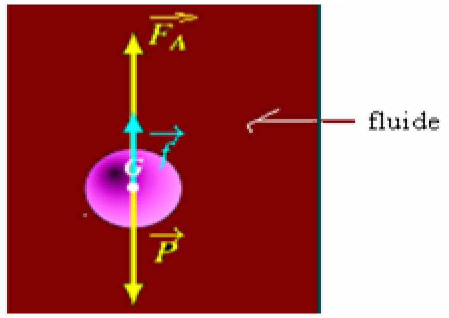
La chute verticale d'un solide (pour s. math et sc physique)

I- Les forces qui s'appliquent sur un corps dans un fluide :

1) Les forces exercées par un fluide:

Tous corps immergé dans un fluide est soumis à trois forces:

- $\vec{P}$: La force de pesanteur (poids du corps).
- $\vec{F}_A$: La poussée d'Archimède.
- $\vec{f}$: La force de frottement fluide exercée par le fluide.



2) La force de pesanteur:

Dans le champ de pesanteur, au voisinage de la terre, les corps son soumis à une force de pesanteur exercée par la terre qui s'appelle : poids du corps.

Relation entre poids et masse d'un corps : $P = m.g$ la force: $\vec{P} = m.\vec{g}$ s'applique au centre d'inertie du corps.

g : Intensité du champ de pesanteur (en N/kg) ou (m/s^2).

3) La poussée d'Archimède:

Tout corps immergé totalement ou partiellement dans un fluide est soumis à une force exercée par ce fluide qui s'appelle la poussée d'Archimède ,sa direction est toujours verticale orientée vers le haut d'intensité égale au poids du liquide déplacée : $F_A = m_f.g$ avec : $m_f = \rho_f.V$

Expression de la poussée d'Archimède : $\vec{F}_A = -\rho_f.V.\vec{g}$ elle s'applique au centre d'inertie du corps.

ρ_f : la masse volumique du fluide en(kg/m^3)

V : volume du liquide déplacé en (m^3)

g : intensité de pesanteur en (N/kg) ou (m/s^2)

4) La force de frottement fluide:

Les forces de frottements exercées par un fluide sur un corps immergé dedans sont équivalente à une force unique $\vec{f}$ appelée force de frottement fluide $\vec{f} = -k.\vec{v}^n$ de direction opposée à la vitesse et d'intensité: $f = k.v^n$.

-Si la vitesse est faible on prend n=1 et la force de frottement devient : $f = k.v$

-Si la vitesse est grande on prend n=2 et la force de frottement devient : $f = k.v^2$

II- La chute verticale d'un corps dans un fluide par frottement :

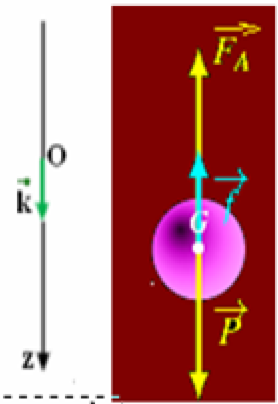
1) Equation différentielle vérifiée par la vitesse:

Considérons une boule de masse m complétement immerge dans un fluide.

■**Le système étudié**: {la boule}

■**Bilan des forces:** la boule est soumise à l'action des forces suivantes:

$\vec{P}$: son poids:	$\vec{P} = m.g.\vec{k}$	d'intensité: $P = m.g$
$\vec{F}_A$: La poussée d'Archimède:	$\vec{F}_A = -\rho_f.V.g.\vec{k}$	d'intensité: $F_A = \rho_f.V.g$
$\vec{f}$: La force de frottement :	$\vec{f} = -k.v^n.\vec{k}$	d'intensité : $f = k.v^n$



■ **Choix du repère:** On considère le repère $(O, \vec{z})$ orienté vers le bas.

