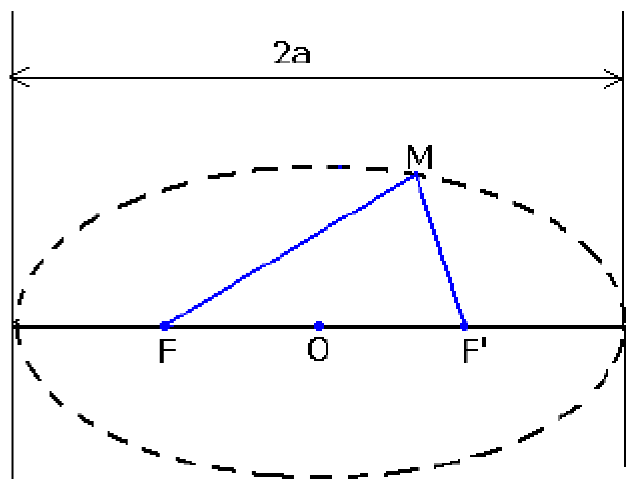
Les lois de Kepler

L'étude du **mouvement des planètes** s'effectue dans **un repère héliocentrique** (on se place au centre du soleil).

L'étude du **mouvement des satellites** de la terre se fait dans un **repère géocentrique** (on se place au centre de la terre). Ces deux référentiels sont **considérés comme galiléens** (les lois de Newton y sont applicables).

Première loi de Kepler:

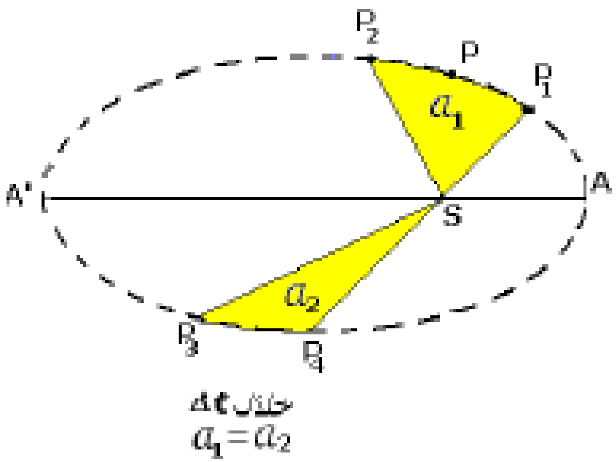
Dans le **référentiel héliocentrique**, le centre d'une planète gravitant autour du soleil suit une **trajectoire elliptique** dont **un des foyers est le centre du soleil .**

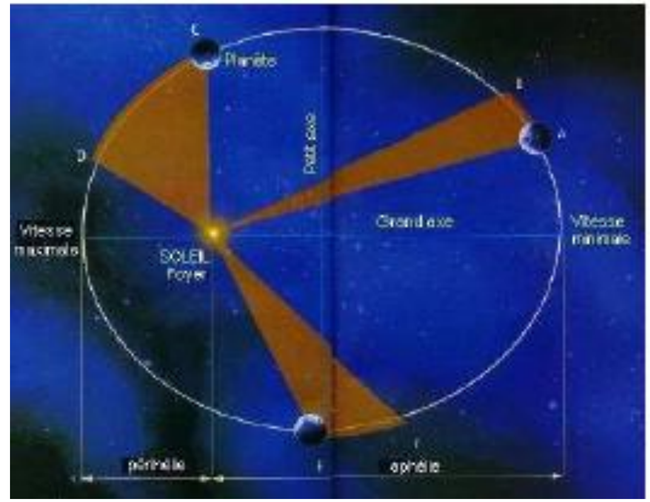


MF+MF'=2a

Deuxième loi de Kepler:

Le segment de droite qui relie le centre de la terre et le centre du soleil balaie des **aires proportionnelles aux durées mise pour les balayer**. Il balaie des aires égales pour des durées égales.





Troisième loi de Kepler

Le carré de la période d'une planète autour du soleil est proportionnel au cube de la longueur du demi-grand axe de son orbite.

