

Exercices d'applications et de réflexions sur Structures algébriques

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences maths

**Exercices AVEC SOLUTIONS**

**Structures algébriques(partie2)**

**Groupe anneau corps**

**Exercice 1:** on pose  $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  et  $\forall (x; y) \in I^2$

On muni  $I$  de la loi de composition définie par :

$$x * y = \arctan(-1 + \tan x + \tan y)$$

Montrer que  $(I; *)$  est un groupe commutatif

**Solution :** 1) soit  $(x; y) \in I^2$

$$x * y = \arctan(-1 + \tan x + \tan y) = \arctan(-1 + \tan y + \tan x)$$

Donc  $x * y = y * x$  et par suite  $*$  est commutatif

2) soit  $(x; y; z) \in I^3$

$$(x * y) * z = (\arctan(-1 + \tan x + \tan y)) * z$$

$$= \arctan(-1 + \tan((\arctan(-1 + \tan x + \tan y)) + \tan z))$$

$$= \arctan(-1 + (-1 + \tan x + \tan y) + \tan z))$$

$$= \arctan(-2 + \tan x + \tan y + \tan z)$$

Et on a :

$$x * (y * z) = x * (\arctan(-1 + \tan y + \tan z))$$

$$= \arctan(-1 + \tan x + \tan((\arctan(-1 + \tan y + \tan z))))$$

$$= \arctan(-1 + \tan x + (-1 + \tan y + \tan z))$$

$$= \arctan(-2 + \tan x + \tan y + \tan z)$$

Donc :  $(x * y) * z = x * (y * z)$

par suite  $*$  est associative

3)  $\forall x \in I$  on a :

Prof/ATMANI NAJIB

$$x * \frac{\pi}{4} = \arctan\left(-1 + \tan x + \tan \frac{\pi}{4}\right) = \arctan(-1 + \tan x + 1)$$

$$x * \frac{\pi}{4} = \arctan(\tan x) = x$$

Et puisque  $*$  est commutatif on a aussi :  $\frac{\pi}{4} * x = x$

$$\text{Et puisque : } \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

alors :  $*$  possède un élément neutre  $e = \frac{\pi}{4}$

4) soit :  $x \in I$  on cherche  $x' \in I$  tel que :

$$x * x' = \frac{\pi}{4} ?$$

$$x * x' = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arctan(-1 + \tan x + \tan x') = \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -1 + \tan x + \tan x' = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \tan x + \tan x' = 2$$

$$\Leftrightarrow \tan x' = 2 - \tan x \Leftrightarrow x' = \arctan(2 - \tan x) \in I$$

Donc : tout élément de  $I$  possède un symétrique pour  $*$  dans  $I$ .

Finalelement :  $(I; *)$  est un groupe commutatif

**Exercice 2:** on muni  $\mathbb{R}^2$  d'une loi de composition interne  $T$  définit par :

$$(x; y) T (x'; y') = (x + x'; y e^{x'} + y' e^{-x})$$

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall (x'; y') \in \mathbb{R}^2$$

Monter que  $(\mathbb{R}^2; T)$  groupe non commutatif

**Solution :** a) soient  $(x; y)$ ;  $(x'; y')$  et  $(x''; y'')$  des éléments de  $\mathbb{R}^2$

$$((x; y)T(x'; y'))T(x''; y'') = (x+x'; ye^{x'} + y'e^{-x})T(x''; y'')$$

$$= (x+x'+x''; (ye^{x'} + y'e^{-x})e^{x''} + y''e^{-(x+x')})$$

$$= (x+x'+x''; ye^{-(x'+x'')} + y'e^{-x+x''} + y''e^{-(x+x')})$$

$$(x; y)T((x'; y')T(x''; y'')) = (x; y)T(x'+x''; ye^{x'} + y''e^{-x'})$$

$$= (x+x'+x''; (ye^{x''} + y''e^{-x'})e^{-x} + ye^{x'+x''})$$

$$= (x+x'+x''; y'e^{(x''-x)} + y''e^{-(x+x')} + ye^{x'+x''})$$

Donc :

$$((x; y)T(x'; y'))T(x''; y'') = (x; y)T((x'; y')T(x''; y''))$$

donc :  $T$  est associative

b) l'élément neutre de  $T$  ?

