Physique 11 : Mouvements plans

1. Quel est le mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme ?

Étudions le mouvement d'un projectile dans une région de l'espace où le champ de pesanteur peut être considéré comme uniforme.

1.1 Étude expérimentale

Une bille est lancée avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec le plan horizontal. Étudions le mouvement de son centre d'inertie dans le référentiel terrestre.

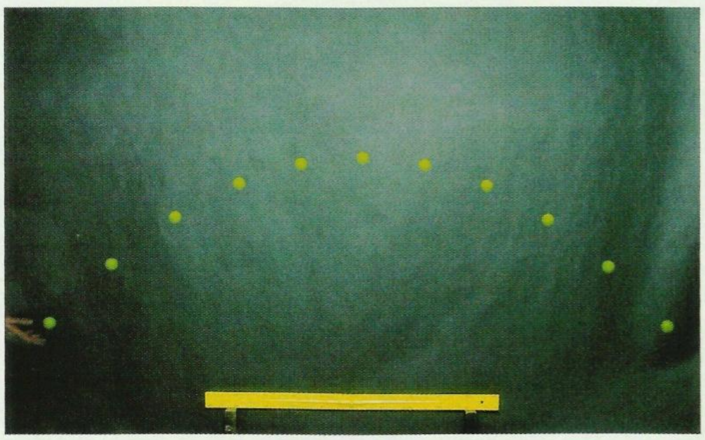
Activité 1

Quel est le mouvement d'une bille dans le champ de pesanteur ?

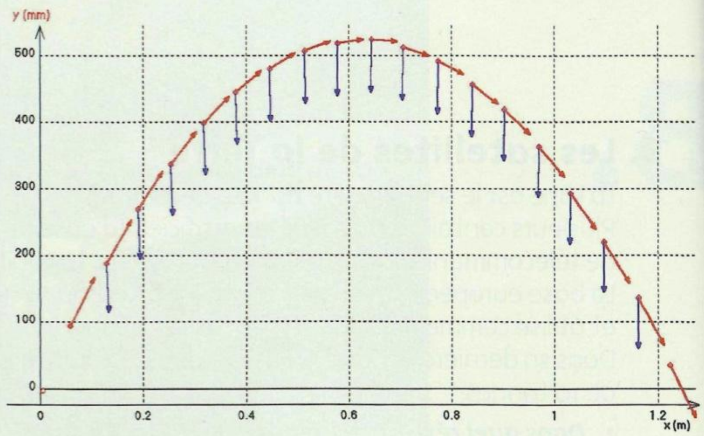
- Filmer une bille lancée dans un plan perpendiculaire à l'axe de visée d'un caméscope [Doc. 1].
- Analyser le film à l'aide d'un logiciel de traitement d'images.
- Faire tracer les vecteurs vitesse et accélération du centre d'inertie de la bille pour chacune de ses positions.

1. Au cours du mouvement, comment varie le vecteur vitesse ? le vecteur accélération ?

2. Comparer le vecteur accélération avec le vecteur $\vec{g}$ [Doc. 2].



Doc. 1 *Étude, image par image, d'une bille lancée dans le plan frontal du caméscope.*



Doc. 2 *Vecteurs vitesse (en rouge) et accélération (en bleu) au cours du mouvement.*

> Observation

Le vecteur vitesse du centre d'inertie de la bille change de valeur et d'orientation au cours du mouvement.
Le vecteur accélération est constant, vertical descendant.
Le vecteur accélération a la direction et le sens du vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ et sa valeur est de l'ordre de $10\ m\ .\ s^{-2}$.

> Interprétation

- Le système considéré est la bille.
- Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen.
- Une fois lancée, la bille est soumise à son poids $\vec{P}$ et à l'action de l'air que l'on peut négliger : **la chute est dite libre.**
- Appliquons la deuxième loi de NEWTON à la bille :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\ .\ \vec{a}_G.$$

Avec $\vec{P} = m\ .\ \vec{g}$, on a :

$$\vec{a}_G = \vec{g}.$$

Lors de la chute libre d'un mobile, le vecteur accélération $\vec{a}_G$ de son centre d'inertie est égal au vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$:

$$\vec{a}_G = \vec{g}$$

Ce résultat a déjà été établi au chapitre précédent lors de l'étude d'un mouvement de chute libre verticale.

