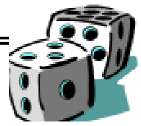
Cours de probabilités



I. RAPPELS :

Activité1 : Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués.
Combien Ya-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

Solution : Notons E ; H, M et S les ensembles constitués respectivement des employés, des employés hommes, des employés mariés, des employés syndiqués.
L'énoncé donne:
card(E)=800, card(H)=300, card(S)=352, card(M)=424, card(H∩S) =188, card(H∩M) =166 card(S∩M) =208, card(H∩M∩S) =144

On cherche : $card\left(\overline{H}\cap\overline{M}\cap\overline{S}\right)$

où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E .
D'après les lois de Morgan
$card\left(\overline{H}\cap\overline{M}\cap\overline{S}\right)=card\left(\overline{H\cup M\cup S}\right)$ On applique la formule du crible de Poincaré :
card(H∪M∪S)=card(H)+card(M)+card(S)−card(H∩M)−card(H∩S)−card(M∩S)+card(H∩M∩S)

On en déduit :
card(H∪M∪S)=658

$card\left(\overline{H}\cap\overline{M}\cap\overline{S}\right)=800-658=142$

Il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées

Activité2 : Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7.
On tire 2 boules de l'urne simultanément
1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair ?
3. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair ?

Solution :1) Il s'agit clairement d'une situation de combinaisons puisque chaque tirage est une permutation de 2 éléments dans un ensemble de 7 éléments (simultanément) donc le nombre de tirages possibles est : $C_7^2=\frac{A_7^2}{2!}=\frac{7\times 6}{2\times 1}=21$

2)pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair il suffit de tirer 2 boules pairs **ou** tirer 2 boules impairs
Donc : le nombre est :

$$C_4^2+C_3^2=\frac{A_4^2}{2!}+\frac{A_3^2}{2!}=\frac{4\times 3}{2\times 1}+\frac{3\times 2}{2\times 1}=6+3=9$$

Car il ya 3boules pairs et 4boules impairs

3) pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair il suffit de tirer une boule paire **et** tirer une boule impaire :
Donc : le nombre est : $C_4^1\times C_3^1=4\times 3=12$

Activité3 : Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.
1)1-1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
1-2) Combien Ya-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
1-3) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4?
1-4) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4?
2)Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
2-1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
2-2) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
2-3) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6?

Solution :1)1-1) Il y a 9^3=9×9×9=729 codes possibles.
1-2) Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2,4,6,8). Il y a donc 9×9×4=324 tels codes.
1-3) On va compter par différence. Il y a 8×8×8 codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc 9×9×9−8×8×8=217codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.
1-4) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc 3×8×8=192 tels codes.

2) 2-1)On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc 9×8×7= 504 choix possibles

2-2) Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc 8×7×5=280 tels codes

2-3) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de 8×7×3=168.

II. Vocabulaire des probabilités

1)Le lancer d'une pièce de monnaie, le lancer d'un dé bien équilibré. … sont des expériences aléatoires, car avant de les effectuer, on ne peut pas prévoir avec certitude quel en sera le résultat Le résultat dépend en effet du hasard.

2)A cette expérience aléatoire, on associe l'ensemble Ω des résultats possibles appelé univers. Ses éléments sont appelés éventualités.

Dans le cas d'un lancer de dé à 6 faces :

Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.

Le nombre d'éléments distincts de Ω est appelé le cardinal de Ω, on le note : Card(Ω)=6

3)Un évènement correspond à une partie de l'univers. A = {2 ; 4 ; 6} est l'évènement A « obtenir un nombre pair ».

Les événements formés d'un seul élément sont appelés événements élémentaires.

EX : E « obtenir 6 ».

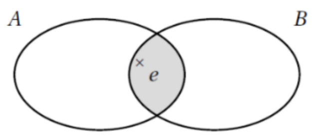
E = {6} est un évènement élémentaire

Pour que l'évènement soit réalisé, il faut que l' éventualités de l'expérience soit un élément de L'évènement.

A est réalisé si éventualités de l'expérience est : 2, 4 ou 6.

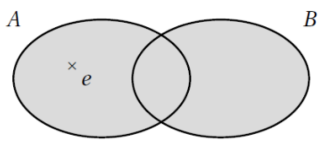
L'évènement B : obtenir un nombre multiple de 3 avec un dé à 6 faces est B = {3 ; 6} (Card(B)=2)

4)a) L'événement formé des éventualités qui sont dans A et dans B est noté A ∩ B et se lit :



A inter B. on a: A ∩ B= {6} =E (Card(E)=1)

b) La réunion de deux évènements A et B est L'évènement constitué des éventualités qui Réalisent l'évènement A ou l'évènement B.



On note A ∪ B et on lit A union B

A ∪ B= {2 ; 3 ; 4 ; 6}

d)L'évènement C : « obtenir un nombre multiple de 5 avec un dé à 6 faces est C = {5} est Incompatible avec l'évènement A car A∩ C = ∅

e) L'évènement G : « obtenir un nombre supérieur a 0». avec un dé à 6 faces est :

G = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} = Ω

L'événement G =Ω est l'événement certain.

f) L'évènement M : « obtenir un nombre supérieur a 7 ». avec un dé à 6 faces est :

M = ∅

L'événement M = ∅ (L'ensemble vide) est l'événement impossible

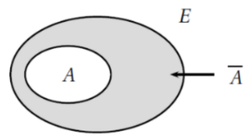
g) L'évènement : N « ne pas obtenir un nombre pair ». Avec un dé à 6 faces est : N = {1 ; 3 ; 5}

L'évènement : N on le note : N = $\overline{A}$ on dit que

$\overline{A}$ = {1 ; 3 ; 5} est L'évènement contraire de L'évènement A.

Remarque : L'événement contraire $\overline{A}$ est l'ensemble de tous les éléments de Ω qui ne se trouvent pas dans A

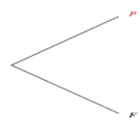
.Autrement dit on a :



$A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Concrètement , cela signifie que si l'événement A n'est pas réalisé , l'événement contraire $\overline{A}$ est nécessairement réalisé

Exemple : on lance une pièce 2 fois de suite. Soit elle tombe sur pile, soit sur face.



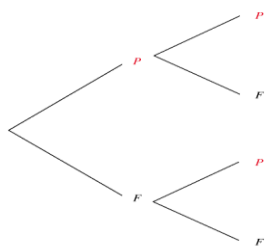
1)Au premier lancé, on a : P ou F

Donc : $\Omega_1 = \{P;F\}$

$card(\Omega_1) = 2$ (Deux éventualités)

(L'arbre des choix)

2) Au suivant, chacune des branches se redivise en 2 :



PP est une éventualité
FF est une éventualité
FP est une éventualité
PF est une éventualité

Donc : $\Omega_2 = \{PP;FF;PF;FP\}$ l'univers

$card(\Omega_2) = 4$

$card(\Omega_2) = 2 \times 2 = 4$

(Principe multiplicatif *du dénombrement)*

1ere fois	2ere fois
2	2

III. La probabilité d'un événement

1) Lien entre fréquence et probabilité

Activité : On utilise un dé à 6 faces numérotées respectivement de 1 à 6.

Ouvrir un fichier Excel (classeur).

Dans la colonne A taper les nombres de 1 a 10000

Dans la cellule B_1, taper la formule :

=Ent(alea()∗6+1) et copier cette formule de B_1 à B_{10000} On trouve des nombres de 1 à 6 comme si on a lancé le dé 10000 fois

Dans la colonne C et dans la cellule C_1, taper la formule : *=NB.SI(B1;* $B_{1;6}$*)/* A_1 *et copier cette* formule de C_1 à C_{10000}

On trouve un tableau du type :

6	5	4	3	2	1	Le nombre
0,174	0,167	0,166	0,171	0,162	0,160	Fréquence du nombre

Question : Vers quelle valeur se dirigerait la fréquence du 5 dans le cas d'un échantillon de 100 000 valeurs ?

La probabilité d'un événement est la valeur vers laquelle tend la fréquence de cet événement pour un grand nombre de répétitions de l'expérience

Intuitivement : Dans notre lancé de dé, s'il n'est pas truqué, il y a autant de chance d'obtenir un 1, un 2, … ou un 6.

donc la probabilité d'obtenir un 5 en lançant un dé est $\frac{1}{6}$ (soit 0,167 ou 16,7%).

En effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les fréquences se rapprocheraient les unes des autres de façon encore plus évidente.

Résumé : Si on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire,

la fréquence de réalisation d'un événement A se stabilise autour d'un nombre : c'est la probabilité de cet événement. On le note p(A)

Exemple : Je jette un très grand nombre de fois une pièce sur le sol. On constate

que le nombre de "pile" obtenu est sensiblement égal au nombre de "face". J'ai

autant de chances d'obtenir "face" que "pile".

