CIRCUIT RLC SÉRIE EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

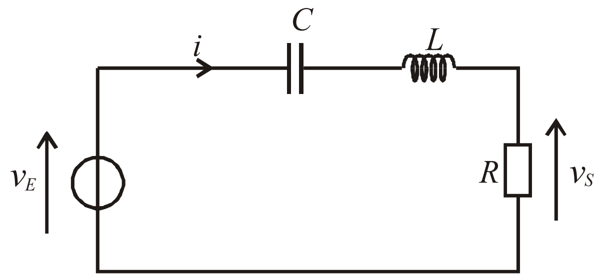
I. ÉTUDE DE LA TENSION AUX BORNES DE LA RÉSISTANCE

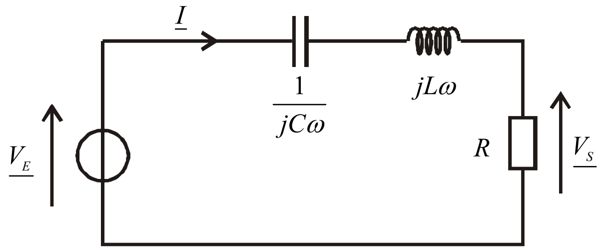
I.1 Calcul de la fonction de transfert

On étudie la tension aux bornes de la résistance d'un circuit RLC série.

Un GBF délivre une tension sinusoïdale $v_E(t) = E_m \cos(\omega t)$.

On chercher $v_S(t)$ en régime sinusoïdal forcé.





Méthode de résolution des exercices en régime sinusoïdal forcé :

- Redessiner le circuit en indiquant les amplitudes et impédances complexes. Simplifier le circuit en utilisant les lois d'association série, parallèle.
- Écrire $v_S(t)$ sous la forme : $v_S(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$.
- On cherche à exprimer $\underline{V_S}$ en fonction de $\underline{V_E}$. On utilisera les résultats du continu : diviseur de tension, diviseur de courant, loi des mailles, loi des nœuds en termes de potentiel ou théorème de Millman.

On peut écrire un diviseur de tension : $\underline{V_S} = \underline{V_E} \dfrac{R}{R + \dfrac{1}{jC\omega} + jL\omega}$. D'où la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_e}} = \frac{R}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)} \quad \text{(eq.1)}$$

I.2 Forme canonique

Il existe plusieurs **formes canoniques** possibles (voir chapitre sur les filtres). On cherche à identifier à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{(eq.2)}$$

Pour identifier les équations (1) et (2), il faut transformer l'équation 1 pour faire apparaître le terme 1 + j (…). On divise par R au numérateur et au dénominateur : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\left(\dfrac{L\omega}{R} - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}$.

Identification : $\begin{cases} H_0 = 1 \\ \dfrac{Q}{\omega_0} = \dfrac{L}{R} \\ Q\omega_0 = \dfrac{1}{RC} \end{cases}$. D'où $\boxed{\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC} \ ; \ Q = \dfrac{L\omega_0}{R} \ \text{et } H_0 = 1}$.

On va donc étudier par la suite la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$

$\boxed{\text{La pulsation réduite est définie par } u = \dfrac{\omega}{\omega_0}}$. On a donc : $\boxed{\underline{H}(ju) = \dfrac{1}{1 + jQ\left(u - \dfrac{1}{u}\right)}}$

$$v_E = E_m \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \underline{V_E} = E_m$$

$$v_S = S_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{V_S} = S_m \exp(j\varphi)$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} \Rightarrow \begin{cases} \left|\underline{H}(j\omega)\right| = \dfrac{\left|\underline{V_S}\right|}{\left|\underline{V_E}\right|} = \dfrac{S_m}{E_m} = \text{rapport des amplitudes (appelé gain et noté } G) \\ \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \arg\left(\underline{V_S}\right) - \arg\left(\underline{V_E}\right) = \varphi = \text{déphasage de } v_S \text{ par rapport à } v_e. \end{cases}$$

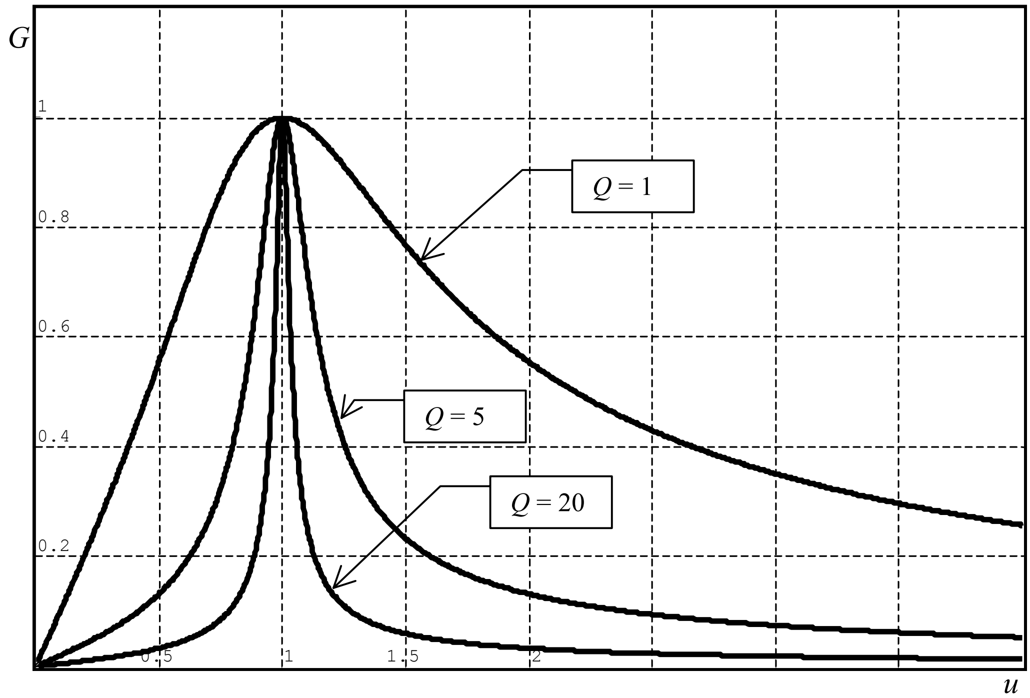
I.3 Étude du gain G en fonction de la pulsation réduite

Le gain est défini par $G = \left|\underline{H}(ju)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(u-\dfrac{1}{u}\right)^2}}$. On se contente souvent de trois points particuliers :

- G est maximum[1] si le dénominateur est minimum, c'est à dire pour $\left(u-\dfrac{1}{u}\right)^2 = 0$, c'est à dire $u-\dfrac{1}{u}=0$, soit $u=1$, $G_{max} = 1$ quelque soit Q.
- si $u \to 0$, $\underline{H}(ju) = \dfrac{1}{jQ\left(-\dfrac{1}{u}\right)} \approx \dfrac{j}{Q}u$ donc $G \to 0$
- si $u \to \infty$, $\underline{H}(ju) = \dfrac{1}{jQ(u)} \approx \dfrac{-j}{Q}\dfrac{1}{u}$ donc $G \to 0$.

G est maximum pour $u = 1$, c'est à dire pour $\omega = \omega_0$. On dit qu'il y a résonance en tension aux bornes de la résistance ou **résonance en intensité**.

Remarque : il y a toujours résonance en intensité (par rapport à Q) contrairement à la résonance en tension aux bornes du condensateur (voir paragraphe suivant).



Interprétation :

- Les signaux dont les pulsations s'éloignent de ω_0 ont des amplitudes de plus en faibles. Les signaux de pulsations voisines de ω_0 ont des amplitudes importantes : on a un **filtre passe-bande**.
- La courbe admet une tangente à l'origine[2] qui n'est pas horizontale.

[1] Il n'est pas utile de dériver car la fonction est simple à étudier. Mais attention aux conclusions trop hâtives. Dans le doute, il faut mieux dériver…
[2] Quand on demande l'allure d'une courbe dans un problème, il faut respecter les tangentes aux points particuliers.

On peut définir la **bande passante** à –3 dB. On a deux pulsations ω_1 et ω_2 pour lesquelles $|\underline{H}(j\omega_1)| = |\underline{H}(j\omega_2)| = \frac{|\underline{H}|_{max}}{\sqrt{2}}$. La bande passante est : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

- On cherche u_1 et u_2 tels que :

$$G(u_1) = G(u_2) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}. \text{ D'où : } \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(u-\frac{1}{u}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow Q^2\left(u-\frac{1}{u}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(u-\frac{1}{u}\right)^2 - \frac{1}{Q^2} = 0$$

Il faut résoudre l'équation : $\left(u-\frac{1}{u}-\frac{1}{Q}\right)\left(u-\frac{1}{u}+\frac{1}{Q}\right) = 0$.