1.2 Équations horaires

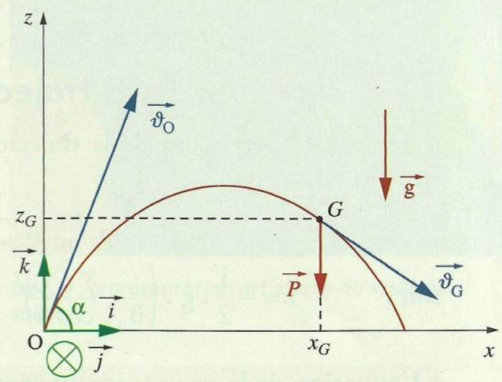
Déterminons les caractéristiques du mouvement du centre d'inertie G d'un projectile lancé avec une vitesse initiale non nulle. C'est le cas du mouvement de l'athlète lors d'un saut en longueur vu dans l'*Activité préparatoire A*, page 249. Pour cela, recherchons les équations horaires du mouvement.

Choisissons un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au référentiel terrestre **[Doc. 3]** :

– le vecteur unitaire $\vec{k}$ est vertical ascendant ;

– le plan $(\vec{i}, \vec{k})$ contient le vecteur vitesse initiale $\vec{\vartheta}_0$. Notons α, l'angle $(\vec{i}, \vec{\vartheta}_0)$;

– l'origine O coïncide avec la position initiale du centre d'inertie G du projectile.



Doc. 3 *Trajectoire parabolique dans le cas d'une chute libre avec vitesse initiale.*

Dans ce repère et à la date $t = 0$, nous avons **[Doc. 4]** :

$$\vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{\vartheta}_0 \begin{cases} \dot{x}_0 = \vartheta_0 \,.\, \cos\alpha \\ \dot{y}_0 = 0 \\ \dot{z}_0 = \vartheta_0 \,.\, \sin\alpha \end{cases}$$

À une date t quelconque, G a pour coordonnées (x, y, z), sa vitesse $\vec{\vartheta}_G(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ et son accélération $\vec{a}_G(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ **[Doc. 3]**.

➤ Quelle que soit la date t, nous avons :

$$\vec{a}_G = \vec{g} \text{ et } \vec{g} = -\,g \,.\, \vec{k} \text{ avec } g > 0.$$

Nous en déduisons les coordonnées de l'accélération $\vec{a}_G$ de G dans ce repère :

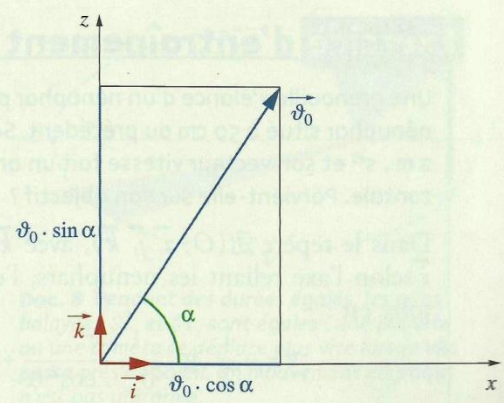
$$\vec{g} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -g \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{a}_G \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

➤ Les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{\vartheta}_G$ sont des primitives des coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}_G$. Compte tenu des conditions initiales, nous obtenons :

$$\vec{\vartheta}_G \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 = \vartheta_0 \,.\, \cos\alpha \\ \dot{y} = \dot{y}_0 = 0 \\ \dot{z} = -\,g \,.\, t + \dot{z}_0 = -\,g \,.\, t + \vartheta_0 \,.\, \sin\alpha \end{cases}$$