La probabilité de l'événement A :

"obtenir pile" est de 50% soit 0,5. On écrit p(A) = 0,5

2) la probabilité dans une situation équiprobable :

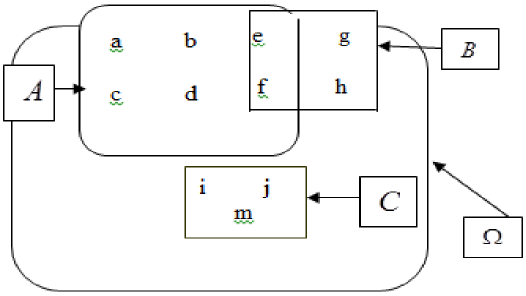
Situation équiprobable : Une situation équiprobable est une expérience où toutes les éventualités ont la même probabilité d'être réalisées

Proposition : Dans le cas d'une situation équiprobable, P(A) se calcule par :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$$

3)la probabilité et les opérations sur les évènements

Activité : le diagramme suivant représente la répartition des élèves d'une classe suivant leur préoccupation sportive



A Pratiquent le football

B Pratiquent le basket-ball

C Pratiquent le Rugby

On choisit au Hazard un élevé de cette classe

1)écrire en extension les évènements suivants :

A ; B ; C ; Ω ; $\overline{A}$; $\overline{C}$; $A\cap B$; $A\cup B$; $A\cap C$ et $A\cup C$

2)calculer : $P(A)$; $P(B)$; $P(C)$; $P(A\cap B)$; $P(A\cup B)$; $P(A\cap C)$; $P(A\cup C)$; $P(\overline{A})$; $P(\overline{C})$

3)comparer : $1-p(A)$ et $p(\overline{A})$

$1-p(C)$ et $p(\overline{C})$

4)a)verifier que : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

b) verifier que : $P(A\cup C)=P(A)+P(C)$

c) verifier que : $P(C)=P(\{i\})+P(\{j\})+P(\{m\})$

Solutions :1) $A=\{a;b;c;d;e;f\}$ et $B=\{e;f;g;h\}$

et $C=\{i;j;m\}$ et $\Omega=\{a;b;c;d;e;f;g;h;i;j;m\}$

$\overline{A}=\{g;h;i;j;m\}$ et $\overline{C}=\{a;b;c;d;e;f;g;h\}$

$A\cap B=\{e;f\}$ et $A\cup B=\{a;b;c;d;e;f;g;h\}$

Et $A\cap C=\varnothing$ et $A\cup C=\{a;b;c;d;e;f;i;j;m\}$

2) $p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{6}{11}$ et $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{4}{11}$

$p(C)=\frac{CardC}{Card\Omega}=\frac{3}{11}$ et $p(A\cap B)=\frac{Card(A\cap B)}{Card\Omega}=\frac{2}{11}$

$p(A\cup B)=\frac{Card(A\cup B)}{Card\Omega}=\frac{8}{11}$ et $p(A\cap C)=\frac{Card(A\cap C)}{Card\Omega}=\frac{0}{11}=0$

$p(A\cup C)=\frac{Card(A\cup C)}{Card\Omega}=\frac{9}{11}$ et $p(\overline{A})=\frac{Card\overline{A}}{Card\Omega}=\frac{5}{11}$

$p(\overline{C})=\frac{Card\overline{C}}{Card\Omega}=\frac{8}{11}$

3) $1-p(A)=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}=p(\overline{A})$

$1-p(C)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}=p(\overline{C})$

4)a) $P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{6}{11}+\frac{4}{11}-\frac{2}{11}=\frac{8}{11}=P(A\cup B)$

b) $P(A)+P(C)=\frac{6}{11}+\frac{3}{11}=\frac{9}{11}=P(A\cup C)$

c) $P(\{i\})+P(\{j\})+P(\{m\})=\frac{1}{11}+\frac{1}{11}+\frac{1}{11}=\frac{3}{11}=P(C)$

Propriétés :soit Ω univers d'une expériences aléatoires

1) La probabilité P(E) d'un événement E est telle : $0 \le P(E) \le 1$ et $P(\Omega)=1$ et $P(\varnothing)=0$

2) La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

3) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

4)La probabilité de l'événement contraire d'un événement A est : $p(\overline{A})=1-p(A)$

5)Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

6)Si deux événements A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple : On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

On considère les événements suivants :

A : « On obtient un nombre impair »

B : « On obtient un multiple de 3 »

Calculer la probabilité de l'évènement $A\cup B$.

Solution : $p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ et $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$A\cap B$ est l'événement élémentaire :

« On obtient un 3 », donc : $A\cap B=\{3\}$

$p(A\cap B)=\frac{Card(A\cap B)}{Card\Omega}=\frac{1}{6}$

On a : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Donc : $P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Exercice1 :

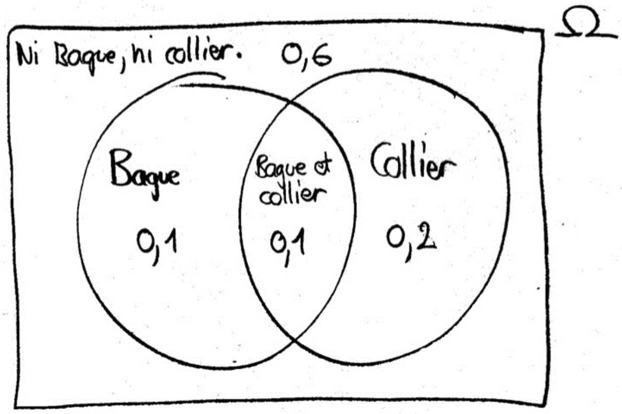
60% des élèves d'une école ne portent ni bague ni collier. 20% portent une bague et 30% ont un collier.

Si un des élèves est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il porte :

a) une bague ou un collier ?

b) une bague et un collier ?

Solution : Le diagramme de la situation est :



D'où on tire facilement qu'un élève tirer au hasard porte "une bague ou un collier" avec une probabilité de 0.4 et "une bague et un collier" avec une probabilité de 0.1.

On peut également résoudre le problème en utilisant l'algèbre des ensembles, soit les probabilités :

i) P(B)= probabilité de "porter une bague" = 0.20,

ii) PC) = probabilité de "porter un collier" = 0.30,

iii) $P(\overline{B} \cap \overline{C})$ = probabilité de l'événement "ne porte pas de bague et ne porte pas de collier (ni bague, nicollier) = 0.60.

a) On applique la loi de Morgan à l'événement $P(\overline{B} \cap \overline{C})$), ce qui donne :

$P(\overline{B} \cap \overline{C})$) = $P(\overline{B\cup C})$

c = 0.6 donc $P(\overline{B\cup C})= 1- P(B \cup C)$

c = 1−0.6 = 0.4

b) $P(B \cup C) = P(B)+ P(C)- P(B \cap C)$

$P(B \cap C) = P(B)+ P(C)- P(B \cup C)$

$P(B \cap C) = 0.2+0.3-0.4 = 0.1$

Exercice2: dans une classe de terminale 54% ont declarer aimer le foot et 32% ont declarer aimer le basquette et 15% ont declarer aimer les deux sports
On choisie au hasard un éleve de cette classe.
Quelle est la probabilité des evenements suivants
1) E_1 « l'éléve aime le foot mais pas le basquette»
2) E_2 «l'élève aime le foot ou le basquette ou les deux a la fois»
3) E_3 «l'élève aime une seule sport»
4) E_4 « l'éléve n'aime ni le foot ni basquette »

Solution :1)
On note Ω l'univers l' ensemble des éléves de la classe. Il y a équiprobabilité . On considére les événements suivants :
F « l'éléve aime le foot »
B « l'éléve aime le basquette »
On a donc : $p(F)=0,54$ et $p(B)=0,32$
et $p(F\cap B)=0,15$
on utilisant un diagramme on vérifie que :
$E_1=F\cap\bar{B}$: les éléves qui aiment le foot mais pas le basquette

On remarque que : $\begin{cases} F=(F\cap\bar{B})\cup(F\cap B) \\ (F\cap\bar{B})\cap(F\cap B)=\varnothing \end{cases}$

Donc : $p(F)=p(F\cap\bar{B})+p(F\cap B)$
Donc : $p(F\cap\bar{B})=p(F)-p(F\cap B)$
Donc : $p(F\cap\bar{B})=0,39$ donc : $p(E_1)=0,39$
2) On a : $E_2=F\cup B$
donc : $p(E_2)=p(F\cup B)=p(F)+p(B)-p(F\cap B)$
donc : $p(E_2)=0,71$
3) On a : $E_3=(F\cap\bar{B})\cup(\bar{F}\cap B)$ et $(F\cap\bar{B})\cap(\bar{F}\cap B)=\varnothing$
Ainsi : $p(E_3)=p(F\cap\bar{B})+p(\bar{F}\cap B)$
Et puisque : $p(\bar{F}\cap B)=p(B)-p(B\cap F)$
Alors : $p(\bar{F}\cap B)=0,17$ donc : $p(E_3)=0,56$
4) On a : $E_4=\overline{F\cup B}$
$p(E_4)=p(\overline{F\cup B})=1-p(F\cup B)=0,29$

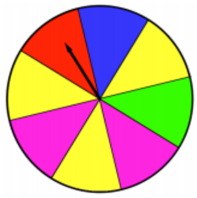
4) loi de probabilité

Supposons une expérience aléatoire ayant un nombre d'éventualités n. Les éventualités seront notées $e_1,e_2,e_3,\dots\dots.e_n$
L'univers Ω de l'expérience sera :
$\Omega=\{e_1,e_2,e_3,\dots\dots.e_n\}$

Définition : Une loi de probabilité est définie par un l'ensemble $\Omega=\{e_1,e_2,e_3,\dots\dots.e_n\}$ et des probabilités correspondantes.
La somme de toutes les probabilités est égale à 1. On peut la définir sous forme de tableau.

éventualité	e_1	e_2	e_3	....	e_n
probabilités	$p(e_1)$	$p(e_2)$	$p(e_3)$	....	$p(e_n)$

Exemple : On lance la roue de loterie ci-contre et on observe la couleur désignée. On peut associer à ce jeu la loi de probabilité suivante :



éventualité	rouge	bleu	jaune	violet	vert
probabilités	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Dans notre loi de probabilité, la somme des probabilités est bien égale à 1 en effet :
$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1$

Application :
Exemple1 : Une urne contient 4 boules blanches indiscernables, 3noires, 5 rouges.
On tire simultanément trois boules de l'urne
1) déterminer :le nombre de tirages possibles : $card(\Omega)$
2) déterminer la probabilité des évènements suivants :
B" tirer trois boules blanches"
N "tirer trois boules noirs»
R "tirer trois boules rouges»
D "d'obtenir trois boules de couleurs différentes»
M" tirer trois boules de même couleur "
E" tirer 2 boules blanches seulement»

Solution :
1) $card(\Omega)=C_{12}^3$

$C_{12}^3=\frac{12!}{3!(12-3)!}=\frac{12!}{3!9!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{3!9!}=\frac{12\times11\times10}{3!}=\frac{6\times2\times11\times10}{6}=220$

2) $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{C_4^3}{28}=\frac{4}{28}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$

$p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}==\frac{C_3^3}{28}=\frac{1}{28}$; $p(R)=\frac{CardR}{Card\Omega}==\frac{C_5^3}{28}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$

$C_5^3=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times4\times3!}{2!3!}=\frac{5\times4}{2!}=10$

$p(D)=\frac{CardD}{Card\Omega}==\frac{C_3^1\times C_4^1\times C_5^1}{28}=\frac{3\times4\times5}{220}=\frac{15}{55}=\frac{3}{11}$

M est l'évènement contraire de D cad $M=\overline{D}$

Donc : $p(M)=p(\overline{D})=1-p(D)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}$

