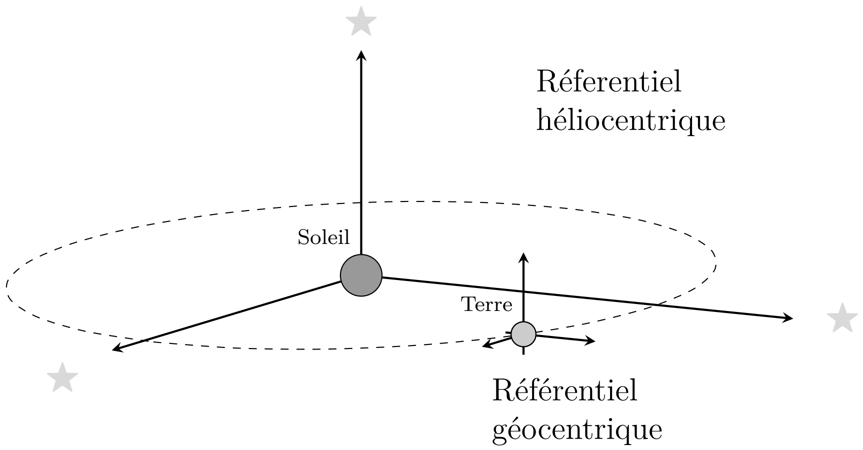
Mohamed El Founani
Lycée Ibn Maja

2$^{\text{ème}}$ année baccalauréat
Série Sciences Physiques

Mouvement des satellites et des planètes :

### Référentiel héliocentrique et géocentrique :

**Le repère héliocentrique :** Un repère dont l'origine est confondue avec le centre d'inertie du système solaire, c'est-à-dire le centre du soleil, ses trois axes sont dirigés vers 3 étoiles fixes. **Le repère géocentrique :** Un repère dont l'origine est confondue avec le centre d'inertie de la terre, ses trois axes dont deux sont dans le plan de l'équateur dirigés vers 2 étoiles fixes, et le troisième est dirigé vers l'étoile polaire.



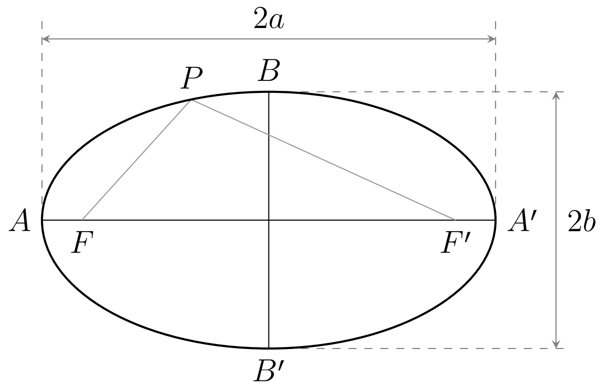

Le repère héliocentrique constitue avec le repère du temps le référentiel héliocentrique, il est utilisé pour décrire le mouvement des planètes du système solaire et sondes interplanétaires.
Le repère géocentrique constitue avec le repère temporel le référentiel géocentrique, il est utilisé pour décrire le mouvement des satellites autour de la terre, il est en mouvement autour de l'origine du repère héliocentrique, sa période est 365,25 jours.

## Mouvements des planètes et des stallites :

### L'ellipse mathématiquement :

Une ellipse de foyers $F$ et $F'$, et le lieu de l'ensemble des points $P$, tel que :

$$PF + PF' = 2a$$



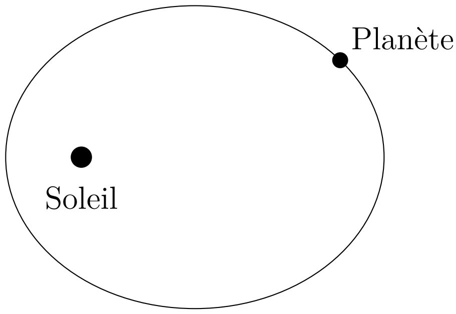
Le segment $[AA']$ représente le grand axe de l'ellipse il mesure $2a$, et le segment $[BB']$ représente le petit axe il mesure $2b$.
Le cercle est une ellipse dont les deux foyers sont confondus en un point appelé le centre, d'où :

