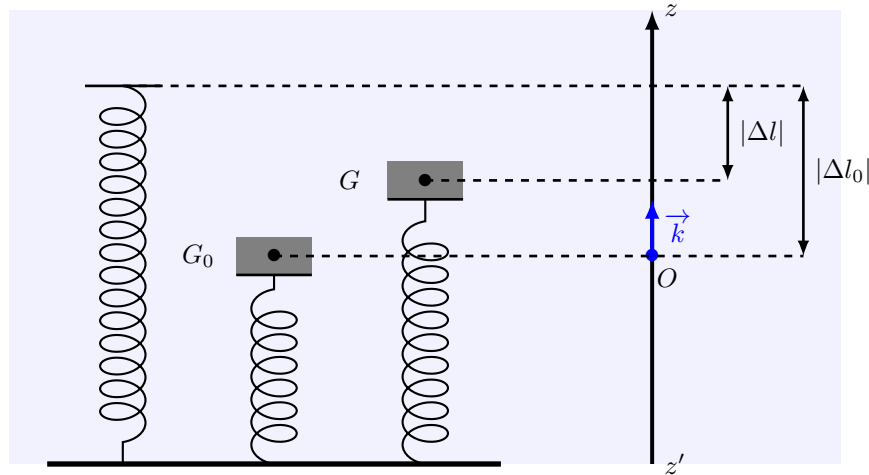
$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{2K}{m} x = 0$$

3. Donner la forme des courbes qui représentent l'élongation $x(t)$ du centre d'inertie G lorsque les frottement deviennent de plus en plus importants . (on prend les mêmes conditions initiales)

Exercice 6 : La suspension : les amortisseurs

La suspension d'une automobile se compose , au niveau de chaque roue , d'un ressort et d'un amortisseur (généralement à l'huile)

On modélise l'automobile par un solide de masse M de centre d'inertie G ; les ressorts par un seul ressort vertical , à spire non jointive, de masse négligeable et d'une constante de raideur K . Le système (ressort+solide) est représenté dans la figure ci-dessous :



Le repérage des positions z du centre d'inertie G du solide se fait selon un axe Oz orienté vers le haut ; l'origine O est choisie à la position d'équilibre G_0 du centre d'inertie du solide .

I. Étude du système à l'état d'équilibre .

Pour la vérification de la valeur de la constante du raideur de ressort , on mesure la longueur initiale du ressort l_0 , puis on place le solide (S) de masse $M = 100g$ sur le plateau de masse négligeable, fixé à l'extrémité libre du ressort . Ce dernier sera comprimé de Δl_0 et sa longueur finale à l'équilibre $l = 7,6cm$.

1. Calculer la constante de raideur K du ressort .
2. Calculer l'erreur relative qui peut se commettre au cours de cette mesure par l'opérateur sur la constante de raideur du ressort . la valeur de K indiquée par le fabricant est $K = 40N/m$. On donne la formule de l'erreur relative :

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{X_{ex} - X_{th}}{X_{th}}$$

II. Étude dynamique :

On écarte le système (ressort + solide) de sa position d'équilibre vers le bas de $2cm$ et on l'abandonne sans vitesse initiale . Le système effectue un mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre G_0 .

1. En appliquant la deuxième loi de Newton , montrer que l'équation différentielle du mouvement de G est :

$$\ddot{z} + \frac{K}{M}z = 0$$

2. Écrire la solution $z(t)$ de cette équation différentielle en fonction de f_0 la fréquence propre des oscillations , z_m et le temps t . En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$

3. En utilisant les expressions de $v(t)$ et $z(t)$, montrer que :

$$v = 2\pi f_0 \sqrt{z_m^2 - z^2}$$

$$\tan \Phi = -\frac{v}{2\pi f_0 z}$$

avec Φ est le déphasage de $z(t)$ à l'instant t .