$p(E)=\frac{CardE}{Card\Omega}==\frac{C_4^2\times C_8^1}{220}=\frac{6\times 8}{220}=\frac{12}{55}$

Exemple2 : Une urne contient 4 boules blanches, et 5 noires.
On tire Successivement trois boules de l'urne au hasard et sans remise
1) déterminer :le nombre de tirages possibles : $card(\Omega)$
2) déterminer la probabilité des évènements suivants :
B" tirer trois boules blanches"
N "tirer trois boules noirs»
M" tirer trois boules de même couleur "
D "d'obtenir trois boules de couleurs différentes»
E" tirer 2 boules blanches seulement»

Solution :1) $card(\Omega)=A_9^3=9\times 8\times 7=504$

2) $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}==\frac{A_4^3}{504}=\frac{4\times3\times2}{9\times8\times7}=\frac{4\times3\times2}{3\times3\times8\times7}=\frac{1}{3\times7}=\frac{1}{21}$

1ere tirage	2ere tirage
B	$\overline{B}$

1ere tirage	2ere tirage
$\overline{B}$	B

$p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}=$

$\frac{A_5^3}{504}=\frac{5\times4\times3}{9\times8\times7}=\frac{5\times4\times3}{3\times3\times4\times2\times7}=\frac{5}{3\times2\times7}=\frac{5}{42}$

$p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}=\frac{A_4^3+A_5^3}{504}=\frac{4\times3\times2+5\times4\times3}{504}=\frac{24+60}{504}=\frac{84}{504}=\frac{1}{6}$

D est l'évènement contraire de M cad $D=\overline{M}$

Donc : $p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

Calcul de la probabilité de l'évènement E
On a 3 cas possibles :

1ere tirage	2ere tirage	3ere tirage
$\overline{B}$	B	B

1ere tirage	2ere tirage	3ere tirage
B	B	$\overline{B}$

1ere tirage	2ere tirage	3ere tirage
B	$\overline{B}$	B

$$p(E)=\frac{3A_4^2\times A_5^1}{9\times8\times7}=\frac{3\times4\times3\times5}{9\times8\times7}=\frac{5}{14}$$

Exemple3 : Une urne contient 3 boules blanches, et 4 noires.
On tire Successivement deux boules de l'urne au hasard avec remise
1) déterminer :le nombre de tirages possibles 2)
2)déterminer la probabilité des évènements suivants :
B" tirer deux boules blanches"
N "tirer deux boules noirs»
M" tirer deux boules de même couleur "
D "d'obtenir deux boules de couleurs différentes»
E" tirer une boule blanche seulement»

Solution :1) $card(\Omega)=7\times7=7^2=49$

2) $p(B)=\frac{CardB}{Card\Omega}=\frac{3\times3}{49}=\frac{9}{49}$

$p(N)=\frac{CardN}{Card\Omega}=\frac{4\times4}{7\times7}=\frac{16}{49}$

$p(M)=\frac{CardM}{Card\Omega}=\frac{3\times3+4\times4}{7\times7}=\frac{25}{49}$

D est l'évènement contraire de M cad $D=\overline{M}$

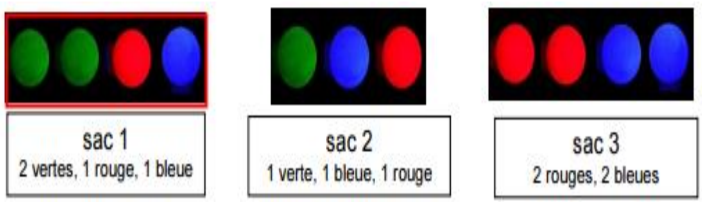
Donc : $p(D)=p(\overline{M})=1-p(M)=1-\frac{25}{49}=\frac{24}{49}$

Calcul de la probabilité de l'évènement E
On a 2 cas possibles

$p(E)=\frac{3\times4+3\times4}{42}=\frac{2\times3\times4}{7\times7}=\frac{24}{49}$

Types de tirages	Ordre	Répétitions d'éléments	Dénombrement
Successifs Avec remise	On tient compte	Un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p p-listes
Successifs Avec remise	de l'ordre	Un élément n'est tiré	A_n^p arrangements
Simultanés	L'ordre n'intervient pas	qu'une seule fois	C_n^p combinatoires

Exemple4 : (cas d'une expérience comportant plusieurs épreuves) :
Une expérience aléatoire est composée des trois épreuves suivantes :

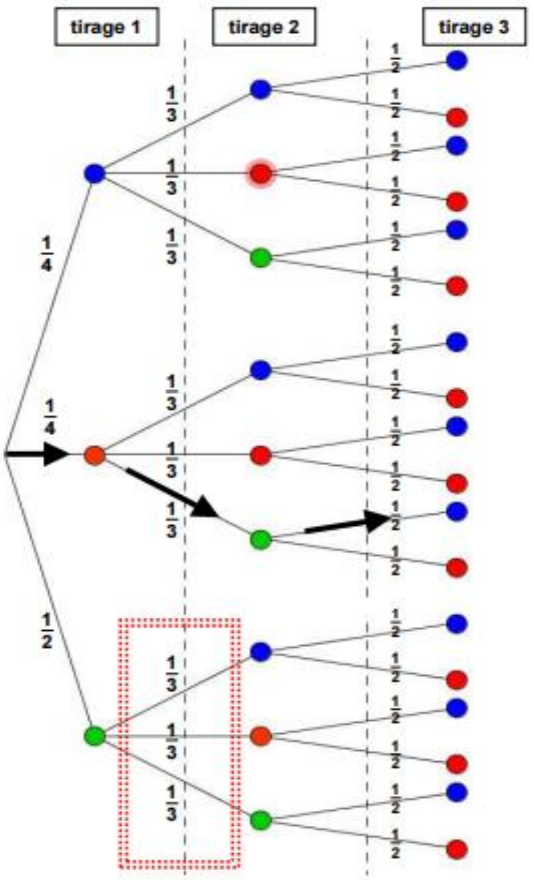


1)on tire au hasard une boule dans un premier sac et on note la couleur
2) on recommence avec un deuxième sac

3) on tire enfin une dernière boule dans le troisième sac

on range ensuite les trois boules par ordre de tirage dans une boîte.

Pour connaître les probabilités d'obtenir tel ou tel ordonnancement de couleur, on peut utiliser un arbre pondéré.



Remarque1 : la probabilité d'un évènement est le produit des probabilités rencontrées sur le "chemin" conduisant à cet événement.

Ex : La probabilité d'obtenir l'ordonnancement **rouge**, **vert**, **bleu** est obtenue ainsi :

$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$

Remarque2 : la somme des probabilités de Toutes les branches issues d'un même Nœud est égal à 1.

Ex : Observez la zone entourée de pointillés rouges. La somme des probabilités de chaque branche est : $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$

Remarque : Les expressions suivantes « dé équilibré ou parfait », « boule tirée de l'urne au hasard »,

« Boules indiscernables » … indiquent que, pour les expériences réalisées, le modèle associé est L'équiprobabilité.

Exercice :

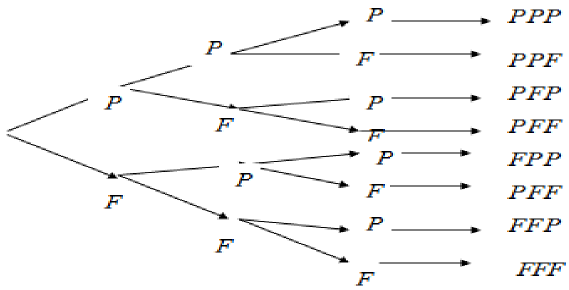
On jette une pièce de monnaie 3 fois de suite.

1) Donner la liste de tous les résultats possibles Ω_3 (exemple : PPF).(Dresser L'arbre des choix)Et calculer $card\left(\Omega_3\right)$

2) Donner la probabilité de événement suivant

A « le tirage ne comporte que deux Piles exactement».

Solution :1)



2) $\Omega=\{PPP;PPF;PFP;PFF;FPP;FPF;FFP;FFF\}$

$card\left(\Omega\right)=8$

1ere fois	2ere fois	3ere fois
2	2	2

Les tirages étant équiprobables, on a :

$p\left(A\right)=\frac{Card\,4}{Card\,\Omega}=\frac{3}{8}$

Exercice3: On lance deux fois de suite un dé équilibré.

1°) Représenter dans un tableau les 36 issues équiprobables.

2°) Calculer la probabilité des événements :

A : « on obtient un double » ; B : « on obtient 2 numéros consécutifs »

C : « on obtient au moins un 6 » ; D : « la somme des numéros dépasse 7 ».

Exercice4: On lance 4 fois de suite une pièce équilibrée.

1°) Dresser la liste des issues équiprobables.

2°) Quel est l'événement le plus probable :

A ou B ?

A : « 2 piles et 2 faces »

B : « 3 piles et 1 face »

Variables aléatoires

IV)Probabilité conditionnelle

Activité : Une urne contient 5 boules blanches :tel que 2 boules portent le numéro 1 et 3 boules portent le numéro 2

Et l'urne contient aussi 7boules noires dont 4 boules portent le numéro 2 et 3 boules portent le numéro 1 et toutes les Boules sont indiscernables
On tire de l'urne au hasard une Boule
On considére les événements suivants :
N « On obtient une Boule noire »
B « On obtient une Boule blanche »
U « La Boule porte le numéro 1 »
D « La Boule porte le numéro 2 »
1) Donner la probabilité des événements suivants :
B ; N ; U ; D ; $B\cap U$; $N\cap D$
2) a) sachant que La Boule tirée est blanche quelle est la probabilité pour qu'elle porte le numéro 1 on la note : $P_B(U)$
b)comparer : $P_B(U)$ et $\frac{P(B\cap U)}{P(B)}$
3) a) sachant que La Boule tirée est noire quelle est la probabilité pour qu'elle porte le numéro 2 on la note : $P_N(D)$
b)comparer : $P_N(D)$ et $\frac{P(D\cap N)}{P(N)}$
4) a) sachant que La Boule tirée porte le numéro 1 quelle est la probabilité pour qu'elle soit blanche on la note : $P_U(B)$
b)comparer : $P_U(B)$ et $\frac{P(U\cap B)}{P(U)}$

Solution :1) $card(\Omega)=12$; $P(D)=\frac{7}{12}$; $P(U)=\frac{5}{12}$

$P(B)=\frac{5}{12}$; $P(N)=\frac{7}{12}$; $P(B\cap U)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$P(N\cap D)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

2) a) $P_B(U)=\frac{2}{5}$ 2) b) $\frac{P(B\cap U)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}}=\frac{2}{5}=P_B(U)$

3) a) $P_N(D)=\frac{4}{7}$ 3) b) $\frac{P(D\cap N)}{P(N)}=\frac{\frac{4}{12}}{\frac{7}{12}}=\frac{4}{7}=P_N(D)$

4) a) $P_U(B)=\frac{2}{5}$ 4) b) $\frac{P(U\cap B)}{P(U)}=\frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}}=\frac{4}{7}=P_U(B)$

Remarque : $\frac{P(D\cap N)}{P(N)}=P_N(D)\Leftrightarrow P(N\cap D)=P(N)P_N(D)$

Définition : p désigne une probabilité sur un univers fini Ω.
A et B étant deux événements de Ω, B étant de probabilité non nulle.
▪ On appelle probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que B est réalisé le réel noté $P_B(A)$ Le réel se note aussi p(A /B) et se lit probabilité de A sachant B.