➤ Les coordonnées du vecteur position $\vec{OG}$ sont des primitives des coordonnées du vecteur vitesse $\vec{\vartheta}_G$. Compte tenu des conditions initiales, nous obtenons :

$$\vec{OG} \begin{cases} x = \vartheta_0 \,.\, \cos\alpha \,.\, t + x_0 = \vartheta_0 \,.\, \cos\alpha \,.\, t \\ y = y_0 = 0 \\ z = -\dfrac{1}{2} \,.\, g \,.\, t^2 + \vartheta_0 \,.\, \sin\alpha \,.\, t + z_0 = -\dfrac{1}{2} \,.\, g \,.\, t^2 + \vartheta_0 \,.\, \sin\alpha \,.\, t \end{cases}$$



Doc. 4 *Coordonnées du vecteur vitesse à l'instant initial : $\vec{\vartheta}_0 = \vartheta_0 \,.\, \cos\alpha \,.\, \vec{i} + \vartheta_0 \,.\, \sin\alpha \,.\, \vec{k}$.*

Nous déduisons de ces équations horaires trois résultats importants :

- **$y = 0$: la trajectoire du centre d'inertie G est dans le plan vertical (xOz) contenant $\vec{\vartheta}_0$.**
- **$x = \vartheta_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$: le mouvement de la projection de G sur l'axe horizontal (Ox) est uniforme.**
- **$z = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + \vartheta_0 \cdot \sin\alpha \cdot t$: le mouvement de la projection de G sur l'axe vertical (Oz) est uniformément accéléré.**

1.3 Équation de la trajectoire

• On établit l'équation de la trajectoire en éliminant le paramètre t des équations horaires :

$$t = \frac{x}{\vartheta_0 \cdot \cos\alpha}$$

soit : $$z = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{\vartheta_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 + \vartheta_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{x}{\vartheta_0 \cdot \cos\alpha}$$

L'équation de la trajectoire du centre d'inertie d'un projectile est :

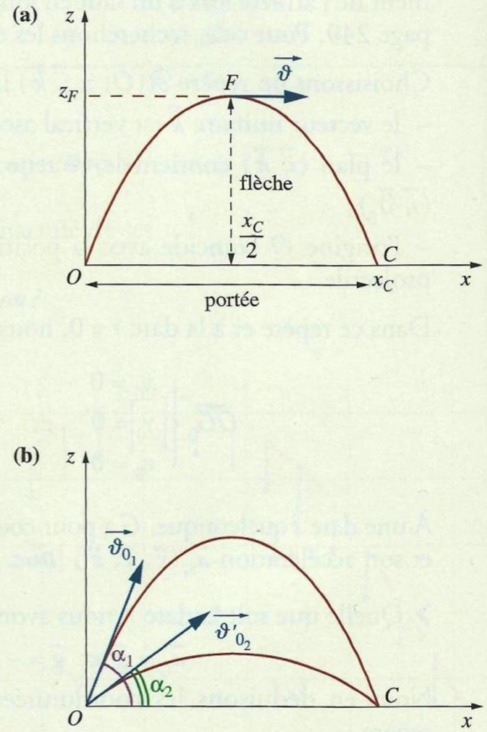
$$z = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{\vartheta_0^{\,2} \cdot \cos^2\alpha} + \tan\alpha \cdot x$$

La trajectoire est une portion de parabole située dans le plan vertical contenant $\vec{\vartheta}_0$.

• La portée horizontale est la distance $d = OC$ **[Doc. 5a]** entre le point O de lancement et le point C de chute. On détermine $d = x_C$ pour $z_C = 0$.

La portée est la même pour deux angles de tir complémentaires (tir en cloche ou tir tendu) **[Doc. 5b]**. On démontre que la portée est maximale pour $\alpha = 45°$ (voir l'*exercice résolu* 1, page 263).

• La flèche est l'altitude maximale atteinte par G (position F). Au point F, le vecteur vitesse $\vec{\vartheta}$ est horizontal : $\dot{z}_F = 0$.



Doc. 5 *Trajectoires d'un projectile.*

Exercice d'entraînement 1

Une grenouille s'élance d'un nénuphar pour atteindre un autre nénuphar situé à 50 cm du précédent. Sa vitesse initiale est de 2 m . s⁻¹ et son vecteur vitesse fait un angle $\alpha = 55°$ avec l'horizontale. Parvient-elle sur son objectif ?