$(e_1; e_2)$  l'élément neutre de  $T$  ssi  $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x; y)T(e_1; e_2) = (x; y) \text{ et } (e_1; e_2)T(x; y) = (x; y)$$

$$(x; y)T(e_1; e_2) = (x; y) \Leftrightarrow (x+e_1; ye^{e_1} + e_2e^{-x}) = (x; y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+e_1 = x \\ ye^{e_1} + e_2e^{-x} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2e^{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Et on a : } (0; 0)T(x; y) = (x; y)$$

Donc :  $(0; 0)$  est l'élément neutre de  $T$

c) le symétrique d'un élément dans  $T$  ?

soient  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  montrons l'existence de

$(x'; y') \in \mathbb{R}^2$  tel que :  $(x; y)T(x'; y') = (0; 0)$  et

$$(x'; y')T(x; y) = (0; 0)$$

$$(x; y)T(x'; y') = (0; 0) \Leftrightarrow (x+x'; ye^{x'} + y'e^{-x}) = (0; 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+x' = 0 \\ ye^{x'} + y'e^{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ (y+y')e^{-x} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y+y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

On a aussi :  $(-x; -y)T(x; y) = (0; 0)$

Donc :  $(-x; -y)$  est le symétrique de l'élément  $(x; y)$  dans  $T$

Donc :  $(\mathbb{R}^2; T)$  est un groupe

Et puisque :  $(1; 1)T(1; 0) = (2; e)$  et  $(1; 0)T(1; 1) = (2; e^{-1})$

Alors :  $(1; 1)T(1; 0) \neq (1; 0)T(1; 1)$

donc :  $T$  n'est pas commutative

**Exercice 3:** soit  $(G; \cdot)$  un groupe noté

multiplicativement et tel que :  $(a; b) \in G^2$

$(ab)^2 = a^2b^2$  Montrer que ce groupe est commutatif

**Solution :** par hypothèse on a que les éléments  $(a; b) \in G^2$  :  $abab = aabb$

Mais dans un groupe tout élément étant régulier on peut simplifier à gauche par  $a$  et à droite par  $b$   
Donc :  $abab = aabb$

Donc  $ba = ab$  et par suite ce groupe est commutatif

$$x = b * a'$$

**Exercice 4:** (étude d'un groupe fini)

Montrer que  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; +)$  et  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} - \{0\}; \times)$  sont deux groupes commutatifs

**Solution :**

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

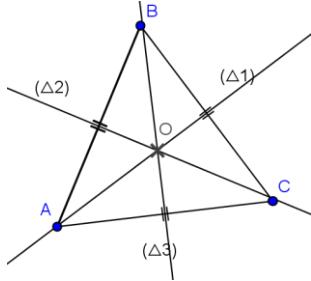
Tableau de :  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; +)$

Tableau de :  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; \times)$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

**Exercice 5:** (étude d'un groupe fini)

(ABC) un triangle équilatéral



$(\Delta_1)$  la médiatrice du segment  $[BC]$

$(\Delta_2)$  la médiatrice du segment  $[AB]$

$(\Delta_3)$  la médiatrice du segment  $[AC]$

Soit  $\zeta$  l'ensemble des transformations

suivantes :  $\zeta = \{r_1; r_2; r_3; s_1; s_2; s_3\}$

$r_1$  la rotation de centre O et d'angle  $0$  :  $r_1(O; 0)$

$r_2$  la rotation de centre O et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  :  $r_2(O; \frac{2\pi}{3})$

$r_3$  la rotation de centre O et d'angle  $\frac{4\pi}{3}$  :  $r_3(O; \frac{4\pi}{3})$

$s_1$  la symétrie axial d'axe:  $(\Delta_1)$

$s_2$  la symétrie axial d'axe :  $(\Delta_2)$

$s_3$  la symétrie axial d'axe :  $(\Delta_3)$

Montrer que :  $(\zeta; \circ)$  est un groupe

**Solution :** on utilisant la loi de composition des transformation  $\circ$  on trouve le tableau suivant :

$\circ$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$
$r_1$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$
$r_2$	$r_2$	$r_3$	$r_1$	$s_3$	$s_1$	$s_2$
$r_3$	$r_3$	$r_1$	$r_2$	$s_2$	$s_3$	$s_1$
$s_1$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$r_1$	$r_2$	$r_3$
$s_2$	$s_2$	$s_3$	$s_1$	$r_3$	$r_1$	$r_2$
$s_3$	$s_3$	$s_1$	$s_2$	$r_2$	$r_3$	$r_1$