$$a = r \qquad \text{et} \qquad AA' = BB' = 2r$$

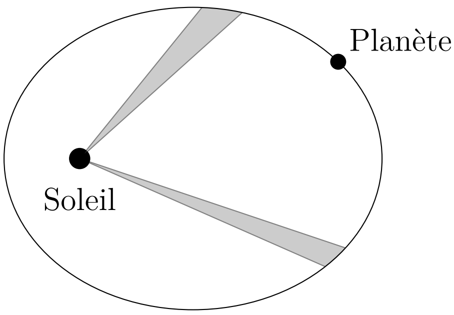
## Les lois de Kepler :

### Loi des orbites :

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire d'une planète est une ellipse dont le soleil est l'un de ses foyers.




### Loi des aires :




Le segment de la droite reliant le soleil à une planète balaie des aires égales pendant des durées égales.
Les planètes se déplacent plus rapidement lorsqu'elles sont proches du soleil et plus lentement lorsqu'elles sont plus éloignés.

### Loi des périodes :

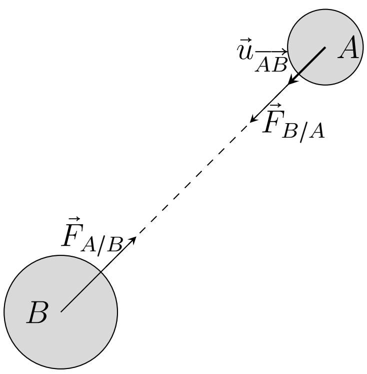
Pour toute planète du système solaire, le rapport entre le carré de la période de révolution et le cube du demi grand axe est constant :

$$\frac{T^2}{a^3} = \mathrm{C^{te}}$$

Cette valeur dépend que du soleil, on remplace $r$ par $a$ lorsque la trajectoire est circulaire.

## Étude du mouvement d'une planète et d'un satellite :

### Rappel sur la loi d'attraction universelle :




Lorsqu'il y a une interaction entre deux corps $A$ et $B$, le corps $A$ exerce une force sur le corps $B$, on la note $\vec{F}_{A/B}$, et le corps $B$ exerce une force de même intensité $\vec{F}_{B/A}$ ces deux vecteurs sont liés vectoriellement par la relation suivante :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -G\frac{m_A m_B}{d^2}\vec{u}_{\overrightarrow{AB}}$$

$G$ est la constante de gravitation universelle elle vaut $6,67 \times 10^{-11}\mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$, et $d = AB$ la distance qui les sépare.

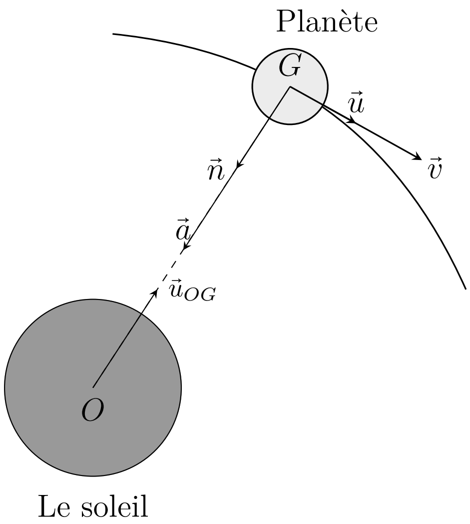
## L'étude du mouvement d'une planète autour du soleil :

La planète de masse $m_p$, est soumise qu'à la force d'attraction appliquée par le soleil.
D'après la 2ème loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow -G\frac{M_s m_p}{r^2}\vec{u}_{OG} = m_p\vec{a}$$
$$\Longleftrightarrow G\frac{M_s m_p}{r^2}\vec{n} = m_p\vec{a}$$