Dans le repère $\mathcal{R}(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, avec $\vec{k}$ vertical ascendant et $\vec{i}$ selon l'axe reliant les nénuphars, l'équation de la trajectoire est :

$$z = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{\vartheta_0^{\,2} \cdot \cos^2\alpha} + \tan\alpha \cdot x.$$

La longueur du saut, obtenue pour $z = 0$, est :

$$x = \frac{2 \cdot \vartheta_0^{\,2} \cdot \cos^2\alpha \cdot \tan\alpha}{g} = \frac{2 \cdot \vartheta_0^{\,2} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{g}.$$

La longueur du saut dépend de la valeur et de l'orientation du vecteur vitesse initiale (voir l'*Activité préparatoire A*, page 249).

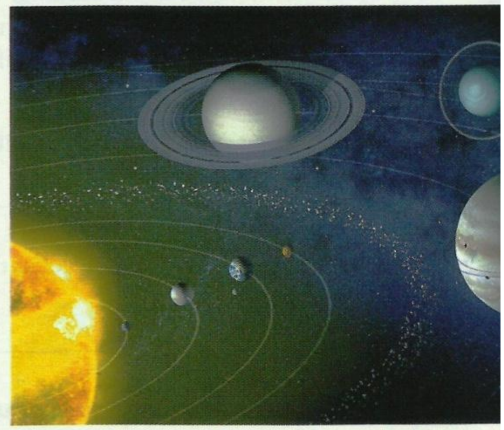
Numériquement : $x = 0{,}38$ m. La grenouille tombe à l'eau !

Pour s'entraîner : Ex. 1, 4, 5 et 7

2. Quel est le mouvement des planètes et des satellites ?

Dans le champ de pesanteur localement uniforme, la force de gravitation qui s'exerce sur un solide (son poids) est constante et la trajectoire de son centre d'inertie est parabolique.

Qu'en est-il pour un mobile (planète, satellite) soumis à une force de gravitation qui varie au cours du mouvement ?



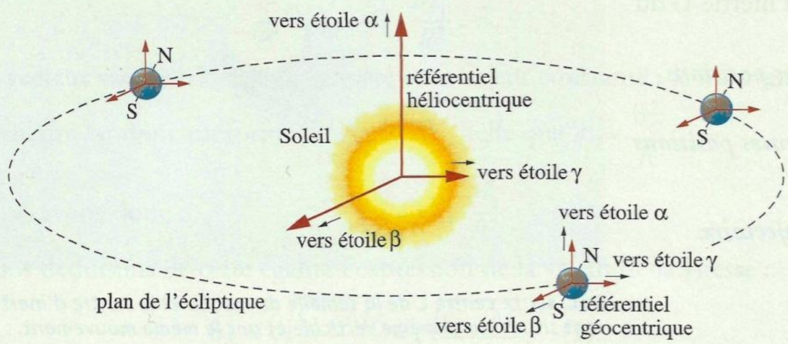
Doc. 7 *Représentation artistique du système solaire.*

2.1 Lois de KÉPLER

Utilisant les résultats des observations de son maître Tycho BRAHÉ (1546-1601), Johannes KÉPLER (1571-1630) formule trois lois qui décrivent le mouvement des planètes autour du Soleil.

> Première loi de KÉPLER : loi des trajectoires *[Doc. 6 et 7]*

Dans un référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre d'une planète est une ellipse dont le centre du Soleil est l'un des foyers.



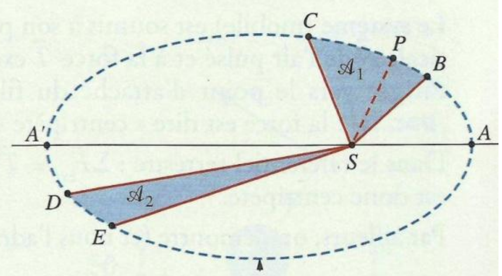
Doc. 6 *Un repère du référentiel héliocentrique a pour origine le centre du Soleil. Ses axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines considérées comme fixes pendant la durée des observations.*
Le référentiel géocentrique est animé d'un mouvement de translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique.