Exemple : Une urne contient 9 boules dont 5 noires numérotés : 1 ;1 ;1 ;2 ;2 et 4 boules blanches numérotés 1 ;1 ;2 ;2
Sachant que La Boule tirée porte le numéro1 quelle est la probabilité pour qu'elle soit noire **Solution :** on la note : $P_U(N)$

on a : $P_U(N)=\frac{P(U\cap N)}{P(N)}$

$P(U\cap N)=\frac{3}{9}$ et $P(N)=\frac{5}{9}$ donc $P_U(N)=\frac{3}{5}$

Remarque :
Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles p(A/B) et p(B/A) sont toutes les deux définies et on a : $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$

Exercice5:on dispose de deux urnes U_1 et U_2
L'urne U_1 contient 2 boules rouges et 3 boules vertes et L'urne U_2 contient 2 boules rouge et 2 boules vertes .
On choisit au Hazard une urne et on tire une boule
On considére les événements suivants :
A_1 : « le choix de L'urne U_1 »
A_2 : « le choix de L'urne U_2 »
V : « tirer une boule verte »
calculer les probabilités des événements suivants $V\cap A_1$ et $V\cap A_1$

Solution : $P(V\cap A_1)=P(A_1)\times P_{A_1}(V)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

$P(V\cap A_2)=P(A_2)\times P_{A_2}(V)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$

Exercice6: une urne contient 25 boules dont 15 boules blanches et 10 boules noires.
On tire au Hazard une boule de l'urne puit on tire une autre boule sans remettre la première

1) Sachant que La première Boule tirée est blanche quelle est la probabilité pour que la deuxieme soit blanche aussi

2) Sachant que La première Boule tirée est noire quelle est la probabilité pour que la deuxieme soit noire aussi

3) quelle est la probabilité des événements suivants

E « On obtient deux Boules blanches »

F « On obtient deux Boules noires »

G « On obtient deux Boules de couleurs différentes »

Solution : On considére les événements suivants :

B_1 : « La première Boule tirée est blanche »

B_2 : « La deuxieme Boule tirée est blanche »

N_1 : « La première Boule tirée est noire»

N_2 : « La deuxieme Boule tirée est noire»

1) $P_{B_1}(B_2)=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$ 2) $P_{N_1}(N_2)=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

3) $E=B_1\cap B_2$ $P(B_1\cap B_2)=?$

$$P(B_1\cap B_2)=P(B_1)\times P_{B_1}(B_2)=\frac{15}{25}\times\frac{7}{12}=\frac{7}{20}$$

$F=N_1\cap N_2$ $P(N_1\cap N_2)=?$

$$P(N_1\cap N_2)=P(N_1)\times P_{N_1}(N_2)=\frac{10}{25}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{20}$$

$$G=(B_1\cap N_2)\cup(N_1\cap B_2)$$

$$p(G)=p(B_1\cap N_2)+p(N_1\cap B_2)$$

$$p(G)=p(B_1)\times p_{B_1}(N_2)+p(N_1)\times p_{N_1}(B_2)$$

$$p(G)=\frac{3}{5}\times\frac{10}{24}+\frac{2}{5}\times\frac{15}{24}=\frac{1}{2}$$

V) Probabilités totales

a) Définition : Partition de l'univers

Soit n un entier naturel. On dit que les n événements $A1, A2, \ldots . . An$ forment une partition de l'univers Ω s'ils sont disjoints deux à deux et si leur réunion forme l'univers Ω.

Exemples :

a) A et $\overline{A}$ forment pour tout événement A une partition de Ω

b) Considérons une urne qui contient :une boule rouge R_1 et deux boules vertes V_1 et V_1 et contient aussi 3 boules noires N_1 et N_2 et N_3

si on tire une boule au Hazard l'univers des éventualités est : $\Omega=\{R_1;V_1;V_2;N_1;N_2;N_3\}$

Soient les événements suivants :

$A_1=\{R_1\}$ et $A_2=\{V_1;V_2\}$ et $A_3=\{N_1;N_2;N_3\}$

Ces événements sont disjoints deux à deux et leur réunion forme l'univers Ω.

Donc forment une partition de l'univers Ω

c) Considérons un jeu de cartes et l'expérience consistant à extraire au hasard une carte de ce jeu. Les événements :

A : « la carte extraite est une carte de pique »

B : « la carte extraite est une carte de cœur »

C : « la carte extraite est une carte de carreau »

D : « la carte extraite est une carte de trèfle »

forment une partition de l'univers

b) Propriété : Si $A1$, $A2$,…. . An forment une partition de l'univers Ω et si pour tout i compris entre 1 et n, $P(Ai)\neq 0$ alors pour tout événement B on a : $p(B)=p(B\cap A_1)+p(B\cap A_2)+\ldots+p(B\cap A_n)$

ou encore

$$p(B)=p(A_1)P_{A_1}(B)+p(A_2)P_{A_2}(B)+\ldots+p(A_n)P_{A_n}(B)$$

Cette égalité est nommée loi de probabilités totales

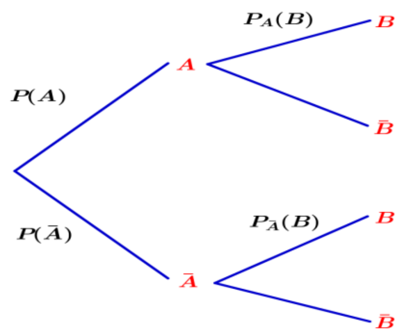
Remarque : On a : $(A\cup\overline{A})\cap B=B$

Donc : $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=B$ et $(A\cap B)\cap(\overline{A}\cap B)=\varnothing$

Donc : $p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)=p(B)$

Ainsi si A un événement de probabilité non nulle et différente de 1. Alors pour Tout événement B on a :

$$P(A)\times P_A(B)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)=p(B)$$



●Les probabilités de $A\cap B$ et $A\cap\overline{B}$ sont
Les produits des probabilités portées le Long des branches aboutissant en B

● La probabilité de B est la somme de ces deux probabilités

Exemple1 : on dispose de deux urnes U_1 et U_2

L'urne U_1 contient 2 boules rouges et 3 boules noires et L'urne U_2 contient 3 boules rouge et 4boules noires.

On choisit au Hazard une urne et on tire une boule

On considére les événements suivants :

A_1 : « le choix de L'urne U_1 »

A_2 : « le choix de L'urne U_2 »

R : « tirer une boule rouge »

Calculer la probabilité de tirer une boule rouge

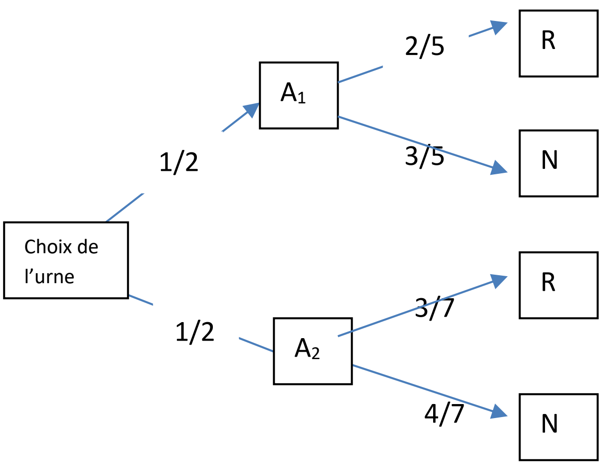
Solution :calculons $P(R)$?

A_1 et A_2 forment une partition de de Ω

D'après la loi de probabilités totales on a :

$$P(R)=P(A_1)\times P_{A_1}(R)+P(A_2)\times P_{A_2}(R)$$

$$P(R)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}=\frac{29}{70}$$



Exemple2 : une urne contient des jetons de trois couleurs : 50% de jetons sont rouges et $\frac{1}{3}$ de jetons sont vertes et $\frac{1}{6}$ de jetons sont jaunes .

