Résumé de cours **sur les espaces vectoriels**

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

Espaces vectoriels

1) loi de composition externe

Soit E et A deux ensembles non vides. Toute application :

$f : A\times E \to E$
$(\alpha;x)\mapsto f(\alpha;x)$ S'appelle Une loi de composition

externe sur E a coefficients dans A

l'élément : $f(\alpha;x)$ dans E s'appelle la composée de α et

x dans l'ordre par cette lois de composition externe f et

on le note : $\alpha.x$ ou αx au lieu de : $f(\alpha;x)$

on général en prend : $A=\mathbb{R}$ ou $A=\mathbb{C}$ Ou A un corps

2) espace vectoriel

2-1) definition : Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$ et une loi de composition externe a coefficients dans $\mathbb{R}$: $\begin{array}{l} . : \mathbb{R}\times E \to E \\ (\alpha;x)\mapsto \alpha.x \end{array}$

Ont dit que $(E;*;.)$ est un espace vectoriel

Sur $\mathbb{R}$ ou espace vectoriel reel si les lois vérifient les propriétés suivantes :

(1) $(E;*)$ est un groupe commutatif

(2) $\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\ \ \forall x\in E\ \ (\alpha+\beta)x=\alpha x*\beta x$

(3) $\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\ \ \forall x\in E\ \ (\alpha\times\beta)x=\alpha(\beta x)$

(4) $\forall(x;y)\in E^2\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}\ \ \alpha(x*y)=\alpha x*\alpha y$

(5) $\forall x\in E\ \ 1x=x$

On appelle les éléments de E des vecteurs on les notes $\vec{x}$ ou simplement x

les éléments de $\mathbb{R}$ seront appelés des scalaires.

pour $(E;*)$ l'lément neutre on le note : $\vec{0}$ ou 0_E ou simplement 0

2-2) Exemples d'espaces vectoriels :

a) L'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

$(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel

b) (Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$).E = $\mathbb{R}^2$
Un élément u ∈ $\mathbb{R}^2$ est donc un couple (x, y)
avec x élément de $\mathbb{R}$ et y élément de $\mathbb{R}$.

Ceci s'écrit : $\mathbb{R}^2=\{(x;y)/x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}\}$

$(\mathbb{R}^2;+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

c) L'espace vectoriel des polynômes de degrés inferieur a un entier naturel n se note : $\mathbb{R}_n[X]$.

$(\mathbb{R}_n[X];+;.)$ est un espace vectoriel Sur $\mathbb{R}$

d) L'ensemble des matrices carrées d'ordre3

On le note : $M_3(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}/(a;b;c;d;f;g;h;i)\in\mathbb{R}^9\right\}$

$(M_3(\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel Sur $\mathbb{R}$

De même : $(M_2(\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

e)L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
f)l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,... est un espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$
g) C est un R-espace vectoriel

2-3) Autre notations : $(E;+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou espace vectoriel reel si les lois vérifient les propriétés suivantes :

(1) $(E;+)$ est un groupe commutatif

(2) $\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\ \ \forall\vec{x}\in E\ \ (\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$

(3) $\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\ \ \forall\vec{x}\in E\ \ (\alpha\times\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x})$

(4) $\forall(\vec{x};\vec{y})\in E^2\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}\ \ \alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$

(5) $\forall\vec{x}\in E\ \ 1\vec{x}=\vec{x}$

2-4) Règles de calculs dans un espace vectoriel

Soit $(E;+;.)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$\forall(\vec{x};\vec{y})\in E^2$ et $\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ on a : 1) $0\vec{x}=\vec{0}$

2) $\alpha\vec{0}=\vec{0}$ 3) $-1\vec{x}=-\vec{x}$ 4) $(-\alpha)\vec{x}=\alpha(-\vec{x})=-(\alpha\vec{x})$

5) $\alpha(\vec{x}-\vec{y})=\alpha\vec{x}-\alpha\vec{y}$ 6) $(\alpha-\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}-\beta\vec{x}$

7) $\alpha\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{0}$ ou $\alpha=0$

L'opération qui à $(\vec{x};\vec{y})$ associe $\vec{x}-\vec{y}$ s'appelle la soustraction. Le vecteur $\vec{x}+(-\vec{y})$ est noté $\vec{x}-\vec{y}$.

3) Sous-espace vectoriel

3-1)Définition: Soit (E,+,.) un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et F un sous-ensemble de E.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si (F,+,.) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (donc pour les mêmes lois que celles de E, ou plus précisément pour les lois induites dans F par celles de E).

3-2)Théorème: (caractérisation d'un sous-espace vectoriel)
Soit (E,+,.) un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F un ensemble. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si : • F est inclus dans E,
• F est non vide,
• F est stable par combinaison linéaire cad ::

$\forall (x,y)\in F^2, \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, (\lambda.x+\mu.y)\in F$.

4) combinaison linéaire

4-1) Soit (E,+,.) un -espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Soit une famille de n vecteurs : $\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$ de E.