➢ <u>Étude de</u> $\left(u-\frac{1}{u}-\frac{1}{Q}\right) = 0 \Rightarrow u^2 - \frac{u}{Q} - 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 = 4\left(1+\frac{1}{4Q^2}\right) > 0$

$u = \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}$. Une seule solution est physiquement acceptable ($u > 0$).

D'où $u_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} + \sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}$

➢ <u>Étude de</u> $\left(u-\frac{1}{u}+\frac{1}{Q}\right) = 0 \Rightarrow u^2 + \frac{u}{Q} - 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 = 4\left(1+\frac{1}{4Q^2}\right) > 0$

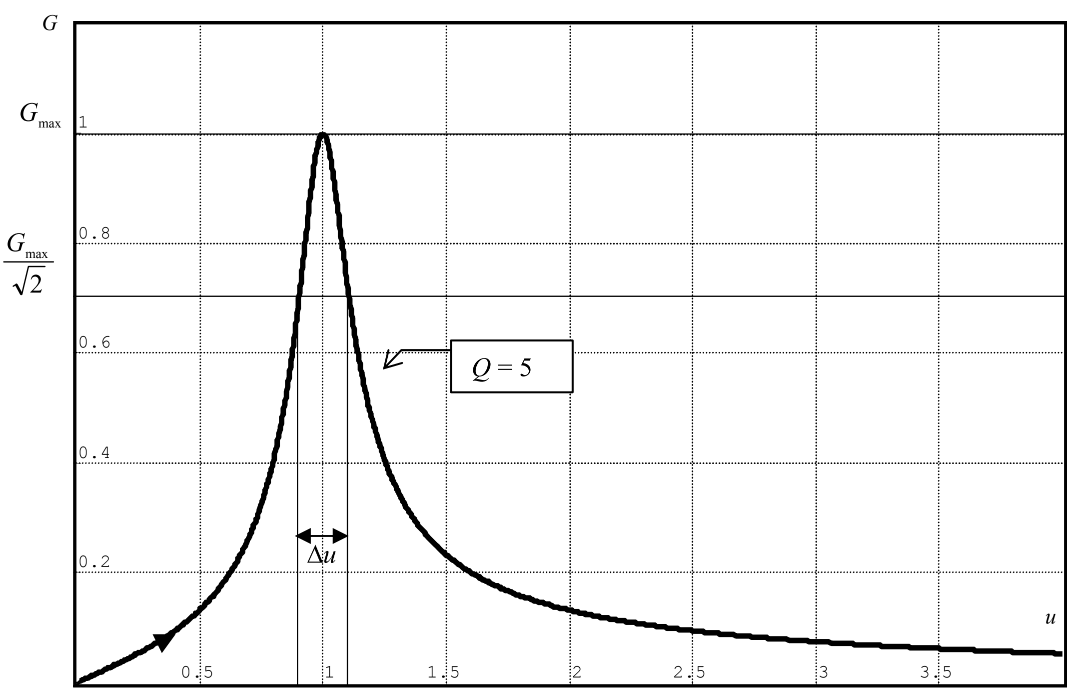
$u = -\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}$. Une seule solution est physiquement acceptable ($u > 0$).

D'où $u_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}$. On en déduit donc que : $\Delta u = \frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$.

<u>Remarque</u> : Ce résultat est à connaître. Si le facteur de qualité est grand, la bande passante est petite, le circuit est sélectif.

La largeur de la bande passante pour un passe-bande est : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$. En fréquence, on a $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$. En pulsations réduites, on a : $\Delta u = \frac{1}{Q}$. Le circuit est d'autant **plus sélectif** (**bande passante étroite**) que le **facteur de qualité est grand** (**résistance petite**).

Les courbes tracées précédemment confirment bien le résultat.