Ce rapport de proportionnalité est le même pour toutes les planètes du système solaire. En posant a =AB/2 on a donc:

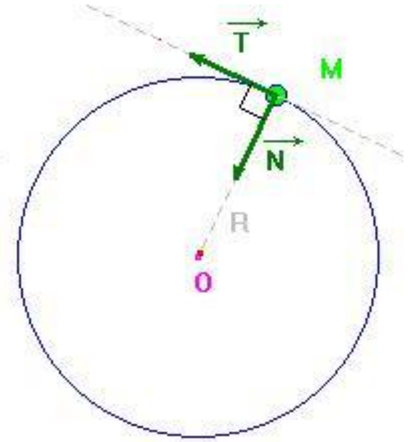
$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = K}$$

T : période de révolution de la planète en s
a : longueur du demi-grand axe de l'orbite en m
K : coefficient de proportionnalité en $s^2.m^{-3}$

Lorsque **les deux foyers de l'ellipse** décrivant la trajectoire sont presque **confondus**, on assimile cette dernière à une **trajectoire circulaire uniforme**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v \cdot \vec{T}\right) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + v \cdot \frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$\vec{v} = v \cdot \vec{T}$$



$$v = cte \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N}$$

$$\boxed{||\Sigma \vec{F}_{ext}|| = \frac{mv^2}{r}}$$

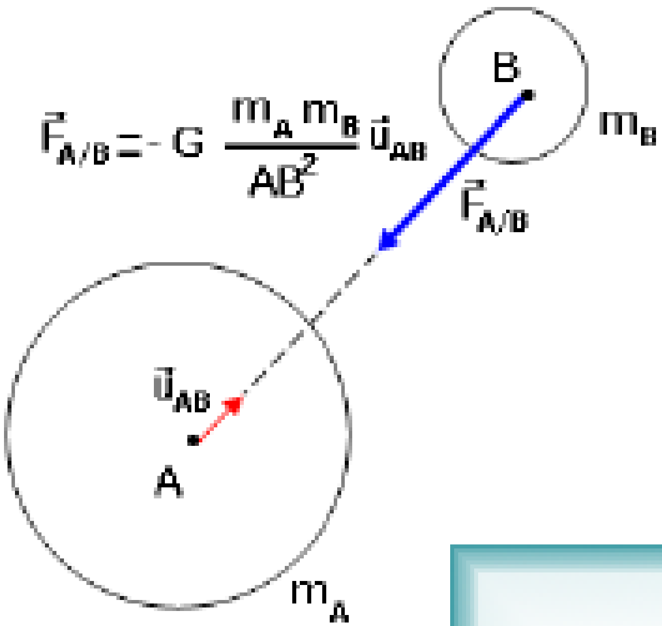
$||\Sigma \vec{F}_{ext}||$: norme du vecteur somme
m : masse du solide mis en orbite en Kg
v : vitesse du solide en orbite en $m.s^{-1}$
r : rayon de l'orbite en m

On déduit de cette relation et à l'aide de la seconde loi de newton la **vitesse du solide en orbite circulaire**:

$$mg = \frac{mv^2}{r} \longrightarrow \boxed{v = \sqrt{g\ r}}$$

v : vitesse du solide en orbite en $m.s^{-1}$
g : accélération de la pesanteur en $m.s^{-2}$
r : rayon de l'orbite en m

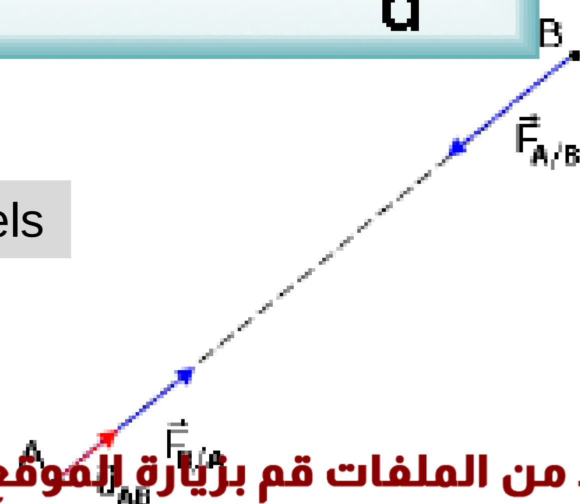
La loi de la gravitation universelle est donnée par la relation:



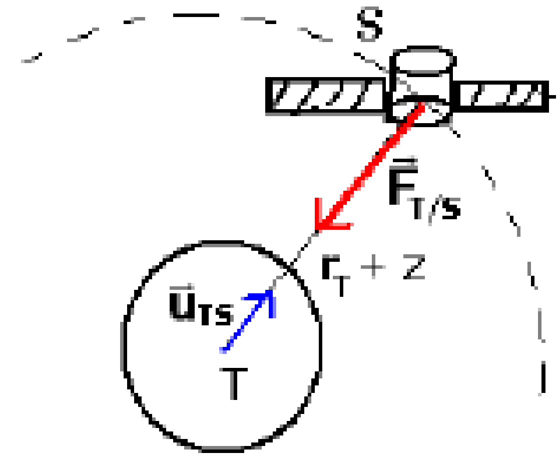
$F_{A/B}$: Force de l'objet A sur l'objet B en N
$F_{B/A}$: Force de l'objet B sur l'objet A en N
G : constante de gravitation universelle en $N.m^2.Kg^{-2}$
m_A :masse de l'objet A en Kg
m_B :masse de l'objet B en Kg
d : distance entre l'objet A et l'objet B en m