Une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille est un vecteur $\vec{x}$ de E qui s'écrit :

$\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$, où les α_i sont des scalaires (réels) qui s'appelles les coefficients de la combinaison linéaire
ont dit aussi que vecteur $\vec{x}$ est engendré par la famille de vecteurs : $(x_i)_{1\le i\le n}$

4-2) espace vectoriel engendré par une famille

E étant un espace vectoriel réel

Soit B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) une famille de vecteurs de E. Ont dit que la famille B engendre E ssi

$\forall\vec{x}\in E\ \exists(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ Tel que :

$\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$

4-3) Sous-espace engendré par une famille

a) Soit { $\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$ } un ensemble fini de vecteurs d'un R-espace vectoriel E. Alors :

• L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs { $\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$ } est un sous-espace vectoriel de E.

• C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs
{ $\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$ }

Notation. Ce sous-espace vectoriel est appelé sous-espace engendré par { $\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$ } et est noté Vect($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$).

On a donc : $\vec{x}\in$ Vect ($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) $\Longleftrightarrow$ il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tels que : $\vec{x}=\lambda_1\vec{x}_1+\cdots+\lambda_n\vec{x}_n$

b)Plus généralement, on peut définir le sous-espace vectoriel engendré par une partie V quelconque (non nécessairement finie) d'un espace vectoriel : VectV est le plus petit sous-espace vectoriel contenant V .

c) E étant un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et $\vec{x}_1$ un élément de E

l'ensemble Vect($\vec{x}_1$) = $\{\lambda\vec{x}_1 \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $\vec{x}_1$. Il est souvent noté $\mathbb{R}\vec{x}_1$. Si $\vec{x}_1$ n'est pas le vecteur nul, on parle d'une droite vectorielle.

4-4) Familles libres ; Familles libres

a)Soient (E, +, .) un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soient n un entier naturel non nul

La famille B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) $\in E^n$ est liée (ou encore les vecteurs $\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$ sont linéairement dépendants) si et seulement si $\exists(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$

$/\ \vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=\vec{0}$ et $(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)\neq(0;0;...;0)$

Une relation du type : $\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_n\vec{x}_n = \vec{0}$ avec $(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n) \neq (0;0;...;0)$ s'appelle une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs $\vec{x}_i$ .et La famille B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) est libre (ou encore les vecteurs $\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$ sont linéairement indépendants) si et seulement si $\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_n\vec{x}_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

b) La famille B est dite liée ssi elle n'est pas libre.

c) Soit (E,+,.) un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et

B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) $\in E^n$ une famille de vecteurs de E.

La famille est liée ssi l'un des vecteurs de cette famille s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

d)Si une famille comporte le vecteur nul ou deux fois le même vecteur, la famille est liée.

e)Si une famille B est liée alors toute famille qui contient la famille B est une famille liée.

f) Si une famille B est libre alors toute partie de cette famille est une famille libre.

g) Si une famille B est libre alors les vecteurs de cette famille sont non nuls

5) base d'un espace vectoriel

5-1)Soit (E,+,.) un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) une famille de vecteurs de E est une base Si et seulement si tout élement de E s'exprime de facon unique sous forme d'une combinaison lineaire des élément de B

Cad $\forall \vec{x} \in E \;\; \exists!(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ Tel que :

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_n\vec{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{x}_i$$

Le :$(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)$ s'appelle les coordonnées de $\vec{x} \in E$ dans la base B et on écrit : $\vec{x} = (\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)_{(B)}$

2) Soit (E,+,.) un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

et B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) une base de E et $\lambda \in \mathbb{R}$

a)si $(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)$ sont les coordonnées de $\vec{x} \in E$ et $(\beta_1;\beta_2;...;\beta_n)$ sont les coordonnées de $\vec{y} \in E$ dans la base B alors : $(\alpha_1+\beta_1;\alpha_2+\beta_2;...;\alpha_n+\beta_n)$sont les coordonnées de $\vec{x}+\vec{y}$ dans la base B et $(\lambda\alpha_1;\lambda\alpha_2;...;\lambda\alpha_n)$ sont les coordonnées de $\lambda\vec{x}$ dans la base B

b) B est une base de E si et seulement si c'est une famille libre et génératrice de E.

5-2) dimension d'un espace vectoriel reel

5-2-1) Soit (E,+,.) un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Si E admet une base comportant un nombre fini de n vecteurs $(n \in \mathbb{N}^*)$, on appelle dimension de E le nombre n qui est donc le même pour toutes les bases de E et on écrit : $\dim E = n$

5-2-2) Soit (E,+,.) un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

1)si $\dim E = 2$ et R=$(\vec{i};\vec{j})$) une base de E

a)la famille $B = (\vec{u}_1;\vec{u}_2)$ est une base de E ssi elle est libre .

b)Si : $\vec{u}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{u}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ Et $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$

alors $B = (\vec{u}_1;\vec{u}_2)$ est libre

2) si $\dim E = 3$ et R=$(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$) une base de E

a)la famille $B = (\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$ est une base de E si et seulement si elle est libre .

b) Si : $\vec{u}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ et $\vec{u}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

et $\vec{u}_3 = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$

Et $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$ alors $B = (\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$ est libre

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien