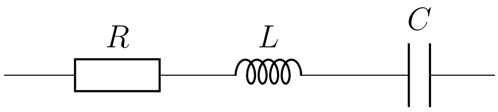
Mohamed El Founani
Lycée Ibn Maja

2$^{\text{ème}}$ année baccalauréat
Série Sciences Physiques

Les oscillations libres dans un circuit RLC série :

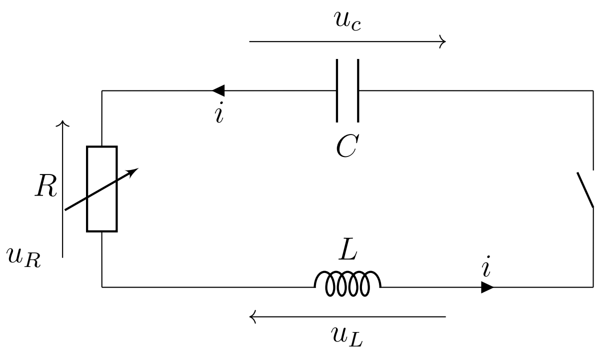
On appelle (RLC) l'association série d'un conducteur ohmique pur de résistance R, une bobine pure d'inductance L et d'un condensateur de capacité C.
Même si la bobine a une résistance interne r la nomination (RLC) reste valable.



Décharge d'un condensateur dans une bobine :

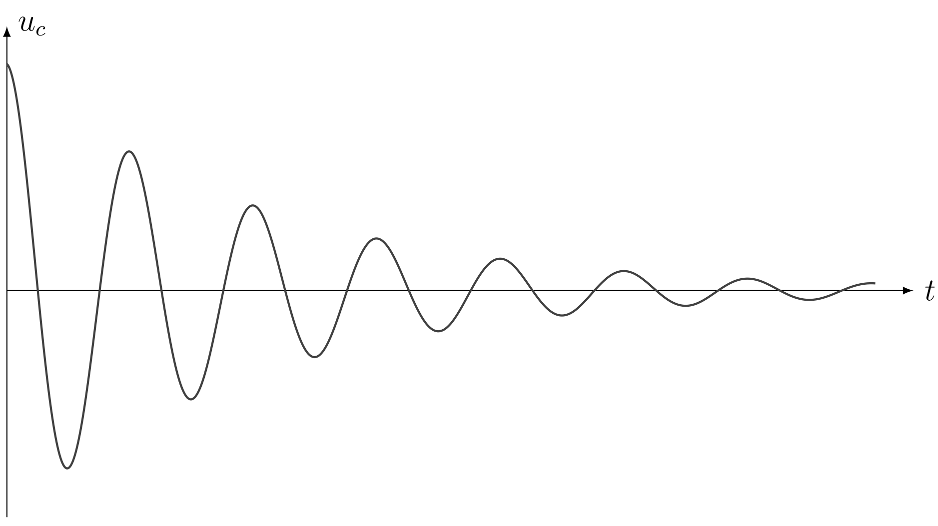
Étude expérimentale :

Un condensateur chargé de capacité C est monté en série avec une bobine idéale d'inductance L et une résistance R, dont la valeur est variable. On ferme l'interrupteur et on visualise sur un oscilloscope, les courbes correspondants de la tension aux bornes du condensateur.

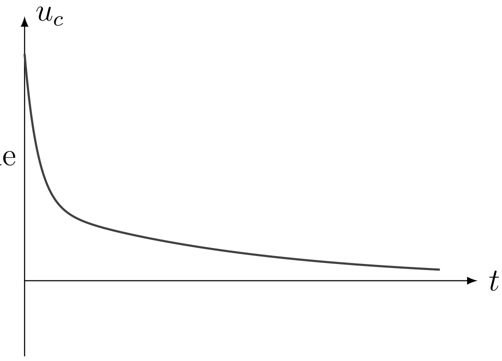


On varie la résistance R du dipôle (RLC).

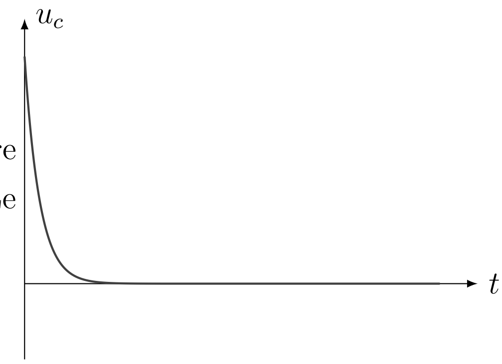
Lorsqu'elle est faible le régime est dit **périodique amorti** ou bien **pseudopériodique**.



Lorsqu'elle est grande, l'amortissement est trop élevée, le régime est dit **apériodique** ou **sous-critique**.