I.4 Étude du déphasage de la sortie par rapport à l'entrée

Le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée est : $\varphi = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = -\arg\left(1 + jQ\left(u - \frac{1}{u}\right)\right)$

a) Étude simplifiée du déphasage

- Si $u \to 0$, $\underline{H}(ju) = \dfrac{1}{jQ\left(-\frac{1}{u}\right)} \approx \dfrac{j}{Q}u$, donc $\varphi \approx \dfrac{\pi}{2}$
- Si $u \to \infty$, $\underline{H}(ju) = \dfrac{1}{jQ(u)} \approx \dfrac{-j}{Q}\dfrac{1}{u}$ donc $\varphi \approx \dfrac{-\pi}{2}$.
- Si $u = 1$, $\underline{H}(ju) = 1$, donc $\varphi = 0$

b) Étude complète

Pour déterminer φ, l'expression de tan φ ne suffit pas, l'angle ne serait déterminé qu'à π près. Il faut donc préciser cos φ ou sin φ.

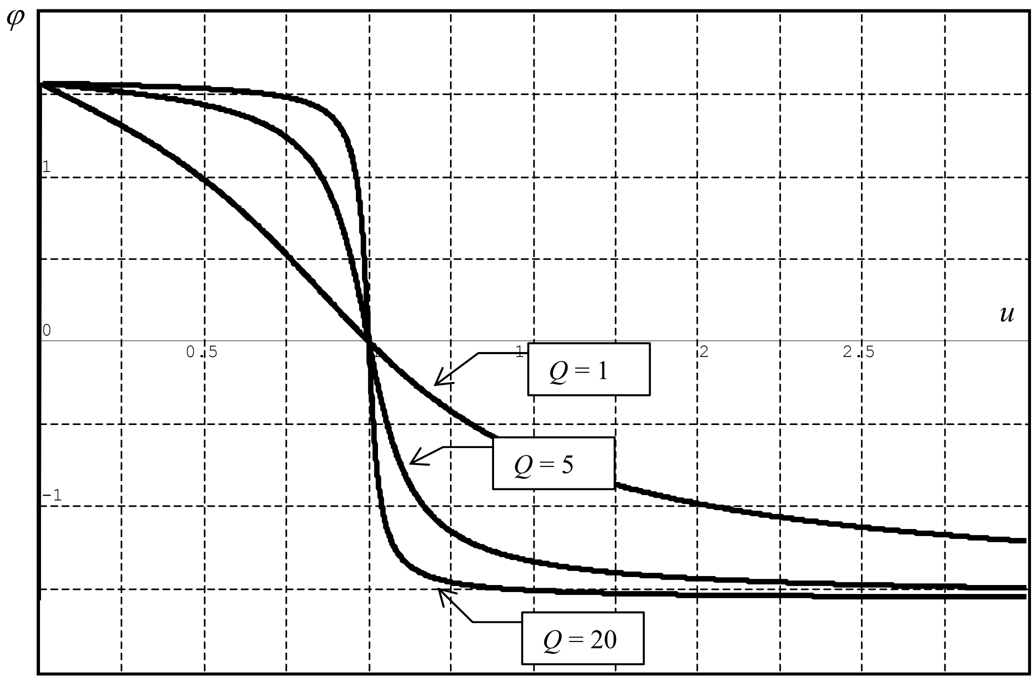
$$\begin{cases} \tan(-\varphi) = Q\left(u - \dfrac{1}{u}\right) \\ \cos(-\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(Q\left(u - \frac{1}{u}\right)\right)^2}} \end{cases} \qquad \cos\varphi > 0, \text{ donc } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

L'étude de la dérivée de φ par rapport à u se fait plus facilement en dérivant tan φ.

$$\frac{\mathrm{d}(\tan\varphi)}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{Q}\left(-\frac{1}{u^2} - 1\right) < 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} < 0}.$$

La fonction φ est donc décroissante.

- si $u << 1$ $(\omega << \omega_0)$, $\varphi \to \dfrac{\pi}{2}$
- si $u >> 1$ $(\omega >> \omega_0)$, $\varphi \to -\dfrac{\pi}{2}$.



Interprétation : on a un **saut de phase de** π qui se fait autour de ω_0. Il est d'autant plus rapide que le facteur de qualité est grand (résistance petite).

Si $u < 1$, la sortie est en avance de phase sur l'entrée. Si $u > 1$, la sortie est en retard de phase sur l'entrée.