■ **Application de la deuxième loi de Newton:**

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m\vec{a}_G$ (1)

■**En projetant la relation (1) sur l'axe** oz: $P - F_A - f = ma_z$ d'où: $m.g - m_f.g - k.v^n = m.\frac{dv}{dt}$ avec: $m_f = \rho_f.V$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g(1 - \frac{m_f}{m}) - \frac{k}{m}.v^n$$

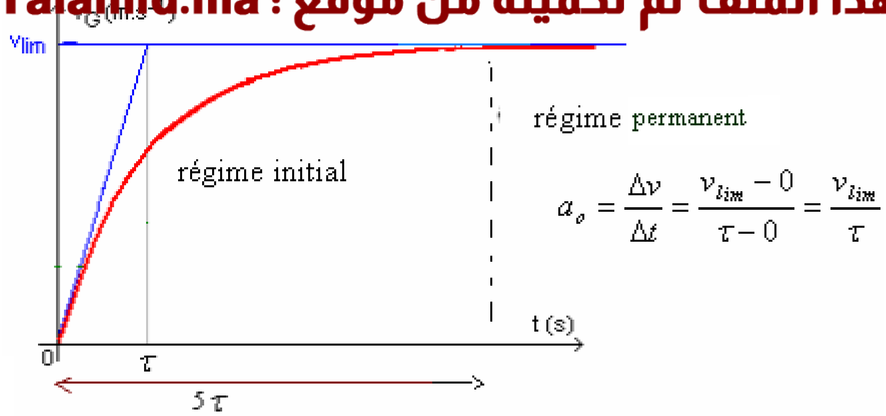
Equation différentielle qui est de la forme: $\frac{dv}{dt} = A - B.v^n$

avec : $A = g(1 - \frac{m_f}{m})$ et: $B = \frac{k}{m}$

2)Les grandeurs caractérisant le mouvement:

- **Le régime permanent:**

L'étude expérimentale permet de tracer la courbe de variation de la vitesse de la bille en fonction du temps:



La courbe présente deux régimes:

- Un régime intial durant lequel:
  - -La vitesse de la bille augmente.
  - - La valeur f de la force de frottement du fluide augmente.
  - - L'accélération de la bille diminue.
- Un régime permanent durant lequel:
  - -La vitesse de la bille devient constante et prend une valeur limite v_ℓ
  - - La valeur f de la force de frottement fluide est constante.
  - - L'accélération de la bille est nulle.

Or à chaque instant durant le mouvement: $a = \frac{dv}{dt} = g(1 - \frac{m_f}{m}) - \frac{k}{m}.v^n$

donc l'accélération initiale du mouvement de la bille à t=o: $a_o = g(1 - \frac{m_f}{m}).$ car : $v_o=0$

-Accélération du mouvement de la bille pendant le régime transitoire :

Au début du mouvement, la vitesse (de chute de la bille) augmente et son mouvement devient **accéléré** , son accélération : donc son accélération diminue au fur et à mesure que sa vitesse augmente.

-La vitesse limite de la bille: on a : $a = \frac{dv}{dt} = g(1 - \frac{m_f}{m}). - \frac{k}{m}.v^n = A - B.v^n$

Lorsque le régime permanent est établit la vitesse de la bille devient constante, donc: $\frac{dv}{dt} = 0$

$A - B.v_\ell^{\,n} = 0$, L'expression de la vitesse limite: $v_\ell = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow v_\ell = \left[\frac{g}{k}(m - m_f)\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{g}{k}(\rho - \rho_f).V\right]^{\frac{1}{n}}$

ρ : masse volumique du corps en (kg/m^3)

ρ_f : masse volumique du fluide en (kg/m^3)

Remarque: Graphiquement la valeur de l'accélération initiale est égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe v=f(t) à t=0.

-Le temps caractéristique du mouvement:

Graphiquement l'asymptote à la courbe et la tangente à t=0 se coupent à $t = \tau$ temps caractéristique du mouvement qui est donné par la relation: $v_{\ell im} = a_o \tau$

Remarque : Si on connait le temps caractéristique du mouvement on peut évaluer la durée du mouvement initial . car il est égal à environ 5τ .