50% de jetons rouges portent le numéros 1 et 30% de jetons vertes portent le numéros 1 et 40% de jetons jaunes portent le numéros 1 et les autres jetons portent le numéros 2

1)Calculer la probabilité de tirer un jeton qui porte le numéros 1

2)Calculer la probabilité de tirer un jeton rouge sachant qu'elle porte le numéros 1

Solution ::

On tire un jeton de l'urne au Hazard

On considére les événements suivants :

R : « le jeton est rouge »

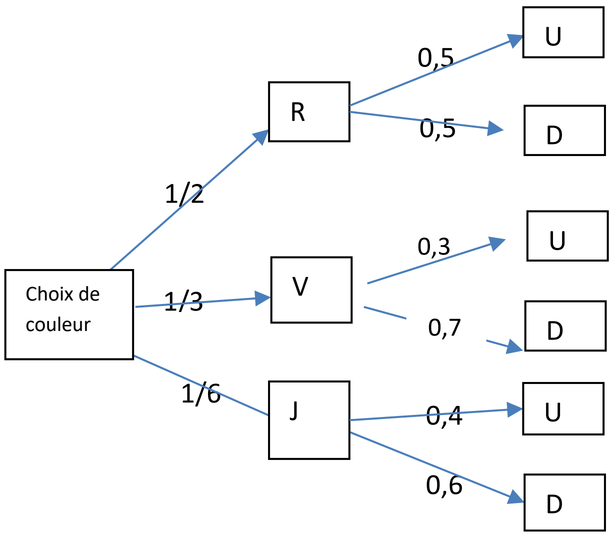
V : « le jeton est vert »

J : « le jeton est jaune »

U : « le jeton porte le numéros 1 »

D : « le jeton porte le numéros 2 »

on utilise une Arbre pondéré



1) Les événements : R et V et J forment une partition de l'univers Ω

D'après la loi de probabilités totales on a :

$$P(U)=P(R)\times P_R(U)+P(V)\times P_V(U)+P(J)\times P_J(U)$$

Puisque on a : $P(R)=\frac{1}{2}$ et $P(V)=\frac{1}{3}$ et $P(J)=\frac{1}{6}$

et $P_R(U)=50\%=0,5$ et $P_V(U)=30\%=0,3$ et $P_J(U)=40\%=0,4$

alors : $P(U)=\frac{0,5}{2}+\frac{0,3}{3}+\frac{0,4}{6}=\frac{5}{12}$

2)Calculons la probabilité de tirer un jeton rouge sachant qu'elle porte le numéros 1

On va calculer : $P_U(R)=?$

$$P_U(R)=\frac{P(R\cap U)}{P(U)}$$

Or : $P(R\cap U)=P(R)\times P_R(U)=\frac{1}{2}\times 0.5=\frac{1}{4}$

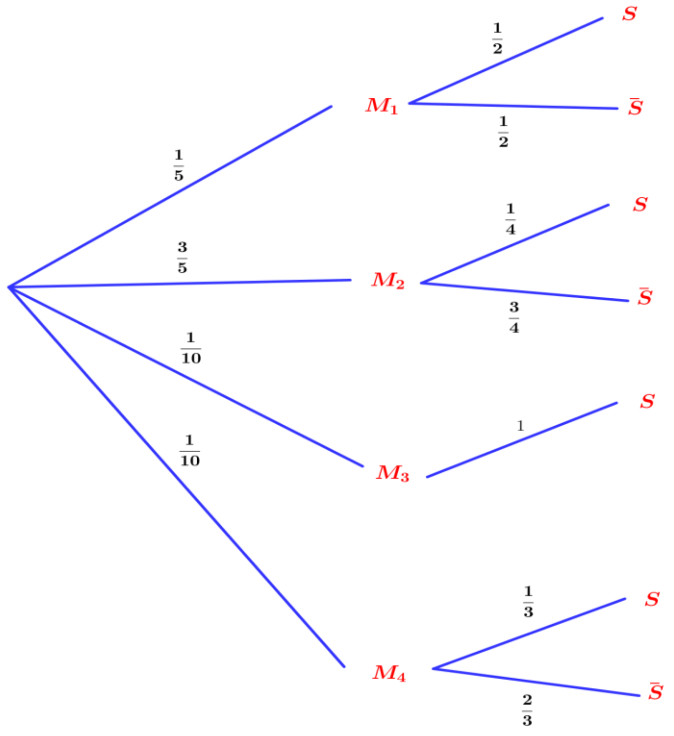
Donc : $P_U(R)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}=\frac{3}{5}$

Exemple3 : Dans un lycée il y a 4 classes de terminale ES avec 4 professeurs :
$M1$, $M2$, $M3$, $M4$.
Lors des devoirs communs les élèves constatent que la probabilité qu'un sujet sur les suites « Tombe » dépend du professeur rédacteur du devoir et Ils savent que :

- $M1$ rédige le devoir 1 fois sur 5 et qu'alors le sujet sur les suites est présent 1 fois sur 2
- $M2$ rédige le devoir 3 fois sur 5 et qu'alors le sujet sur les suites est présent 1 fois sur 4
- $M3$ rédige le devoir 1 fois sur 10 et qu'alors le sujet sur les suites est toujours présent
- $M4$ rédige le devoir 1 fois sur 10 et qu'alors le sujet sur les suites est présent 1 fois sur 3

On appelle : Mi l'événement « le rédacteur du sujet est le professeur Mi »
S l'événement « le sujet sur les suites est présent dans le devoir »
Calculer la probabilité de S

Solution : Arbre pondéré :



D'après la loi des probabilités totales on a :

$$p(S)=p(M_1)P_{M_1}(S)+p(M_2)P_{M_2}(S)+$$
$$+p(M_3)P_{M_3}(S)+p(M_4)P_{M_4}(S)$$
$$p(S)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{10}\times 1+\frac{1}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{23}{60}$$

Exercice 7: On considére des sacs de billes S_1, S_2, S_3, ...tels que S_1 contient 3 billes jaunes et 2 billes vertes.
Chacun des sacs suivants S_2, S_3, ... contient 2 billes jaunes et 2 billes vertes.
On tire au hasard une bille de S_1 et on la met dans S_2.
Puis on tire une bille de S_2 et on la met dans S_3.
Et ainsi de suite.
Pour tout entier n ≥ 1, on note E_n l'´évènement « la bille tirée dans S_n est verte » et $P(E_n)$ sa probabilité.

1) déterminer $P(E_1)$, $P_{E_1}(E_2)$, $P_{\overline{E_1}}(E_2)$ et $P(E_2)$

2) A l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $P(E_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$

3) Soit (u_n) la suite définie par $u_1=0,4$ et pour tout entier n ≥ 1, $u_{n+1}=0,2u_n+0,4$.

a) démontrer que la suite (u_n) est majorée par 0,5.

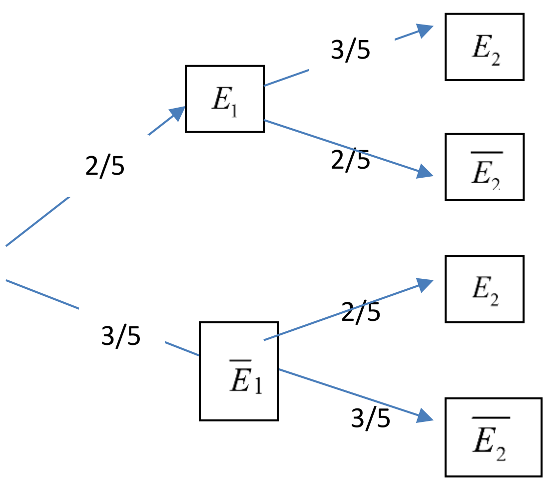
b) démontrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite

Solution : 1) On est dans une situation d'équiprobabilité donc : $P(E_1)=\frac{2}{5}$

$P_{E_1}(E_2)=\frac{3}{5}$ (Sachant E_1)

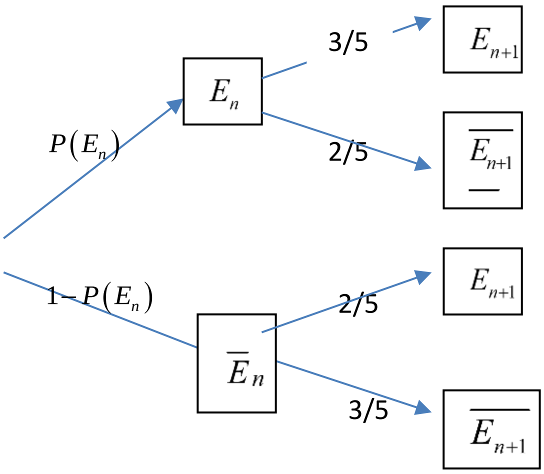
$P_{\overline{E_1}}(E_2)=\frac{2}{5}$ (Sachant $\overline{E}_1$)



D'après la loi des probabilités totales on a :

$$P(E_2)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$$

2)



D'après la loi des probabilités totales on a :

$$P(E_{n+1})=P(E_n)\times\frac{3}{5}+(1-P(E_n))\times\frac{2}{5}$$

$$P(E_{n+1})=\frac{3}{5}P(E_n)+\frac{2}{5}-\frac{2}{5}P(E_n)$$

$$P(E_{n+1})=\frac{1}{5}P(E_n)+\frac{2}{5}$$

$P(E_{n+1})=0,2P(E_n)+0,4$ n ≥ 1

3) a) démontrons que $u_n\leq 0,5 \quad \forall n\geq 1$

On a u_1 = 0,4 $\leq 0,5$ donc vraie pour n=1

Supposons que : $u_n\leq 0,5$

Montrons que : $u_{n+1}\leq 0,5$?

On a : $0,2u_n\leq 0,1$ donc : $0,2u_n+0,4\leq 0,5$

Donc : $\forall n\geq 1\ u_n\leq 0,5$

3) b) Montrons que la suite (u_n) est croissante

$u_{n+1}-u_n=0,2u_n+0,4-u_n=-0,8u_n+0,4$

Or $u_n\leq 0,5$ donc $-0,8u_n\geq -0,8\times 0,5$

donc $-0,8u_n\geq -0,4$ donc $-0,8u_n+0,4\geq 0$

donc : la suite (u_n) est croissante

3)c) la suite (u_n) est croissante et puisqu'elle est majorée alors elle est convergente

Sa limite l vérifie : l = 0,2 l + 0,4.

Donc : $l=0,5$

VI) Événements indépendants

Activité1 :

On lance une fois un dé cubique équilibré.

On considére les événements suivants :

A : « on obtient un nombre pair »

B : « on obtient un multiple de 3 »

1) calculer les probabilités

des événements suivants : A ; B ; $A\cap B$; $P_B(A)$

2)comparer : $p(A\cap B)$ et $p(A)\times p(B)$

Solution :1) $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ et $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$A\cap B$"obtenir un nombre pair et un multiple de 3 »

Donc : $A\cap B=\{6\}$ donc : $p(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}}=\frac{1}{2}$$

2) $p(A)\times p(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=p(A\cap B)$

On dira que les événements A et B sont indépendants

Définition : A et B sont 2 événements de probabilité non nulle.