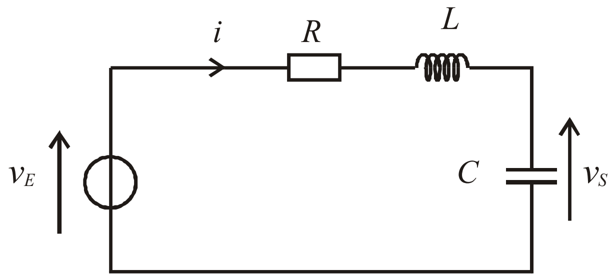
II. ÉTUDE DE LA TENSION AUX BORNES DU CONDENSATEUR

II.1 Calcul de la fonction de transfert

On étudie la tension aux bornes de la résistance d'un circuit RLC série.

Un GBF délivre une tension sinusoïdale $v_E(t) = E_m \cos(\omega t)$.

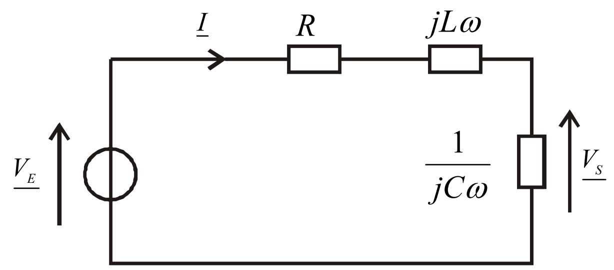
On chercher $v_S(t)$ en régime sinusoïdal forcé.



On reconnaît un **diviseur de tension**.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

II.2 Forme canonique



Il existe plusieurs **formes canoniques** possibles (voir chapitre sur les filtres). On cherche à identifier à :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}} \quad \text{(eq.2)}$$

Pour identifier les équations (1) et (2), il faut transformer l'équation 1 pour faire apparaître le terme 1 + j (…). On multiplie par $jC\omega$ au numérateur et au dénominateur :.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

Identification : $\begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ \frac{1}{Q\omega_0} = RC \end{cases}$. D'où $\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \; ; \; Q = \frac{1}{RC\omega_0} \text{ et } H_0 = 1}$.

La pulsation réduite est définie par $u = \frac{\omega}{\omega_0}$: $\boxed{\underline{H}(ju) = \frac{1}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}}}$

$$v_E = E_m \cos(\omega t) \Rightarrow \underline{V_E} = E_m$$

$$v_S = S_m \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{V_S} = S_m \exp(j\varphi)$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}} \Rightarrow \begin{cases} \left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{\left|\underline{V_S}\right|}{\left|\underline{V_E}\right|} = \frac{S_m}{E_m} = \text{rapport des amplitudes (appelé gain et noté } G) \\ \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \arg\left(\underline{V_S}\right) - \arg\left(\underline{V_E}\right) = \varphi = \text{déphasage de } v_S \text{ par rapport à } v_e. \end{cases}$$

II.3 Étude du gain G

$$G = \left|\underline{H}(ju)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-u^2\right)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} = \frac{Q}{\sqrt{u^2 + Q^2\left(1-u^2\right)^2}}$$

Pour étudier G en fonction de u, il faut étudier le signe de la dérivée.

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u} = -\frac{Q}{2}\left[u^2 + Q^2\left(1-u^2\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left[2u - 2Q^2 2u\left(1-u^2\right)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u} = -\frac{Q}{2}\left[u^2 + Q^2\left(1-u^2\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\left[2Q^2\left(1-u^2\right) - 1\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u} = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ ou } 1 - 2Q^2 + 2Q^2u^2 = 0$$

$\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u} = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ou $u = u_R = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$. Ceci n'est possible que si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

On a donc deux cas :