Le cercle est une ellipse particulière : les foyers sont confondus en un point qui est le centre du cercle.

> Deuxième loi de KÉPLER : loi des aires

KÉPLER constate que les planètes ne tournent pas autour du Soleil avec une vitesse constante. Elles se déplacent plus rapidement lorsqu'elles sont plus proches du Soleil *[Doc. 8]*.

Le segment de droite reliant le Soleil à la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.



Doc. 8 *Pendant des durées égales, les aires balayées $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales : une planète ou une comète se déplace plus vite lorsqu'elle passe près du Soleil. Un mouvement elliptique n'est pas uniforme.*
Le grand axe de l'ellipse a pour valeur AA' = 2a.

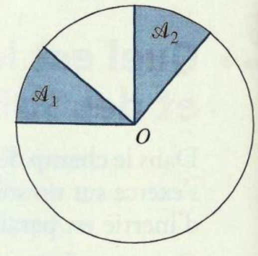
> Troisième loi de KÉPLER : loi des périodes

Pour toutes les planètes du système solaire, le rapport entre le carré de la période de révolution et le cube de la demi-longueur a du grand axe est le même :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}.$$

Les lois de KÉPLER s'appliquent aux planètes dans le référentiel héliocentrique et aux satellites de la Terre dans le référentiel géocentrique (voir l'*Activité préparatoire B*, page 249).

Dans le référentiel héliocentrique, les centres de la plupart des planètes du système solaire ont une trajectoire circulaire. D'après la deuxième loi de KEPLER, leur mouvement est alors uniforme **[Doc. 9]**.



Doc. 9 *Pendant des durées égales, les aires balayées $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales. Si la trajectoire est circulaire, les arcs de cercle sont égaux : le mouvement est uniforme.*

2.2 Caractéristiques d'un mouvement circulaire uniforme

Étudions le mouvement ciculaire et uniforme du centre d'inertie d'un mobile afin d'en caractériser l'accélération.

Activité 2

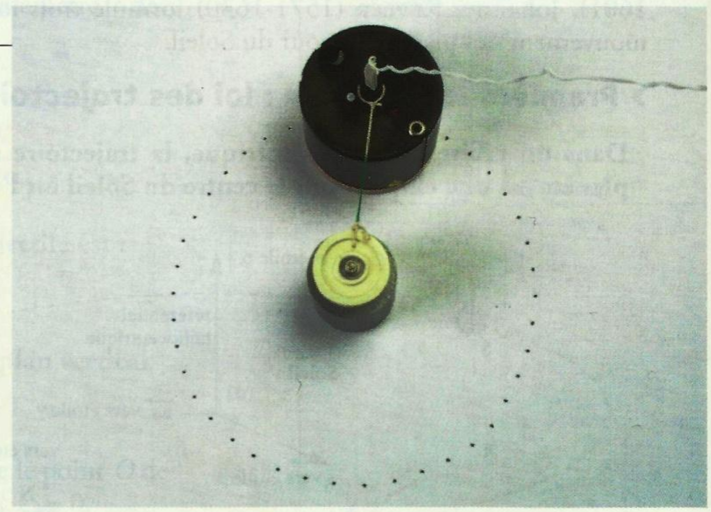
Quelles sont les caractéristiques d'un mouvement circulaire uniforme ?

- Lancer, sur une table horizontale **[Doc. 10]**, un mobile autoporteur relié à un point fixe par un fil inextensible.
- Enregistrer les positions successives du centre d'inertie G du mobile.

1. Construire le vecteur vitesse $\vec{\vartheta}_G$ pour différentes positions et déterminer sa valeur ϑ_G.

2. Construire le vecteur accélération $\vec{a}_G$ en différentes positions et déterminer sa valeur a_G.

3. Comparer a_G et $\frac{\vartheta_G^2}{R}$ où R est le rayon de la trajectoire.



Doc. 10 *Le centre C de la semelle du mobile et le centre d'inertie G sont situés sur la même verticale et ont le même mouvement.*

> Observation

Pour différentes positions du mobile, l'orientation du vecteur vitesse $\vec{\vartheta}_G$ change, mais sa valeur ϑ_G reste constante.