Donc :

$$\vec{a} = G\frac{M_s}{r^2}\vec{n}$$




Puisque le trajectoire est curviligne, alors d'après la relation de Frenet on aura :

$$\vec{a} = a_t\vec{u} + a_n\vec{n} \Longleftrightarrow G\frac{M_s}{r^2}\vec{n} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u} + \frac{v^2}{r}\vec{n}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & = 0 \\ \dfrac{v^2}{r} & = \dfrac{GM_s}{r^2} \end{cases}$$

Puisque la dérivée par rapport au temps de la vitesse est nulle, alors $v$ est constante.
On a :

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM_s}{r^2}$$
$$v = \sqrt{\frac{GM_s}{r}}$$

Par suite le mouvement est circulaire uniforme, sa période est :

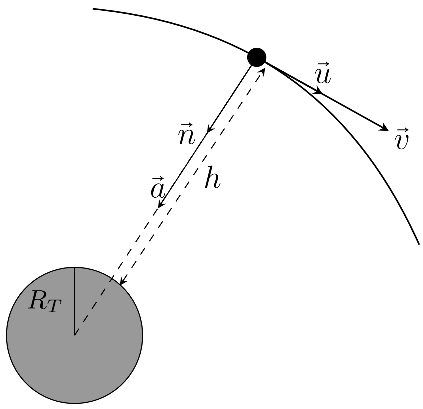
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$= \frac{2\pi r}{v}$$
$$= \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_s}{r}}}$$
$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{GM_s}{r}}$$
$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$$

D'où la constance du rapport $T^2/r^3$ d'après la loi de Kepler.

## Mouvement d'un satellite en orbite :

La seule force appliquée sur le satellite de masse $m_S$ et d'altitude $h$, est celle d'attraction :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{F}_{T/S} = G\frac{m_S M_T}{(R_T+h)^2}\vec{n}$$
$$m_S\vec{a} = G\frac{m_S M_T}{(R_T+h)^2}\vec{n}$$



La terre

D'où :

$$\vec{a} = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}\vec{n}$$

On sait d'après la relation de Frenet que :

$$\vec{a} = a_t\vec{u} + a_n\vec{n} \Longleftrightarrow \vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u} + \frac{v^2}{r}\vec{n}$$
$$\Longleftrightarrow \vec{a} = 0.\vec{u} + \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}\vec{n}$$

Par suite :

$$v = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \qquad \text{et} \qquad v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}$$

### Force d'attraction et le poids du satellite :

On considère que la force d'attraction appliquée sur le satellite égale aux poids de ce dernier :

$$\vec{P} = \vec{F} \Longleftrightarrow \vec{g} = \vec{a}$$
$$\Longleftrightarrow \vec{g} = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}\vec{n}$$

Donc l'intensité est :

$$g = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$$

Lorsque $h = 0$ on aura :

$$g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

En divisant les deux relations on obtient :

$$g = g_0\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$$

Or $a = g$ alors :

$$g = \frac{v^2}{R_T+h}$$

D'où :

$$v = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{2\pi(R_T+h)}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$$

**Les satellites géostationnaires :**

Un satellite géostationnaire est un satellite qui doit être fixe par rapport à la terre.
Afin d'obéir ceci, il faut vérifier les conditions suivantes :

Le plan d'orbite est dans le plan équatorial.

La période de révolution du satellite égale à la période propre de la terre $T = 86164$ s.

La trajectoire est un cercle décrit dans le même sens de rotation de la terre.

Pour vérifier la deuxième condition on peut utiliser :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}$$
$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{(R_T + h)^3}{GM_T}$$
$$\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2} = (R_T + h)^3$$
$$\sqrt[3]{\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}} - R_T = h$$

On obtient après l'application numérique $h \approx 36000$ Km.
Donc, un satellite pour qu'il soit immobile pour l'observateur (géostationnaire), doit évoluer sur une orbite circulaire, dans le plan équatorial, à l'altitude $h = 36000$ Km.