- A et B sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre.
- A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A)=P(A)$ ou $P_A(B)=P(B)$

Théorème : Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si et seulement si ils vérifient une des trois conditions :

$P_B(A)=P(A)$ ou $P_A(B)=P(B)$

ou $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

Démonstration :

- Par définition, les deux premières sont équivalentes
- si $P_B(A)=P(A)$ comme $P(A\cap B)=P_B(A)P(B)$ alors $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$
- si $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ comme p(B) ≠ 0,

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\times P(B)}{P(B)}=P(A)$$

c'est-à-dire $P_B(A)=P(A)$

Remarque : Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles.

▪ 2 événements A et B sont indépendants si $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

▪ 2 événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple1 : on écrit les entiers de 1 a 20 sur vingt cartons

On tire au Hazard un carton

Soient les événements suivants :

A : « on obtient un nombre impair »

B : « obtenir un multiple de 5 »

1)Les événements A et B sont-ils indépendants ? Et événements A et B sont-ils incompatibles ?

2)même question mais cette fois-ci on rajoute un carton numéroté 21

Solution :1) l'univers des éventualités est :

$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ;\dots; 20\}$.

$A = \{1 ; 3 ; 7 ;\dots; 19\}$. $B = \{5 ;10 ; 15; 20 \}$.

$A\cap B = \{5 ; 15\}$.

On est dans une situation d'équiprobabilité donc :

$P(A)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$ et $P(B)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

$p(A\cap B)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

$p(A)\times p(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}=p(A\cap B)$

Donc les événements A et B sont indépendants

$A\cap B = \{5 ; 15\}. \neq\emptyset$

Donc les événements A et B sont compatibles

2) $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ;\dots; 20; 21\}$.

$A = \{1 ; 3 ; 7 ;\dots; 19; 21\}$. $B = \{5 ;10 ; 15; 20 \}$.

$A\cap B = \{5 ; 15\}\neq\emptyset$ Donc les événements A et B sont compatibles

$P(A)=\frac{11}{21}$ et $P(B)=\frac{4}{21}$ et on a ; $p(A\cap B)=\frac{2}{21}$

$p(A)\times p(B)\neq p(A\cap B)$

Donc les événements A et B sont dépendants

Exemple2 : On lance deux fois de suite un dé cubique équilibré.

Soient les événements suivants :

A : « on obtient le numéro 6 au 1ere lancement »

B : « on obtient le numéro 6 au 2ere lancement »

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Solution : sans faire les calculs les 2 événements A et B sont indépendants car le 2ere lancement ne dépend pas du 1ere lancement en effet : $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ et $P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$p(A\cap B)=\frac{1}{36}$ donc : $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

Donc : les 2 événements A et B sont indépendants

Propriété : Si deux événements Aet Bsont indépendants alors les événements Aet $\overline{B}$le sont aussi.

Démonstration :

D'après la formule des probabilités totales on a :

$p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B})$

$p(A)=p(A)\times p(B)+p(A\cap\overline{B})$

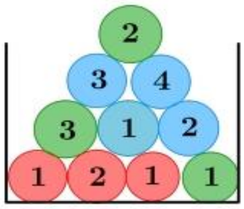
car A et B sont des évènements indépendants

Par conséquent : $p(A\cap\overline{B})=p(A)-p(A)\times p(B)$

$p(A\cap\overline{B})=p(A)(1-p(B))=p(A)p(\overline{B})$

Donc Aet $\overline{B}$sont indépendants.:

Exercice 8: Dans l'urne ci-contre :



Il y a des jetons numérotés de différentes couleurs. On tire au hasard un jeton dans cette urne et on considére les évènements suivants :

B : le jeton tiré est bleu

I : le numéro du jeton tiré est impair

1) Les évènements B et I sont-ils indépendants ?

2) Combien faut-il rajouter de jetons bleus numérotés 1 pour que les évènements B et I soient indépendants ?

Solution :1) on est dans une situation d'équiprobabilité donc :

$P(I)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ et $P_B(I)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Donc : $P_B(I)\neq P(I)$ donc Les évènements B et I sont dépendants

2)soit n : le nombre de jetons bleus numérotés 1 rajouter

$P(I)=\frac{6+n}{n+10}$ et $P_B(I)=\frac{n+2}{n+4}$

B et I sont indépendants $\Leftrightarrow P_B(I)=P(I)$

$$\Leftrightarrow \frac{6+n}{n+10}=\frac{n+2}{n+4} \Leftrightarrow (6+n)(n+4)=(10+n)(n+2)$$

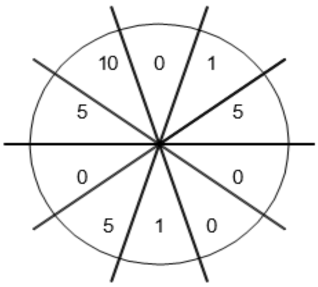
$$\Leftrightarrow n^2+10n+24=n^2+12n+20$$

$$\Leftrightarrow 4=2n \Leftrightarrow n=2$$

Exercice9: On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant six jetons : trois rouges numérotés 1, 2 et 3, deux
jaunes numérotés 1 et 2 , et un bleu numéroté 1.
On désigne respectivement par R, U et D les événements :
« le jeton est rouge », « le numéro est 1 » et « le numéro est 2 ».
Les événements R et U sont-ils indépendants ?
Et les événements R et D ?

VII) Variables aléatoires et Loi de probabilité

Activité 1 : (notion de variable aléatoire)
Un jeu consiste à faire tourner une roue bien équilibrée
Le prix à payer pour une partie est de 2 dh
Le jeu rapporte le montant indiqué par la roue en dh on pose :
X = gain = rapport du jeu - prix de la partie
On dit que X est une variable aléatoire



1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour X
2) déterminer les probabilités associées respectivement aux valeurs possibles de X
(Mettre les résultats dans un tableau)
3) déterminer p (X ≤ 0) et p (X > 0)
4) déterminer $E(X)$ l'espérance de X donnée par : $E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i p(X=x_i)$
où les xi sont les valeurs possibles pour X et pi les probabilités respectivement associées.
Interpréter cette valeur.
5) déterminer la variance V (X) et l'écart type σ(X) de X donnés par :

$$V(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i p_i^2-(E(X))^2 \text{ et } \sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

6) le jeu est à gain positif si E(X) > 0, qu'en est-il de ce jeu ? est-il plus favorable à l'organisateur ou au joueur ?
7) déterminer le prix de la partie pour que l'espérance soit nulle.

Solution :1)les valeurs possibles pour X : sont
10-2=8 5-2=3 1-2=-1 0-2=-2
Donc : $X(\Omega)=\{-2;-1,3,8\}$
2) valeurs des probabilités associées aux valeurs de X : p(X = 8) = p(score = 10) = $\frac{1}{10}$

p(X = 3) = p(score = 5) = $\frac{3}{10}$

p(X = -1) = p(score = 1) = $\frac{2}{10}$

p(X = -2) = p(score = 0) = $\frac{4}{10}$

Valeurs possibles de X : $X(\Omega)$	-2	-1	3	8	total
$P(X=x_i)$	*4/10=2/5*	*2/10=1/5*	*3/10*	*1/10*	*1*

On remarque que :
p(X = 8)+ p(X = 3)+ p(X = -1)+ p(X = -2)=1
3)
p(X ≤ 0) = p(X = −2) + p(X = −1) = $\frac{4}{10}+\frac{2}{10}=\frac{6}{10}=0,6$
p (X > 0) = 1 − p(X ≤ 0) =1-0,6=0.4
4) déterminons : E(X) l'espérance de X

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i p(X=x_i)$$

$$E(X)=\left(-2\times\frac{4}{10}\right)+\left(-1\times\frac{2}{10}\right)+\left(3\times\frac{3}{10}\right)+\left(8\times\frac{1}{10}\right)=0,7$$

Ceci signifie qu'en moyenne le gain est de 0,7 DH par partie

5) déterminons : la variance $V(X)$ et et l'écart type $\sigma(X)$?

$$V(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i (p(X=x_i))^2-(E(X))^2=\sum_{i=1}^{4} x_i p_i^2-(E(X))^2$$

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ = $(-2)^2 \times 0,4 +$

$(-1)^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,3 + 8^2 \times 0,1 - 0,7^2$

$V(X)=10,41$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{10,4}\approx 3,22$$

le jeu est à gain positif car E(X) = 0, 7 > 0,

il est plus favorable au joueur car il gagne

en moyenne 0,7 DH.

7. soit y le prix de la partie pour que l'espérance soit nulle.

E(X) = 0 $\Leftrightarrow$

0, 4(0 − y) + 0, 2(1 − y) + 0, 3(5 − y) + 0, 1(10 − y) = 0

$\Leftrightarrow$ −0, 4y+0, 2 − 0, 2y +1, 5−0, 3y + 1− 0, 1y = 0

$\Leftrightarrow$ −y + 2, 7 = 0

$\Leftrightarrow$ y = 2, 7

e prix doit être de 2,7 DH pour avoir une espérance nulle

À retenir :

Définition 1 : Soit un univers de probabilité fini U = {w_1, w_2, ..., w_n} (n ≥ 1) sur lequel est défini une probabilité p
Soit X une fonction qui à chaque élément w_i de U associe un nombre réel x_i
On dit que X est un variable aléatoire (réelle) qui prend r valeurs avec r ≤ n
Pour tout x_i avec 1 ≤ i ≤ r on pose
$p(x_i)=p(X=x_i)$ (Cas de U favorables pour x_i)
et on définit ainsi une loi de probabilité que l'on consigne en général dans un tableau.

valeurs possibles de X : x_i	x_1	x_2	...	x_r	total
probabilités : $p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_r	1

Pour une la variable aléatoire X on peut calculer :

1) $E(X)$:l'espérance de X donnée par :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i p(X=x_i)$$

2) la variance V (X) et l'écart type σ(X) de X donnés par : $V(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i p_i{}^2-(E(X))^2$ et $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Exemple : Une urne contient 6 boules qui portent les numéros :**2 ,2, 2, ,1 ,1 , 0** indiscernables au toucher
On tire de l'urne au hasard deux Boules simultanément
Soit Y la variable aléatoire qui associe à chaque tirage La somme des numéros des deux boules tirées.