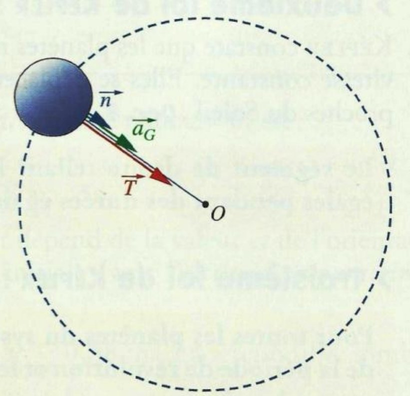
L'orientation du vecteur accélération $\vec{a}_G$ change tout en restant dirigée vers le centre O de la trajectoire circulaire. La valeur a_G de l'accélération est constante. Nous constatons que $a_G = \frac{\vartheta_G^2}{R}$.

> Interprétation

Le système (mobile) est soumis à son poids $\vec{P}$ compensé par la réaction verticale $\vec{R}$ de l'air pulsé et à la force $\vec{T}$ exercée par le fil tendu. Cette force est dirigée vers le point d'attache du fil, centre de la trajectoire circulaire **[Doc. 11]** : la force est dite « centripète ».

Dans le référentiel terrestre : $\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{T} = m \cdot \vec{a}_G$. Le vecteur accélération $\vec{a}_G$ est donc centripète.

Par ailleurs, on démontre (et nous l'admettrons) que la valeur a_G de l'accélération est constante, égale à $\frac{\vartheta_G^2}{R}$.



Doc. 11 *Force et accélération centripète :*
$\vec{a}_G = \frac{\vartheta_G^2}{R} \cdot \vec{n}$, *$\vec{n}$ est un vecteur unitaire centripète.*

Lorsque le centre d'inertie d'un solide est animé d'un mouvement circulaire uniforme, en tout point de la trajectoire : $\vec{a}_G = \frac{\vartheta_G^2}{R} \cdot \vec{n}$, avec $\vec{n}$ vecteur unitaire centripète.

Nous admettons que, réciproquement, un mouvement circulaire dont l'accélération centripète a une valeur constante a, est uniforme de vitesse ϑ telle que $a = \dfrac{\vartheta^2}{R}$.

2.3 Mouvement d'un satellite terrestre à orbite circulaire

Dans le **référentiel géocentrique**, étudions le mouvement, du centre d'inertie G d'un satellite de la Terre, animé d'un mouvement circulaire de rayon R (distance du satellite au centre de la Terre) ***[Doc. 12]***. On montre et nous admettrons que le plan de la trajectoire circulaire contient le centre O de la Terre.

Doc. 12 *Un satellite de communication.*

> Expression de la vitesse

Le système (le satellite de masse m) est soumis à la force gravitationnelle centripète $\vec{F}$ exercée par la Terre de masse M_T ***[Doc. 13]*** :

$$\vec{F} = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{R^2} \cdot \vec{n}.$$

Le référentiel géocentrique est galiléen, donc : $\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$; d'où :

$$\vec{a}_G = G \cdot \frac{M_T}{R^2} \cdot \vec{n}.$$

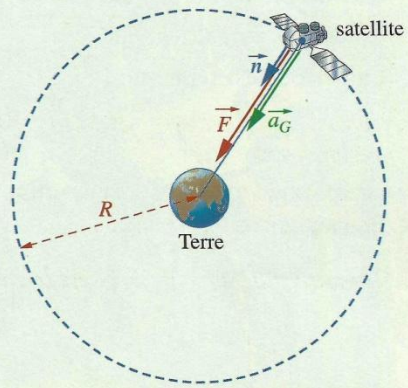
Le vecteur accélération est centripète et sa valeur constante : le mouvement circulaire est donc uniforme de vitesse ϑ_G telle que $a_G = \dfrac{\vartheta_G^2}{R}$.

Nous avons donc : $$a_G = \frac{\vartheta_G^2}{R} = G \cdot \frac{M_T}{R^2}.$$

Nous déduisons de cette égalité l'expression de la valeur de la vitesse :

$$\vartheta_G = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}} \quad (1).$$

où R_T est le rayon terrestre et h l'altitude du satellite.