Lorsque $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, on est à la limite de séparation entre les deux régimes, périodique amorti et apériodique. Le régime est dit **critique**.



Facteur de qualité d'un dipôle (RLC) :

Un paramètre sans dimension soit noté Q, est appelé facteur de qualité du dipôle, il permet de séparer quantitativement ces régimes. Celui-ci peut s'exprimer en fonction des constantes de temps $\tau_L = \dfrac{L}{R}$ et $\tau_c = RC$ des dipôles RL et RC déjà étudiés :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\tau_L}{\tau_c} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{L}{R}}{RC}} \\ &= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned}$$

La résistance critique, $R_c = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, correspond à $Q = 0,5$.

La valeur de Q détermine les régimes libres d'un dipôle (RLC) :

. $Q > 0,5$ le régime est **périodique amorti**.
. $Q = 0,5$ le régime est **critique**.
. $Q < 0,5$ le régime est **apériodique**.

Remarque :

La grandeur Q représente l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations pratiquement observables.

Étude théorique :

Équation différentielle :

D'après la loi d'additivité des tensions, on a :

$$\begin{aligned} u_L + u_c + u_R &= 0 \\ L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{q}{C} &= 0 \\ L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} &= 0 \end{aligned}$$

Donc l'équation différentielle vérifiée par la charge q portée par le condensateur est donnée par :

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0$$

Avec $q = Cu_c$, on aura :

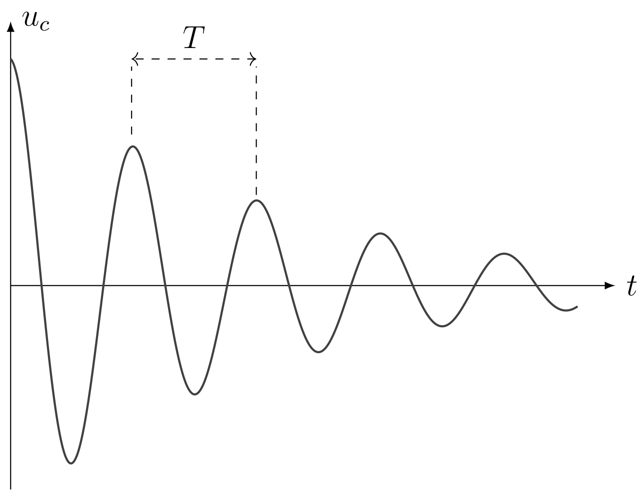
$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c = 0$$

Autrement :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_c = 0$$

C'est l'équation différentielle vérifiée par la tension u_c entre les bornes du condensateur.

La pseudo-période :



La **pseudo-période** est l'intervalle de temps qui sépare deux maximas consécutifs des oscillations pseudo-périodiques amorties.

Interprétation énergétique :

Transfert d'énergie entre le condensateur et la bobine - Effet Joule :

L'énergie totale dans le circuit (RLC) est donnée par :

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m + \mathscr{E}_e = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

Dérivons par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\left(L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{q}{C}\right)$$

Et on sait que :

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0$$

Donc :

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{q}{C} = -R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Par suite :

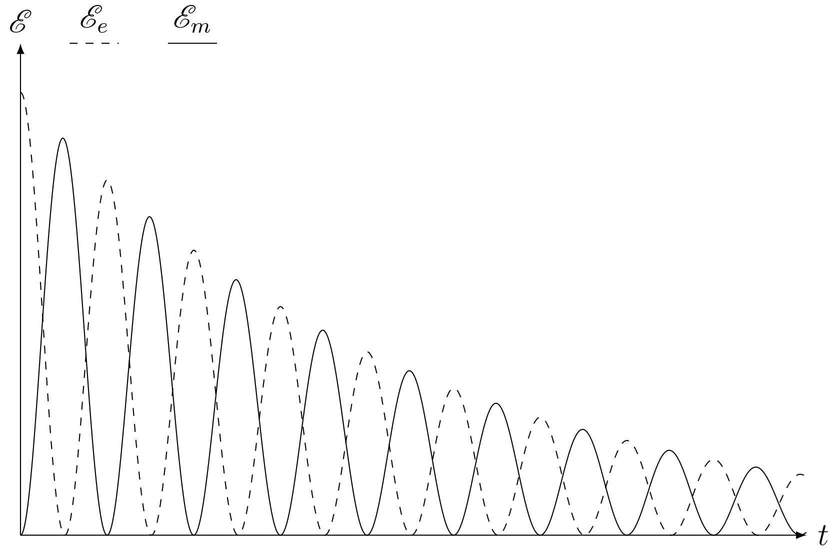
$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -R\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Finalement :

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = -Ri^2\mathrm{d}t$$

Effet Joule :

Les oscillations libres dans un circuit (RLC) sont caractérisés par des pertes d'énergie par effet Joule dans la résistance, ceci se traduit par un amortissement des oscillations :