1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour Y
2) déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire Y
3) calculer : $E(Y)$l'espérance de Y et la variance V (Y) et l'écart type σ(Y)

Solution :1) les valeurs possibles pour X sont :
On peut par exemple tirer deux boules qui portent le numeros1 donc : la somme =2
On peut par exemple tirer deux boules qui portent le numeros2 donc : la somme =4
On peut par exemple tirer deux boules dont une porte le numéro 0 et une autre 1 donc :
la somme =1
On peut aussi tirer une boule qui porte le numéro 1 et une autre qui porte le numéro 2donc : la somme =3
$1+0=1$ ou $2+0=2$ ou $1+1=2$ ou $1+2=3$ ou $2+2=4$ Donc : $Y(\Omega)=\{1;2;3;4\}$

2) déterminons la loi de probabilités de la variable aléatoire Y(tableau)
L'évènement : $(Y=1)$ se traduit par :

$(Y=1)$" la somme des numéros des deux boules tirées est égal à 1"
$(Y=1)$" tirer une boules qui portent le numéro 0 et une boules qui portent le numéro 1"

$$p(Y=1)=\frac{C_1^1\times C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{15}$$

$(Y=2)$" tirer une boules qui portent 2 et une boules qui portent le numéro 0 ou tirer deux boules qui portent 1 "

$$p(Y=2)=\frac{C_1^1\times C_3^1+C_2^2}{C_6^2}$$

$(Y=3)$" tirer une boules qui portent 1 et une boules qui portent le numéro 2 "

$$p(Y=3)=\frac{C_1^1\times C_3^1}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{3}{5}$$

$(Y=4)$" tirer deux boules qui portent 2 "

$$p(Y=4)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

On résume tous dans un tableau :

x_i	1	2	3	4
$p(Y=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$

On remarque que : $\frac{2}{15}+\frac{4}{15}+\frac{6}{15}+\frac{3}{15}=\frac{15}{15}=1$

3) $E(Y)$? et V (Y) ? et l'écart type σ(Y) ?

$$E(Y)=\left(1\times\frac{2}{15}\right)+\left(2\times\frac{4}{15}\right)+\left(3\times\frac{6}{15}\right)+\left(4\times\frac{3}{15}\right)=\frac{40}{15}=\frac{8}{3}$$

$$V(X)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\left(1^2\times\frac{2}{15}\right)+\left(2^2\times\frac{4}{15}\right)+\left(3^2\times\frac{6}{15}\right)+\left(4^2\times\frac{3}{15}\right)-\left(\frac{8}{3}\right)^2=8-\frac{64}{9}=\frac{8}{9}$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Exercice10 : Soit X la variable aléatoire définie par la loi de probabilités suivante :

x_i	-1	0	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{6}$

1)calculer la probabilité de l'évènement $(X=2)$

2) calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$

Exercice11 : Une urne contient 6 boules qui portent les numéros :**-1 ;-1 ;0 ;1 ;1 ;2** indiscernables au toucher

On tire de l'urne au hasard deux Boules simultanément

Soit Z la variable aléatoire qui associe à chaque tirage La somme des numéros des deux boules tirées.

1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour Z

2) déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire Z

3) calculer : $E(Z)$ l'espérance de Z et la variance V (Z) et l'écart type σ(Z)

Solution :1) $(-1)+(1)=(0)$ ou $(-1)+(-1)=(-2)$

$(-1)+(0)=(-1)$ ou $(2)+(-1)=(1)$ ou

$(1)+(0)=(1)$

ou $(2)+(0)=(2)$ ou $(2)+(1)=(3)$

les valeurs possibles pour Z sont :

$Z(\Omega)=\{-2;-1;0;1;2;3\}$

2) déterminons la loi de probabilités de la variable aléatoire Z(tableau)

L'évènement : $(Z=-2)$ se traduit par :

$(Z=-2)$" le somme des numéros des deux boules tirées est égal à -2"

$(Z=-2)$" tirer deux boules qui portent -1 "

$$p(Z=-2)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}$$

$(Z=-1)$ " tirer une boules qui portent -1 et une boules qui portent le numéro 0 "

$$p(Z=-1)=\frac{C_3^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{3}{15}$$

$(Z=0)$ " tirer une boules qui portent -1 et une boules qui portent le numéro 1 "

$$p(Z=0)=\frac{C_1^1\times C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{15}$$

$(Z=1)$ " tirer une boules qui portent -1 et une boules qui portent le numéro 2 ou tirer une boules qui portent 0 et une boules qui portent le 1 "

$$p(Z=1)=\frac{C_1^1\times C_3^1+C_1^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{4}{15}$$

$(Z=2)$ " tirer une boules qui portent 2 et une boules qui portent le numéro 0 "

$$p(Z=2)=\frac{C_1^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{1}{15}$$

$(Z=3)$" tirer une boules qui portent 2 et une boules qui portent le numéro 1"

$$p(Z=3)=\frac{C_1^1\times C_1^1}{C_6^2}=\frac{1}{15}$$

On résume tous dans un tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$p(Z=x_i)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

3) $E(Z)$? et V (Z) ? et l'écart type σ(Z) ?

$$E(Z)=\left(-2\times\frac{3}{15}\right)+\left(-1\times\frac{3}{15}\right)+\left(0\times\frac{3}{15}\right)+\left(1\times\frac{4}{15}\right)+\left(2\times\frac{1}{15}\right)+\left(3\times\frac{1}{15}\right)$$

$$E(Z)=\left(-\frac{6}{15}\right)+\left(-\frac{3}{15}\right)+\left(\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{2}{15}\right)+\left(\frac{3}{15}\right)=0$$

$$V(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2$$

$$V(Z)=\left((-2)^2\times\frac{3}{15}\right)+\left((-1)^2\times\frac{3}{15}\right)+\left((0)^2\times\frac{3}{15}\right)+\left((1)^2\times\frac{4}{15}\right)+\left((2)^2\times\frac{1}{15}\right)+\left((3)^2\times\frac{1}{15}\right)-(0)^2$$

$$V(Z)=\left(\frac{12}{15}\right)+\left(\frac{3}{15}\right)+\left(\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{9}{15}\right)=\frac{32}{15}$$

$$\sigma(Z)=\sqrt{V(Z)}=\sqrt{\frac{32}{15}}$$

Exercice12 : Une urne contient 9 jetons numérotés de 1 à 9. Indiscernables au toucher
On tire de l'urne au hasard trois Boules successivement et sans remise
Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de jetons qui portent un chiffre impair
1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour X
2) déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire X(tableau)
3) calculer : $E(X)$ l'espérance de X et la variance V (X) et l'écart type σ(X)

Solution :1) On peut par exemple ne tirer aucun chiffre impair(X=0) ou tirer un chiffre impair(X=1) ou tirer deux chiffre impair(X=2) ou tirer 3 chiffre impair(X=3) donc : l'ensemble des valeurs possibles pour X est : $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$

2) déterminons la loi de probabilités de la variable aléatoire X (tableau)
L'évènement : $(X=0)$ se traduit par :
$(X=0)$" obtenir trois jetons pairs"

$$p(X=0)=\frac{A_4^3}{A_9^3}=\frac{2}{42}=\frac{1}{21}$$

$(X=1)$" obtenir un jeton impair"

$$p(X=1)=\frac{C_3^1\times A_4^2\times A_5^1}{A_9^3}=\frac{15}{42}$$

$(X=2)$" obtenir deux jetons impairs"

$$p(X=2)=\frac{C_3^2\times A_4^1\times A_5^2}{A_9^3}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$$

$(X=3)$" obtenir 3 jetons impairs"

$$p(X=3)=\frac{A_5^3}{A_9^3}=\frac{5}{42}$$

On résume tous dans un tableau :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{5}{42}$

3) $E(X)$? et V (X) ? et l'écart type σ(X) ?

$$E(X)=\left(0\times\frac{2}{42}\right)+\left(1\times\frac{15}{42}\right)+\left(2\times\frac{20}{42}\right)+\left(3\times\frac{5}{42}\right)=\frac{5}{3}$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$V(X)=\left((0)^2\times\frac{2}{42}\right)+\left((1)^2\times\frac{15}{42}\right)+\left((2)^2\times\frac{20}{42}\right)+\left((3)^2\times\frac{5}{42}\right)-\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$V(X)=\frac{10}{3}-\frac{25}{9}=\frac{5}{9}$$

$$\sigma(Z)=\sqrt{V(Z)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

VIII) Fonction de répartition d'une Variables aléatoires

Définition : Soit X une variable aléatoire. La loi de probabilité de X est définie par la fonction F_X, appelée fonction de répartition de la variable X, définie par : $F_X=P(X\prec x)$

Avec $(X\prec x)$={ω ∈ Ω | X(ω) ≺ x}

Exemple : Une urne contient 8 boules :
3 boules qui portent le numeros1 et une boule
Qui porte le numéro 0 et le reste portent le numéro 2 et toutes les Boules sont indiscernables
On tire de l'urne au hasard deux Boules simultanément
Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le produit des numéros des deux boules tirées.
1) déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour X
2) déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire X(tableau)
3) calculer : $E(X)$ l'espérance de X et la variance V (X) et l'écart type σ(X)
4) déterminer la fonction F_X de répartition de la variable X et représenter graphiquement F_X

Solution :1) les valeurs possibles pour X sont :
On peut par exemple tirer deux boules qui portent le numeros1 donc : le produit =1
On peut par exemple tirer deux boules qui portent le numeros2 donc : le produit =4
On peut par exemple tirer deux boules dont une porte le numéro 0 donc : le produit =0
On peut aussi tirer une boule qui porte le numéro 1 et une autre qui porte le numéro 2donc : le produit =2
$1\times1=1$ ou $2\times2=4$ ou $0\times0=0$ ou $0\times1=0$ ou $0\times2=0$ ou $2\times1=2$

Donc : $X(\Omega)=\{0;1,2,4\}$

2) déterminons la loi de probabilités de la variable aléatoire X(tableau)

L'évènement : $(X=0)$ se traduit par :

$(X=0)$" le produit des numéros des deux boules tirées est égal à 0"

$$P(X=0)=\frac{C_1^1\times C_7^1}{C_8^2}=\frac{1\times 7}{28}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$$

$(X=1)$" le produit des numéros des deux boules tirées est égal à 1"
(On tire deux boules qui portent le numéro 1)

$$P(X=1)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$$

$(X=2)$" le produit des numéros des deux boules tirées est égal à 2"

$(X=2)$" On tire une boules qui portent le numéro 1 et une boules qui portent le numéro 2"

$$P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_4^1}{C_8^2}=\frac{3\times 4}{28}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$$