$$\boxed{F_{A/B} = F_{B/A} = G\frac{m_A m_B}{d^2}}$$

Cas de deux solides ponctuels



solide en orbite autour de la Terre:



Rotation du solide est un mouvement circulaire uniforme

Force exercée par la terre sur le solide

$$\vec{F}_{T/S} = -G\frac{M_T M_S}{r}\vec{u}_{TS}$$

Loi de Newton $\vec{F}_{T/S} = -G\frac{M_T M_S}{r}\vec{u}_{TS} = M_S\vec{a}$

Avec $\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\vec{u}_{TS}$ Accélération normal $\Rightarrow$ $v = \sqrt{\frac{G\ M_T}{r}}$

Remarque $r = R_T + z$

De cette relation on déduit la **période de révolution d'un solide en orbite autour de la Terre**:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\ M_T}}$$

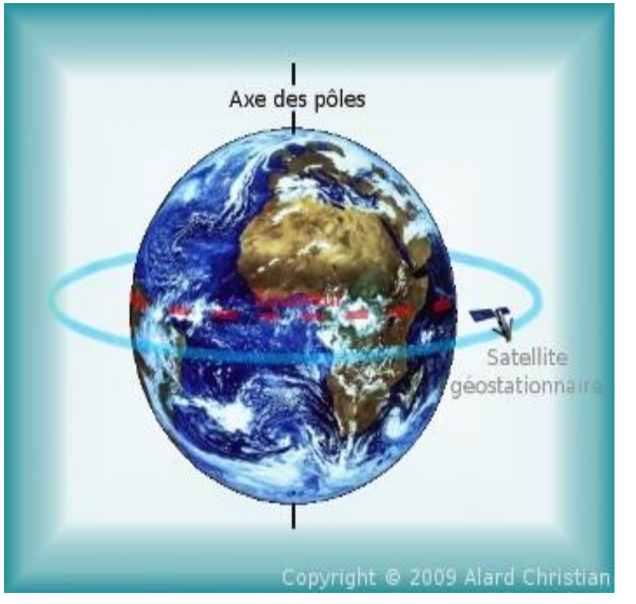
T : période de révolution de du solide en s
r : rayon de l'orbite circulaire en m
G : constante de gravitation universelle en $N.m^2.Kg^{-2}$
M_T :masse de la Terre en Kg

Remarque $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ Ce rapport ne dépond pas du solide étudié

Un satellite qui reste en permanence **au dessus d'un point fixe de la Terre** pris à l'équateur est appelé « **satellite géostationnaire** ».

Un Satellite Géostationnaire est un Satellite qui reste toujours à la verticale d'un même point P de la Terre.

- Le plan de l'orbite dans le référentiel géocentrique est le plan équatorial.



Période de révolution d'un Satellite Géostationnaire :

C'est la durée pour effectuer un tour dans le référentiel géocentrique : c'est la durée d'un jour sidéral 1 j = 86164 s = 23 h 56 min 4 s

Altitude de révolution d'un Satellite Géostationnaire :

$$T = \frac{2\pi\sqrt{r^3}}{\sqrt{G \cdot M_T}} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M_T}$$

$$r^3 = \frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}}$$

$$R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}} \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}} - R_T$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}} - R_T$$

$$h \approx \sqrt[3]{\frac{86164^2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 6,0 \times 10^{24}}{4\pi^2}} - 6400 \times 10^3$$

$$h \approx 3,58 \times 10^7 \ \text{m} \approx 35\ 800 \ \text{km}$$

Applications

1)- Détermination de la masse de la terre

Les Satellites géostationnaires de la Terre ont une orbite circulaire de rayon $r_G = (R_T + h) = 42164$ km et une période $T_G = 86164$ s. Calculer la masse M_T de la Terre.

On a $$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T} = c^{te} \Rightarrow M_T = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$$

$$M_T \approx \frac{4\pi^2 \times \left(42164 \times 10^3\right)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (86164)^2}$$

$$M_T \approx 5{,}98 \times 10^{24} \text{ kg}$$