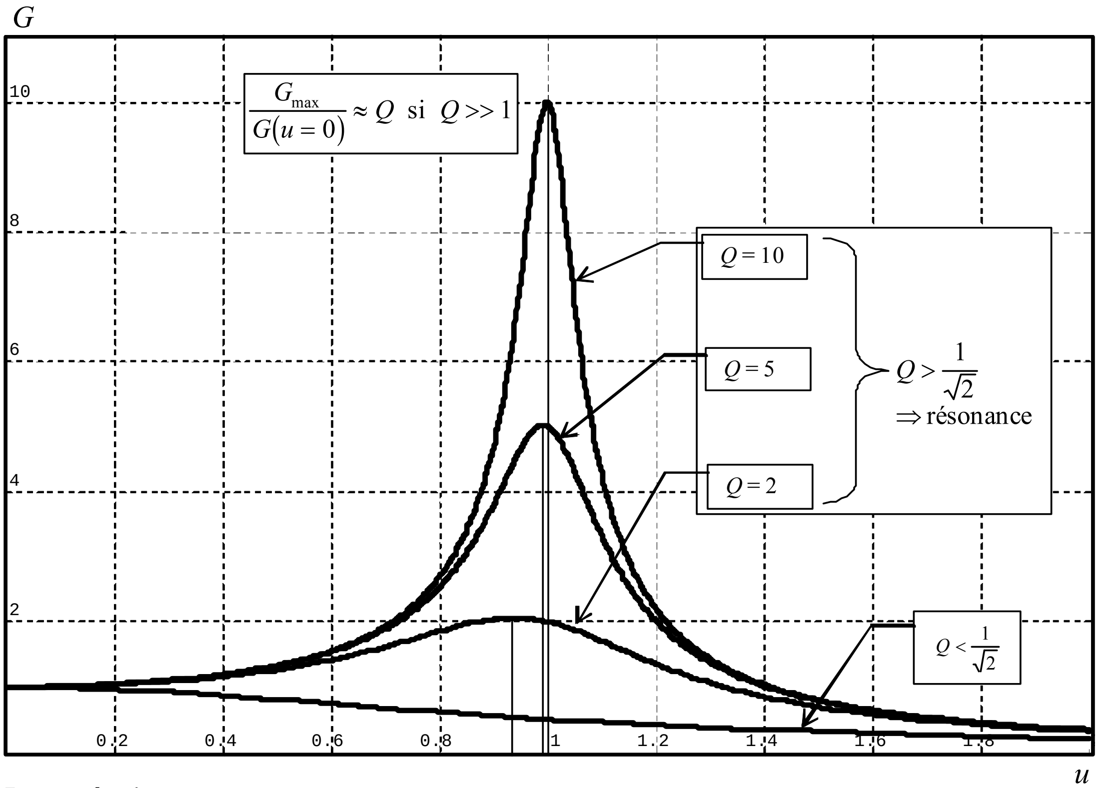
- Si $Q \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$: $\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u} < 0$. G est toujours décroissante.

  $G(0) = 1$, $G(1) = Q$ et si $u \to \infty$, $G \to 0$.

- Si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$: $\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u}$ s'annule pour $u = 0$ et $u = u_R = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$.

  G passe par un maximum pour $u = u_R$.

  $$G_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2} + Q^2\left(\dfrac{1}{2Q^2}\right)}} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$$



Interprétation :

- On a une **résonance en tension** si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. La pulsation réduite de résonance u_R est inférieure à 1 donc $\boxed{\omega_R < \omega_0}$.

  Si Q est très grand (en pratique[3] $Q > 5$), alors $u_R \approx 1$, soit $\boxed{\omega_R \approx \omega_0}$ et $\boxed{\dfrac{G_{\max}}{G(u=0)} \approx Q}$. Ce résultat se généralise si $G(u=0) \neq 1$. Q s'appelle aussi le facteur de surtension. Il faut prendre des précautions en TP puisqu'on peut avoir une tension supérieure à la tension de claquage du condensateur !
- La courbe présente une **tangente horizontale en 0**.
- Si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on peut définir la **bande passante à –3 dB**. On a deux pulsations ω_1 et ω_2 pour lesquelles $\boxed{G(\omega_1) = G(\omega_2) = \dfrac{G_{\max}}{\sqrt{2}}}$. La bande passante est : $\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1}$. On peut montrer que $\boxed{\text{si } Q >> 1, \Delta\omega \approx \dfrac{\omega_0}{Q}}$. Le circuit est d'autant plus sélectif (bande passante étroite) que le facteur de qualité est grand (résistance petite).

  Pour Q = 1, on a un maximum peu contrasté : **<u>résonance floue</u>** alors que Q très grand devant 1, on a une **<u>résonance aigue</u>**.

[3] $1/(4Q^2)=1/100$. Cela revient à négliger 1/100 devant 1.

II.4 Étude de la phase de la sortie par rapport à l'entrée

La fonction de transfert est : $\underline{H}(ju) = \dfrac{1}{1-u^2+j\dfrac{u}{Q}}$.

Le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée est : $\varphi = \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right) = -\arg\left(\left(1-u^2\right)+j\dfrac{u}{Q}\right)$.

a) Étude simplifiée du déphasage

- Si $u \to 0$, $\underline{H}(ju) \approx 1$, donc $\varphi \to 0$
- Si $u \to \infty$, $\underline{H}(ju) \approx \dfrac{1}{-u^2}$ donc $\varphi \approx -\pi$ ou π. Comment conclure ? La partie réelle du dénominateur $\approx -u^2$.