$(X=4)$" On tire deux boules qui portent le numéro 2"

$$P(X=2)=\frac{C_4^2}{C_8^2}=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$$

On résume tous dans un tableau :

$X(\Omega)$	0	1	2	4
$P(X=x_i)$	*7/28=1/4*	*3/28*	*12/28=3/7*	*6/28=3/14*

On remarque que :

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=4)=1$$

3) $E(X)$?

$$E(X)=0\times p(X=0)+1\times p(X=1)+2\times p(X=2)+4\times p(X=4)$$

$$E(X)=\left(0\times\frac{7}{28}\right)+\left(1\times\frac{3}{28}\right)+\left(2\times\frac{12}{28}\right)+\left(4\times\frac{6}{28}\right)=\frac{3+24+24}{28}=\frac{51}{28}$$

Calcul de $V(X)$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$=\left(0^2\times\frac{7}{28}\right)+\left(1^2\times\frac{3}{28}\right)+\left(2^2\times\frac{12}{28}\right)+\left(4^2\times\frac{6}{28}\right)-\left(\frac{51}{28}\right)^2$$

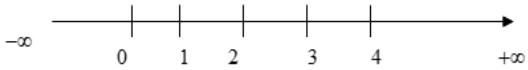
$$=\frac{3}{28}+\frac{48}{28}+\frac{96}{28}-\left(\frac{51}{28}\right)^2=\frac{147}{28}-\left(\frac{51}{28}\right)^2=\frac{4116}{28^2}-\frac{2601}{28^2}$$

$$V(X)=\frac{1515}{784}$$

Calcul de $\sigma(X)$:?

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{1515}{784}}$$

4)



Si $x\le 0$ alors : $F_x(x)=P(X\prec x)=P(\Phi)=0$

Si $0\prec x\le 1$ alors : $F_x(x)=P(X=0)=\frac{1}{4}=\frac{7}{28}$

Si $1\prec x\le 2$ alors :

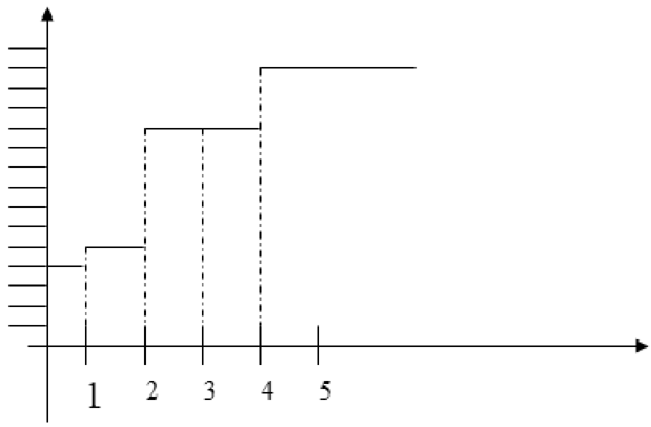
$$F_x(x)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$$

Si $x\in]2,4]$ alors :

$$F_x(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

$$=\frac{10}{28}+\frac{12}{28}=\frac{22}{28}=\frac{11}{14}$$

Si $x\succ 4$ alors : $F_x(x)=\frac{22}{28}+\frac{6}{28}=\frac{28}{28}=1$



IX) Indépendance d'épreuves et Répétition d'épreuves et lois Binomiales

1. Indépendance d'épreuves et Répétition d'épreuves

A) Exemples :

1)si on jette une pièce de monnaie non truquée n fois. On peut modéliser cette expérience comme une répétition de n épreuves identiques
(L'épreuve : c'est jeter une une pièce de monnaie)
Et que le résultat d'une épreuve ne dépend pas de celles qui l'ont précédée
On dira que ces épreuves sont indépendantes

2) si On lance un dé cubique équilibré 4 fois de suite : On peut dire que cette expérience est une répétition de 4 épreuves identiques
(L'épreuve : c'est jeter dé une fois)
Et que le résultat d'une épreuve ne dépend pas de celles qui le précéde
Donc ces épreuves sont indépendantes
3) le tirage de n boules successivement et avec remise d'une urne qui contient un nombre de boules est former de n épreuves indépendantes

B) Résumé : On dira que des épreuves sont indépendantes dès lors que le résultat d'une épreuve ne dépend pas de celles qui l'ont précédée.

2) Épreuve de Bernoulli et Répétition d'épreuves et lois Binomiales

C)Activité1 :1) on considére l'épreuve suivante :
On lance une fois un dé cubique équilibré.
Et on considére l'événement suivant :
A : « on obtient un diviseur de 3 »

Calcule de la probabilité de l'événement A :
$p(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et $p(\bar{A})=1-p(A)=\frac{2}{3}$
L'événement A peut se réaliser (Succès (S))

Ou ne pas se réaliser (Échec(E)).

2)on répète cette épreuve $n=4$ fois de suite
Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fois la réalisation de L'événement A

Pour les 4 épreuves.

la variable aléatoire X s'appelle une lois binomiale de paramètre $n=4$ et $p=\frac{1}{3}$

a)calculer : $p(X=2)$?

b)calculer : $p(X=k)$? $\forall k\in\{0;1;2;3;4\}$
c)déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire X(tableau)
d) calculer : $E(X)$l'espérance de X et la variance V (X) et l'écart type σ(X) et remarquer que : $E(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$

Solution :2)a) L'évènement : $(X=1)$ se traduit par :" L'événement A se réalise exactement 1 fois " on a les cas suivants :

A	$\bar{A}$	$\bar{A}$	$\bar{A}$

Ou

$\bar{A}$	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$

Ou

$\bar{A}$	$\bar{A}$	A	$\bar{A}$

Ou

$\bar{A}$	$\bar{A}$	$\bar{A}$	A

A prend une place parmi 4 place
il y'a donc : C_4^1 possibilités :

donc : $p(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=4\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$

On général on vérifie que :
$p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k\in\{0;1;2;3;4\}$
Loi de probabilités de la variable aléatoire X :

$$p(X=0)=C_4^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4=1\times1\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

$$p(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=4\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$$

$$p(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=6\times\frac{1}{9}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$$

$$p(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=4\times\frac{1}{27}\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$$

$$p(X=4)=C_4^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0=1\times\frac{1}{81}=\frac{1}{81}$$

x_i	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

d) calculer : $E(X)$ l'espérance de X et la variance V (X) et l'écart type σ(X)

un calcul de $E(X)$ donne $\frac{4}{3}$

et on remarque que $E(X)=np=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

un calcul de $V(X)$ donne $\frac{8}{9}$

et on remarque que :$V(X)=np(1-p)=4\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$

D)Résumé :
Définition1 : Épreuve de Bernoulli :
On appelle épreuve de Bernoulli une épreuve n'ayant que deux issues : Succès (S) et Échec(E).
Exemple : On lance une pièce (pile ou face).
La loi de Bernoulli de paramètre p associe à l'issue succès (S) la probabilité p et à l'issue échec (E) la probabilité (1-p).

Définition2 : Schéma de Bernoulli :
On appelle schéma de Bernoulli, la répétition n fois, de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli.

Définition3 : La loi binomiale :
La variable aléatoire X qui lie chaque résultat au nombre de fois que cet événement se réalise S'appelle une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p, notée B(n;p).

Propriété :
Soit B(n ; p) une loi Binomiale, la probabilité d'obtenir k succès (0≤ k ≤n) est donnée

$p(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k\in\{0;1;..;n\}$

Exemple1 :
Un dé cubique est mal équilibré : la probabilité d'obtenir 6 est de 1/7.
On appelle succès l'événement « obtenir 6 » et échec « obtenir un numéro différent de 6 ».
Cette expérience qui ne comporte que deux issues suit une loi de Bernoulli.

Si On effectue cinq fois cette expérience. On est en présence d'un schéma de Bernoulli.

Exemple1 : On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et soit l'évènement :
A "obtenir la face F "
Calculer la probabilité de l'évènement suivant :
B "obtenir face F exactement deux fois"

Solution : $p(A)=\frac{1}{2}$ et $n=3$

$$p(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$p(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=3\times\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

Exercice13: On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et soit X le nombre de fois que l'on obtient "pile"
1. faire un arbre illustrant cette situation
2. donner la loi de probabilité de X
3. calculer et interpréter E(X)

Exercice14: On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 € pour chaque résultat
« Pile » et on perd 1 € pour chaque résultat
« Face ».

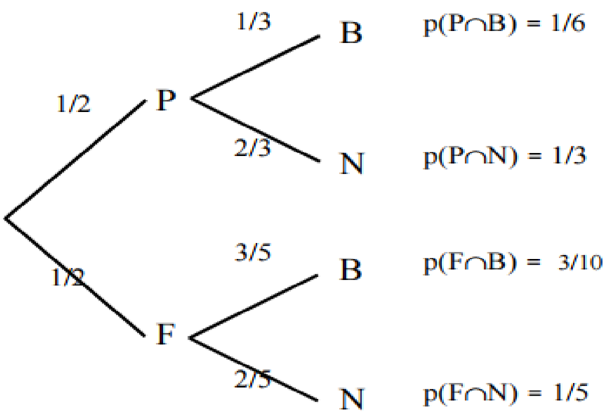
1) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le gain correspondant.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Quelle est la probabilité de l'événement :
« Obtenir un gain de 3 € » ? On note cette probabilité p(X = 3).
Verifier que la loi de probabilité de X est:

Gain x_i	$x_1=-3$	$x_2=0$	$x_3=3$	$x_4=6$
Probabilité $p_i=p(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Exercice15: Un joueur lance un dé : si le numéro est un nombre premier, le joueur gagne une somme égale au Nombre considéré (en euros) ; sinon il perd ce même nombre d'euros.
1°) Si X est le gain algébrique réalisé, donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance Mathématique et son écart-type.
2°) Le jeu est-il favorable au joueur ?

3) CONDITIONNEMENT

Exemple : On jette une pièce.
▪ Si on obtient pile, on tire une boule dans l'urne P contenant 1 boule blanche et 2 boules noires.
▪ Si on obtient face, on tire une boule dans l'urne F contenant 3 boules blanches et 2 boules noires.
On peut représenter cette expérience par l'arbre pondéré ci-dessous :



« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien
Bon courage