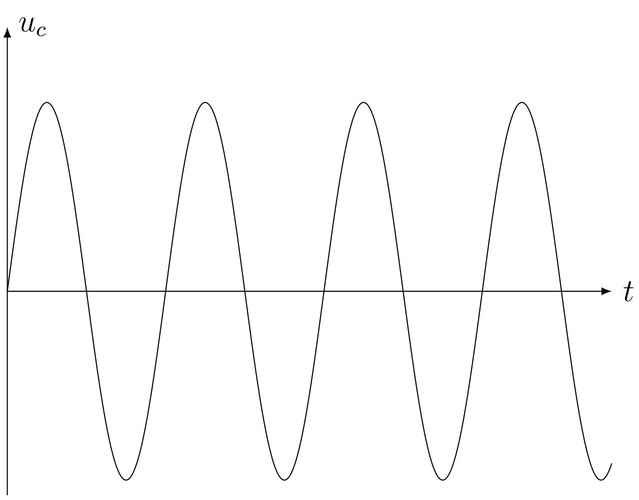
Étude analytique dans le cas d'un amortissement faible :

Le dipôle LC :

Le dipôle LC correspond au cas limite du dipôle RLC où la résistance est nulle : **Les oscillations libres ne sont plus amorties**.
On s'approche au mieux du régime oscillant non amorti en associant en série une bobine d'inductance L grande, de résistance r très petite et un condensateur de capacité C faible, afin d'avoir un grand facteur de qualité.

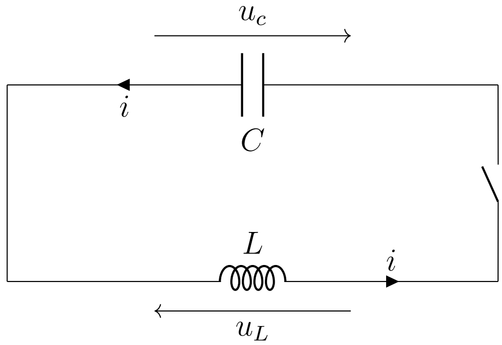
Étude expérimentale :

Avec le montage connecté à un oscilloscope, on peut mettre en évidence les oscillations libres d'un dipôle LC en série.
On obtient sur l'écran de l'oscilloscope, la tension u_c aux bornes du condensateur.



Étude théorique :

Équation différentielle :



On sait que : $u_L + u_c = 0$, en utilisant les relations nécessaires on aboutit à l'expression suivante :

$$L\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{L}u_c = 0$$

Les équations horaires :
La solution de la première équation différentielle est :

$$q = Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_0\right)$$

Dans cette équation :

$$\begin{cases} Q_m & \text{La charge maximale} \\ T_0 & \text{La période propre des oscillations non amorties} \\ \varphi_0 & \text{La phase à l'origine des dates} \end{cases}$$

En divisant la charge q par la capacité du condensateur C, on obtient l'expression de u_c :

$$u_c = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_0\right)$$

Et en dérivant la charge par rapport au temps t, on obtient l'expression de i :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_0\right)\right) \\ &= -Q_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_0\right) \\ i &= -I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_0\right) \end{aligned}$$

La période propre et la fréquence propre :
Dérivons pour la seconde fois l'expression de q :

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = -Q_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_0\right)$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 q \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 q = 0$$

Et on sait d'après l'équation différentielle que :

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Par suite la période propre est :

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Longleftrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

La fréquence propre est donc donnée par :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Énergie électrique totale d'un circuit (LC) :
L'énergie totale, à un instant t, dans un circuit (LC) est donnée par :

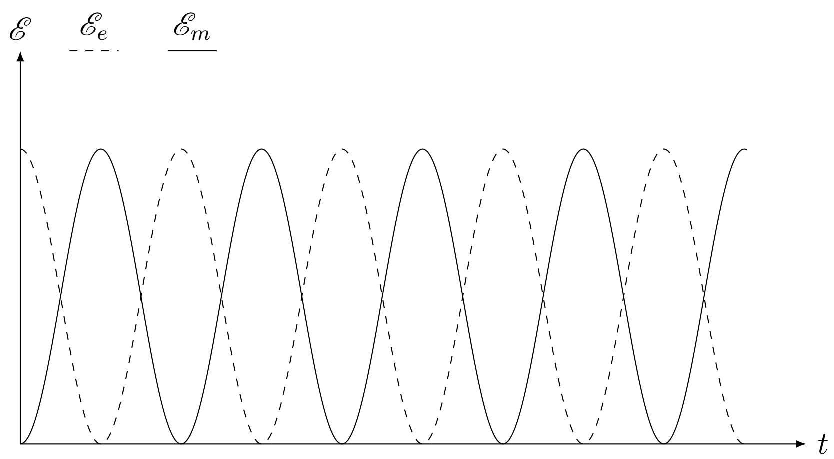
$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m + \mathscr{E}_e = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

Au cours des oscillations, dans le circuit (LC), l'une des deux formes d'énergie se transforme périodiquement en l'autre forme, la somme $\mathscr{E}$ restante constante.