Doc. 13 *La Terre exerce sur le satellite la force de gravitation $\vec{F}$.*

Dans le référentiel géocentrique, le mouvement du centre d'inertie d'un satellite en orbite circulaire est uniforme.
Sa vitesse n'est fonction que de son altitude. Elle diminue lorsque l'altitude augmente. Elle est indépendante de sa masse.

Pour une mise en orbite circulaire d'un satellite, sa vitesse doit correspondre à l'altitude donnée par la relation (1) et son vecteur vitesse doit être perpendiculaire à la direction de la force gravitationnelle ***[Doc. 14]***.

> Expression de la période

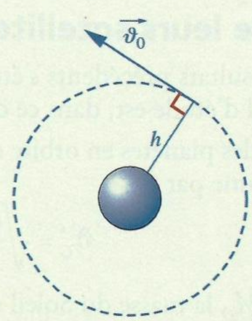
La durée T pour effectuer un tour, ou période de révolution, est égale à la longueur de la circonférence divisée par la valeur de la vitesse :

$$T = \frac{2\pi \cdot R}{\vartheta_G} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G \cdot M_T}} \quad \text{avec } R = R_T + h.$$

La période d'un satellite augmente avec son altitude.

En élevant cette expression au carré, on retrouve la troisième loi de KEPLER :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T} = \text{constante}.$$



Doc. 14 *Pour une satellisation circulaire à une altitude h donnée, la vitesse de lancement $\vec{\vartheta}_0$ est imposée.*

Exercice d'entraînement 2

Calculer la vitesse et la période de révolution de la station orbitale internationale ISS de masse 455 tonnes évoluant sur une orbite circulaire inclinée de 51,6° par rapport à l'équateur, à une altitude de 400 km.

Données :

$R_T = 6\,380$ km ; $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg ; G = $6{,}67 \times 10^{-11}$ SI.

Dans le référentiel géocentrique : $\vartheta = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$.

Numériquement : $\vartheta = 7\,670$ m . s^{-1} = $27\,600$ km . h^{-1}.

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{G \cdot M_T}}$ avec $R = R_T + h$.

Numériquement : $T = 5\,554$ s = 1 h 33 min.

> Les satellites géostationnaires

Considérons un satellite qui gravite, dans le référentiel géocentrique, sur une orbite circulaire, dans le plan de l'équateur terrestre et dans le même sens de rotation que la Terre autour de son axe ***[Doc. 15]***.

Ce satellite est immobile par rapport à la Terre si sa période de révolution est égale à la période de rotation de la Terre autour de son axe.

Dans ce cas, il reste continuellement sur la verticale du même lieu de l'équateur (sur le rayon passant par ce lieu) : il est **géostationnaire.**

Calculons son altitude.

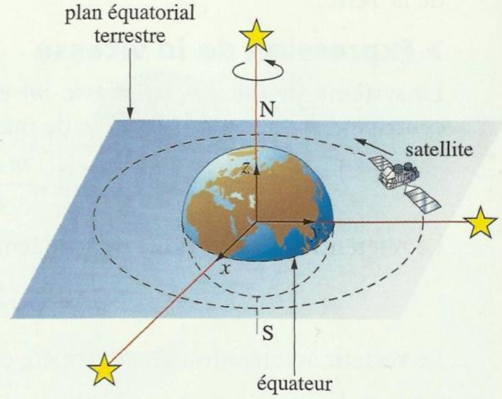
La période est telle que :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G \cdot M_T}} \text{ ; soit } T^2 = 4\pi^2\frac{R^3}{G \cdot M_T}.$$

La période T d'un satellite géostationnaire est égale à un jour sidéral, soit 86 164 s.

On obtient : $R = \sqrt[3]{\dfrac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2}} = 42\,000$ km ;

Or $R = R_T + h$; d'où : $h = 35\,600$ km.