**Remarque :** si  $(G; *)$  est un groupe fini alors chaque élément de  $G$  se trouve sur le tableau une fois dans chaque ligne et dans chaque colonne

**Exercice 6:** soit  $(G; \cdot)$  un groupe noté

multiplicativement et  $e$  l'élément neutre de  $G$

1) Montrer que si:  $\forall (a; b) \in G^2 : (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$  alors le groupe  $G$  est commutatif

2) Montrer que si:  $\forall x \in G : x^2 = e$  alors le groupe  $G$  est commutatif

**Solution : 1)** soit  $(a; b) \in G^2$

par hypothèse on a:  $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$

donc:  $a \cdot b \cdot a \cdot b = a \cdot a \cdot b \cdot b$  puisque  $G$  un groupe tout élément de  $G$  est régulier

Donc:  $b \cdot a = a \cdot b$

Par suite ce groupe est commutatif

2) soient les éléments  $(x; y) \in G^2$

par hypothèse on a:  $xyxy = e$

on multipliant à gauche par  $x$  et à droite par  $y$

Donc:  $xxxyyy = xey \Rightarrow x^2yxy^2 = xey \Rightarrow eyxe = xy$

$\Rightarrow yx = xy$  Par suite ce groupe est commutatif

**Exercice 7:** (on considère l'ensemble des

matrices suivante :  $E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$

Montrer que  $E$  n'est pas un sous-groupe de  $(M_2(\mathbb{R}); +)$

**Solution :** soit  $M_a \in E$  et  $M_b \in E$

Donc :  $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  et  $M_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$M_a \times M_b \in E$  ?

$$M_a \times M_b = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & b \\ 2 & 2b \end{pmatrix} \notin E$$

donc :  $E$  n'est une partie stable de  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

donc :  $E$  n'est pas un sous-groupe de  $(M_2(\mathbb{R}); +)$

**Exercice 8:** soit  $I$  l'ensemble des nombres entiers relatifs pairs

montrer que  $(I; +)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}; +)$

**Solution :** on a :  $I \subset \mathbb{Z}$

(1)  $I \neq \emptyset$  car  $0 = 2 \times 0 \in I$

(2)  $\forall (x, y) \in I^2; x - y \in I$  ?

Soient :  $x \in I$  et  $y \in I$  donc :  $x = 2 \times p$  et  $y = 2 \times q$

$$x - y = 2 \times p - 2 \times q = 2 \times (p - q) = 2 \times k \in I$$

Donc :  $(I; +)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}; +)$  d'après

La propriété caractéristique d'un sous-groupe

**Exercice 9:** montrer que :  $H = \{3^m 7^n / m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}\}$

est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}^*; \times)$

**Solution :** on a :  $H \subset \mathbb{R}^*$  car  $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2; 3^m 7^n \in \mathbb{R}^*$

(1)  $H \neq \emptyset$  car  $3^0 7^0 = 1 \in H$

(2)  $\forall (x, y) \in H^2; x \times y^{-1} \in H$  ?

Soient :  $x \in H$  et  $y \in H$  donc :

$$\exists (n, m) \in \mathbb{Z}^2; x = 3^m 7^n$$

$$\text{Et } \exists (p, q) \in \mathbb{Z}^2; y = 3^p 7^q$$

$$x \times y^{-1} = 3^m 7^n \times (3^p 7^q)^{-1} = 3^m 7^n \times 3^{-p} 7^{-q}$$

$$x \times y^{-1} = 3^m 7^n \times (3^p 7^q)^{-1} = 3^{m-p} 7^{n-q} = 3^e 7^f$$

Avec :  $(e, f) \in \mathbb{Z}^2$  donc :

$$(2) \forall (x, y) \in H^2; x \times y^{-1} \in H$$

Donc :  $(H; \times)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}^*; \times)$

D'après la propriété caractéristique d'un sous-groupe

**Exercice 10:**  $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

Montrer que  $(U; \times)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*; \times)$

**Solution :**

1) Un nombre complexe de module 1 est non nul et donc  $U \subset \mathbb{C}^*$

Et 1 a pour module 1 et donc  $1 \in U$ .