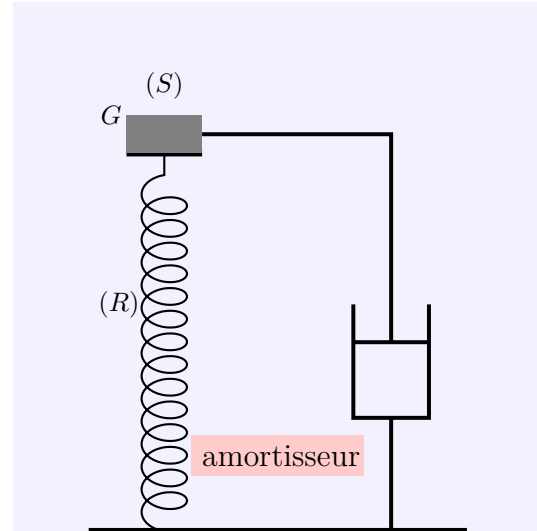
4. Calculer v la vitesse de G et Φ la phase du mouvement à l'instant $t = 2s$

II. Étude des oscillations forcées

Pour modéliser l'amortissement, on ajoute au dispositif précédent un amortisseur qui engendre une force de frottement fluide de sens opposé au vecteur vitesse du mouvement de G et proportionnelle à sa valeur tel que :

$$\vec{f} = -\alpha \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}$$

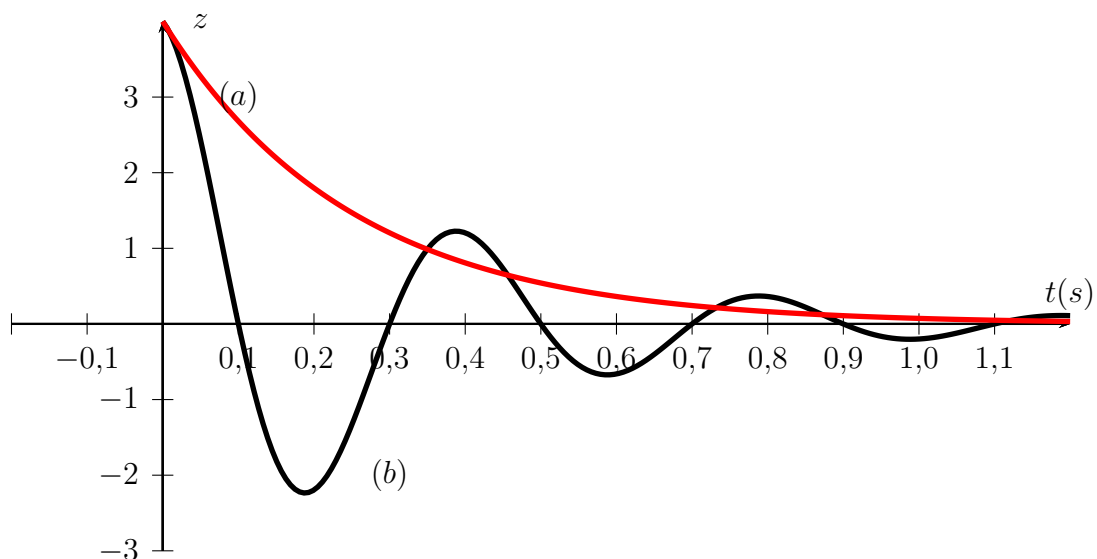
où α est une constante positive qui dépend de la qualité des amortisseurs appelée le coefficient d'amortissement.



1. Montrer que l'équation différentielle du mouvement de G est :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + K.z = 0$$

2. Pour ce système mécanique, identifier l'excitateur et le résonateur.
3. On considère deux automobiles (A_1) et (A_2), assimilables chacune à un solide de même masse M reposant sur le ressort (R) vertical. On représente les courbes $z(t)$ des positions du centre d'inertie G du solide modélisant chaque automobile lors de passage sur une bosse.



- a. Donner les noms des régimes associés aux deux courbes.

- b. L'une des courbes présente une pseudo-période . Déterminer graphiquement sa valeur .
- c. Les allures différentes des courbes sont dues au coefficient d'amortissement α . Quelle courbe correspond à la plus grande valeur de α ? Justifier la réponse .
- d. Quelle automobile possède la meilleure suspension ?