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}LI_m^2 = \frac{1}{2}CU_m^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}$$

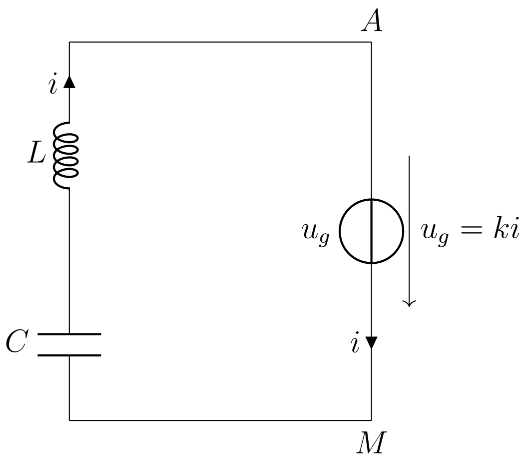
Disons alors que l'énergie totale d'un circuit comportant un condensateur et une bobine non résistive est constante.
Les courbes représentent l'évolution de chaque forme d'énergie en fonction de temps.
La période énergétique vaut la moitié de la période propre du circuit (LC) :

$$T = \frac{T_0}{2}$$



Entretien des oscillations :

Soit le circuit suivant :



Aux bornes (A, M) d'un circuit (rLC) plaçons un générateur fournissant à ses bornes une tension proportionnelle au courant qu'il délivre :

$$u_g = ki \qquad \text{où } k > 0 \text{ de valeur ajustable}$$

On branche un oscilloscope aux bornes d'un condensateur et on varie k.
Dès que $k = r$ où r la résistance interne de la bobine on observe des oscillations sur l'écran.

Interprétation :

On a d'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_g = u_L + u_c$$
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri + \frac{q}{C} = ki$$
$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + (r-k)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0$$
$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{q}{C} = 0 \qquad k = r$$

Or $q = Cu_c$ on aura :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + u_c = 0$$

Étude énergétique :

L'énergie diminue selon la loi suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} = -ri^2$$

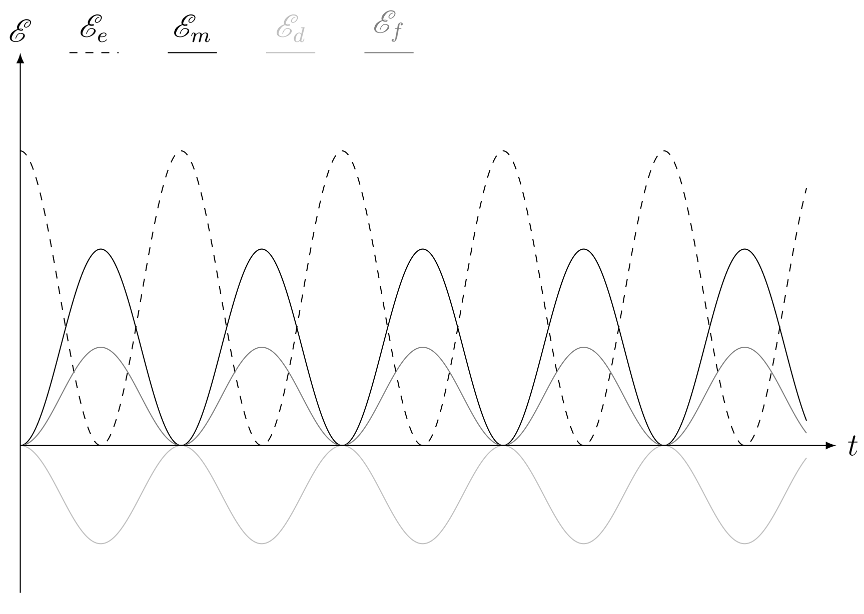
Qui exprime la puissance instantanée dissipée par effet Joule.
Le générateur introduit celle ci :

$$\mathscr{P} = -u_g i = -ki^2$$

Lorsque $k = r$ on aura :

$$\mathscr{P} = -ri^2$$

Ceci signifie que le générateur compense exactement l'énergie dissipée par effet Joule dans la bobine.
Le système entretenu se comporte énergiquement comme un circuit (LC) idéal.



$\mathscr{E}_e$ signifie l'énergie du condensateur (électrique), $\mathscr{E}_m$ l'énergie de la bobine (magnétique), $\mathscr{E}_d$ l'énergie dissipée dans la bobine et $\mathscr{E}_f$ l'énergie fournie par le dispositif d'entretien.