  La partie imaginaire du dénominateur $\approx \dfrac{u}{Q}$. L'argument du dénominateur est compris entre $\dfrac{\pi}{2}$ et π. Comme φ est l'opposé de l'argument du dénominateur, on a $\boxed{\varphi \approx -\pi}$.
- Si $u = 1$, $\underline{H}(ju) = 1$, donc $\varphi = 0$

b)Étude complète

$$\tan\varphi = -\frac{\dfrac{u}{Q}}{1-u^2} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = -\frac{\dfrac{u}{Q}}{\sqrt{\left(1-u^2\right)^2+\left(\dfrac{u}{Q}\right)^2}}$$

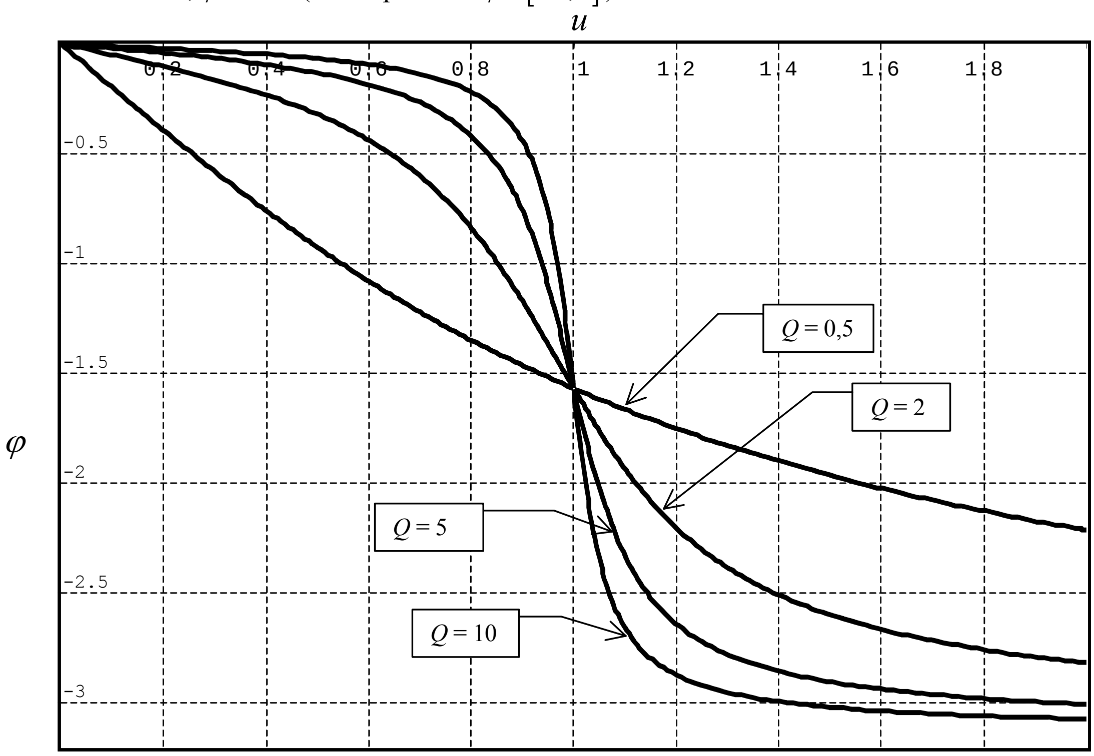
sin $\varphi < 0$, donc $\varphi \in [-\pi, 0]$

Pour étudier la dérivée de φ par rapport à u, il est plus simple de dériver tan φ.

$$\frac{\mathrm{d}(\tan\varphi)}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} = -\frac{1}{Q}\frac{\left(1-u^2\right)+2u^2}{\left(1-u^2\right)^2} = -\frac{1}{Q}\frac{\left(1+u^2\right)}{\left(1-u^2\right)^2} < 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} < 0$$

La fonction est donc décroissante.

- si $u << 1$, $\varphi \to 0$
- si $u >> 1$, $\varphi \to -\pi$ (et non pas π car $\varphi \in [-\pi, 0]$)



On a toujours $\varphi < 0$, **la tension de sortie est donc toujours en retard de phase par rapport à la tension d'entrée**.