***Doc. 15** Un satellite géostationnaire évolue, dans un repère géocentrique, sur une trajectoire circulaire dans le plan équatorial de la Terre.*

Dans le référentiel terrestre, les satellites géostationnaires évoluent sur une trajectoire circulaire, située dans le plan de l'équateur, à une altitude voisine de 36 000 km. Ils tournent dans le même sens que la Terre.
Ils ont une période de révolution d'un jour sidéral, soit 86 164 s.

Le jour sidéral est égal à la période de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles, dans le référentiel géocentrique.

2.4 Mouvement des planètes et de leurs satellites

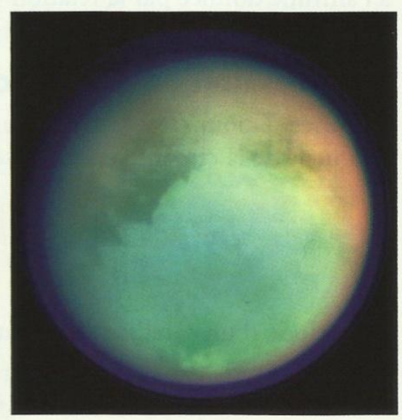
Les résultats précédents s'étendent aux planètes du système solaire ; le référentiel d'étude est, dans ce cas, le **référentiel héliocentrique.**

Pour des planètes en orbite circulaire autour du Soleil, la valeur de la vitesse s'exprime par :

$$\vartheta_G = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{R}} \quad \text{et} \quad \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_S},$$

avec M_S, la masse du Soleil et R la distance planète-Soleil.

Ces résultats sont valables pour l'étude des satellites naturels des autres planètes du système solaire ***[Doc. 16]*** ; c'est la masse M_P de la planète qui intervient alors.



***Doc. 16** Titan est le plus gros satellite de Saturne.*

Exercice d'entraînement 3

Quelle est la masse M_J de Jupiter sachant que l'un de ses satellites, Io, a une orbite circulaire de rayon $R = 421\,600$ km et une période de révolution $T = 152\,424$ s ?

Donnée : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI.

D'après la relation $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_J}$, on déduit :

$$M_J = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot T^2}.$$

Numériquement : $M_J = 1{,}9 \times 10^{27}$ kg.

Pour s'entraîner : Ex. 10 et 11

3. Comment expliquer l'impesanteur ?

3.1 Notion d'impesanteur

Un objet ou une personne en état d'impesanteur paraissent ne plus être soumis aux effets de la pesanteur.

Imaginons une personne de masse m, debout dans un ascenseur animé, par rapport au sol, d'un mouvement d'accélération $\vec{a}$. La personne a aussi cette accélération $\vec{a}$ par rapport au sol. Elle est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$ du plancher.

D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$.

La personne ressent la force de contact $\vec{R}$ exercée par le plancher sur ses pieds.

Supposons que la cage d'ascenseur tombe en chute libre. Dans ce cas, l'accélération de la cage de l'ascenseur et l'accélération de la personne sont égales à $\vec{g}$: cage et personne ont le même mouvement de chute libre.

On a donc $\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{g}$; comme $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, on en déduit $\vec{R} = \vec{0}$. La personne n'est plus en appui sur le plancher de la cage d'ascenseur ; elle peut se détacher du plancher et « flotter » dans l'espace de la cabine, son stylo « flotte » à ses côtés... Tout se passe comme si la personne ne ressentait plus l'effet de la pesanteur qui la maintient ordinairement contre le plancher. Elle se trouve en impesanteur.

Doc. 17 *L'astronaute Philippe Perrin, lors de la mission STS-111, dans la station spatiale internationale.*

3.2 Impesanteur dans le cas d'un satellite en mouvement circulaire uniforme

L'impesanteur se produit dans les véhicules spatiaux satellisés autour de la Terre [Doc. 17]. Le centre d'inertie du véhicule spatial et le centre d'inertie du cosmonaute ont la même accélération :

$$\vec{a} = G \cdot \frac{M_T}{R^2} \cdot \vec{n}.$$

Le cosmonaute ne ressent plus la pesanteur, car il a le même mouvement que sa cabine. Il semble « flotter ».

Pour s'entraîner : Ex. 12