3) Solution de l'équation différntielle par la méthode d'Euler:

La méthode d'Euler est une méthode itérative (c'est à dire qu'elle nécessite la répétition d'un même calcul),elle permet de savoir la vitesse de la bille à instant donné.
Cette méthode comporte deux étapes de calcul.

La 1ère étape:

Si on connait la vitesse initiale v_o ,on détermine la valeur de l'accélération initiale a_o à partir de la relation : $a_o = A - B.v_o^{\,n}$

La 2ème étape:

S i on connait le pas de calcul: $\Delta t = t_{i+1} - t_i$,on détermine la vitesse v_{i+1} à l'instant t_{i+1} par la relation suivante:

$$v_{i+1} = v_i + a_i.\Delta t$$

Donc les deux relations intéressantes dans la méthode d'Euler sont :

$a_i = A - B.v_i^{\,n}$ et : $v_{i+1} = v_i + a_i.\Delta t$

Initialement on connait la valeur de la vitesse initiale v_o:

On détermine alors : $a_o = A - B.v_o^{\ n}$ puis on en déduit : $v_1 = v_o + a_o\Delta t$

Et on détermine : $a_1 = A - B.v_1^{\ n}$ puis on en déduit : $v_2 = v_1 + a_1\Delta t$

Et on détermine $a_2 = A - B.v_2^{\ n}$ p uis on en déduit : $v_3 = v_2 + a_2\Delta t$

Et on détermine $a_3 = A - B.v_3^{\ n}$ puis on en déduit : $v_4 = v_3 + a_3\Delta t$

…….et ainsi de suite……

Remarque :

Le choix du pas du calcul a une grande importance dans la méthode d'Euler, car plus que sa valeur est petite plus les résultats théoriques sont proches des résultats expérimentaux .

On prend généralement pour pas de calcul : $\Delta t = \dfrac{\tau}{10}$ pour ne pas dépasser la vitesse limite de la bille.

II- La chute libre d'un corps dans un fluide par frottement :

1)Définition de la chute libre:

Un corps est en chute libre s'il n'est soumis qu'à l'action de son poids.

Lorsque la trajectoire du corps en chute libre est rectiligne on dit que le corps est en chute libre verticale.

Remarque: Pratiquement on peut négliger l'action de l'air sur les corps solides denses et ayant une forme aérodynamique

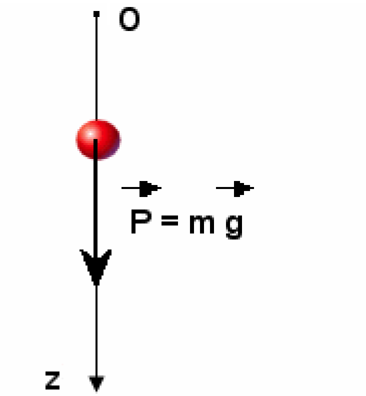
2)Etude de la chute libre d'un corps:

Considérons une boule d'acier en chute libre verticale.

-Système étudié {la boule}

-Bilan des forces : La boule en chute est soumise uniquement à l'action de son poids $\vec{P}$

- Représentation des forces:



- Application de la 2ème loi de Newton:

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = m.\vec{a}_G \qquad (1)$$

-Choix du référentiel: on considère un repère (O,z) orienté dans le sens du mouvement (voir figure précédente).

-En projetant la relation (1) sur (o,z) on a;

$P = m.a_z \quad \Rightarrow \quad m.g = m.a_z$ d'où: $a_z = g$

Donc le mouvement de chute libre de la bille est rectiligne uniformément varié :

Son accélération: $a_G = g$

L'équation de la vitesse : $v_G = gt + v_o$

L'équation horaire du mouvement $z_G = \dfrac{1}{2}gt^2 + v_o.t + z_o$

pour $v_o=0$ et $z_o=0$ on a : $z = \dfrac{1}{2}g.t^2$

……………………

SBIRO Abdelkrim

lundi 25 février 2019