Soit alors  $(z_1; z_2) \in U^2$ .

$$z_1 \times z_2^{-1} \in U ???$$

$$|z_1 \times z_2^{-1}| = |z_1| \times |z_2^{-1}| = |z_1| \times |z_2|^{-1} = 1 \times 1 = 1 \times 1 \in U$$

**Exercice 11:** on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} \ln a & 0 \\ 0 & \ln a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}^{+*} \right\}$$

Monter que  $E$  est un sous-groupe de  $(M_2(\mathbb{R}); +)$

**Solution :** 1) on a  $M_e = \begin{pmatrix} \ln e & 0 \\ 0 & \ln e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Donc :  $I_2 \in E$  donc :  $E \neq \emptyset$

2) soit  $M_a \in E$  et  $M_b \in E$   $M_a - M_b \in E$  ?

$$M_a - M_b = \begin{pmatrix} \ln a & 0 \\ 0 & \ln a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ln b & 0 \\ 0 & \ln b \end{pmatrix}$$

$$M_a - M_b = \begin{pmatrix} \ln a - \ln b & 0 \\ 0 & \ln a - \ln b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \ln \frac{a}{b} \end{pmatrix} = M_{a/b}$$

Et puisque  $a \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $b \in \mathbb{R}^{+*}$  alors  $a/b \in \mathbb{R}^{+*}$

Donc :  $M_a - M_b = M_{a/b} \in E$

Donc :  $E$  est un sous-groupe de  $(M_2(\mathbb{R}); +)$

**Exercice 12 :** soit  $(G; \cdot)$  un groupe noté

multiplicativement et soit  $a \in G$

On pose :  $C_a = \{x \in G / ax = xa\}$

(centralisateur de  $a$ )

Et :  $Z(G) = \{x \in G / \forall y \in G : xy = yx\}$  (centre de  $G$ )

Montrer que  $C_a$  et  $Z(G)$  sont des sous-groupes

de :  $(G; \cdot)$

**Solution :** 1) Montrons que  $C_a$  est un sous-groupe de  $(G; \cdot)$  ?

Soit  $e$  l'élément neutre du groupe  $(G; \cdot)$

a) on a :  $ae = ea = a$  donc  $e \in C_a$  donc :  $C_a \neq \emptyset$

b) soient les éléments  $(x; y) \in C_a^2$

montrons que :  $xy^{-1} \in C_a$  cad montrons que :

$$a(xy^{-1}) = (xy^{-1})a \quad ??$$

On a  $(x; y) \in C_a^2$  donc :  $\begin{cases} ax = xa(1) \\ ay = ya(2) \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow (ay)^{-1} = (ya)^{-1} \Leftrightarrow y^{-1}a^{-1} = a^{-1}y^{-1}$$

$$\Rightarrow y^{-1}a^{-1} = a^{-1}y^{-1} \text{ et } ax = xa(1)$$

$$\Rightarrow axy^{-1}a^{-1} = xaa^{-1}y^{-1} \Rightarrow axy^{-1}a^{-1} = xey^{-1}$$

$$\Rightarrow axy^{-1}a^{-1} = xy^{-1} \Rightarrow axy^{-1}a^{-1}a = xy^{-1}a$$

$$\Rightarrow axy^{-1}e = xy^{-1}a \Rightarrow axy^{-1} = xy^{-1}a \text{ donc } xy^{-1} \in C_a$$

Donc :  $C_a$  est un sous-groupe de  $(G; \cdot)$

2) Montrons que  $Z(G)$  est un sous-groupe de  $(G; \cdot)$  ?

a) on a :  $\forall y \in G : ey = ye$  donc  $e \in Z(G)$

donc :  $Z(G) \neq \emptyset$

b) soient les éléments  $(a; b) \in Z(G)^2$

montrons que :  $ab^{-1} \in Z(G)$  cad montrons que :

$$(ab^{-1})y = y(ab^{-1}) \quad \forall y \in G ??$$

On a  $(a; b) \in Z(G)^2$  donc :  $\begin{cases} ay = ya(1) \\ by = yb(2) \end{cases}$

De la même façon que précédemment on trouve

$$(ab^{-1})y = y(ab^{-1}) \quad \forall y \in G \text{ donc } ab^{-1} \in Z(G)$$

Donc :  $Z(G)$  est un sous-groupe de  $(G; \cdot)$

**Exercice 13 :** On munit  $\mathbb{R}$  de la loi de composition interne définie par :

$$x * y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}; \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

1) soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Montrer que  $f$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{R}; +)$

vers  $(\mathbb{R}; *)$

2) En déduire la structure de  $(\mathbb{R}; *)$

**Solution :** 1) a)  $f$  est une fonction continue et

dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

Par suite  $f$  est une fonction bijective de  $\mathbb{R}$

Dans  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

b) soient  $x; y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$$

$$f(x)*f(y) = f(x)\sqrt{f(y)^2 + 1} + f(y)\sqrt{f(x)^2 + 1}$$

Et on a :

$$f(y)^2 + 1 = 1 + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2y} + 2 + e^{-2y}}{4} = \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2$$

Donc :  $\sqrt{f(y)^2 + 1} = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$  de même on a :

$$\sqrt{f(x)^2 + 1} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{Donc :}$$

$$f(x)*f(y) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$$

$$f(x)*f(y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$$

Finalement :  $f(x+y) = f(x)*f(y)$

Donc :  $f$  est un homomorphisme bijectif de  $(\mathbb{R};+)$  vers  $(\mathbb{R};*)$  donc un isomorphisme

2) puisque :  $f$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{R};+)$  vers  $(\mathbb{R};*)$  et  $(\mathbb{R};+)$  est un groupe commutatif

Alors :  $(\mathbb{R};*)$  est un groupe commutatif

**Exercice 14 :** on considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ a + b\sqrt{3} / (a; b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$$

1) Monter que  $(E;+)$  est un groupe commutatif

2) Monter que  $E$  est une partie stable de  $(\mathbb{Q};\times)$

3) Monter que  $(E;+;\times)$  est un anneau commutatif unitaire

**Solution :** 1) Montrons que  $(E;+)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Q};+)$  ?

On a  $E \subset \mathbb{Q}$  et on a  $1 = 1 + 0\sqrt{3}$  donc :  $1 \in E$

donc :  $E \neq \emptyset$

soit  $x \in E$  et  $y \in E$  montrons  $x - y \in E$  ?

$$x \in E \Leftrightarrow \exists (a; b) \in \mathbb{Q}^2 / x = a + b\sqrt{3}$$

$$y \in E \Leftrightarrow \exists (c; d) \in \mathbb{Q}^2 / x = c + d\sqrt{3}$$

$$x - y = (a + b\sqrt{3}) - (c + d\sqrt{3}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{3}$$

On a  $(a; b; c; d) \in \mathbb{Q}^4$  donc :  $a - c \in \mathbb{Q}$  et  $b - d \in \mathbb{Q}$

Donc :  $x - y = a'' + b''\sqrt{3}$  par suite :  $x - y \in E$

Donc :  $(E;+)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Q};+)$

donc  $(E;+)$  est un groupe

2) Montons que  $E$  est une partie stable

de  $(\mathbb{Q};\times)$  ?

soit  $x \in E$  et  $y \in E$  montrons  $x \times y \in E$  ?

$$x - y = (a + b\sqrt{3}) \times (c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}$$

puisque  $(a; b; c; d) \in \mathbb{Q}^4$  alors :  $ac + 3bd \in \mathbb{Q}$  et

$ad + bc \in \mathbb{Q}$  donc :  $x \times y \in E$

$$: E = \left\{ a + b\sqrt{3} / (a; b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$$

Donc :  $E$  est une partie stable de  $(\mathbb{Q};\times)$

3) on a  $(\mathbb{Q};+;\times)$  est un anneau commutatif

Donc La multiplication est commutative et distributive par rapport à l'addition dans  $E$

Par suite  $(E;+;\times)$  un anneau commutatif

Et  $1 = 1 + 0\sqrt{3}$  donc :  $1 \in E$  et 1 est l'élément

neutre de la multiplication dans  $(\mathbb{Q};\times)$

Donc : 1 est l'élément neutre de la multiplication dans  $E$

Conclusion :  $(E;+;\times)$  est un anneau commutatif unitaire

**Exercice 15:** Soit  $(A; +; \times)$  un anneau.

Tel que :  $x^2 = x \quad \forall x \in A$   $((A; +; \times))$  s'appelle anneau De Boole)

1) calculer  $(x+x)^2$

2) en déduire que :  $x+x = 0_A$  ( $0_A$  est l'élément neutre de  $(A; +)$ )

3) soient :  $x \in A$  et  $y \in A$

a) calculer  $(x+y)^2$  en fonction de  $x$  et  $y$

b) en déduire que  $(A; +; \times)$  est commutatif

c) en déduire :  $xy(x+y)$

4) on suppose que :  $x \neq 0_A$  et  $y \neq 0_A$  et  $y \neq x$

a) montrer que : a)  $x+y \neq 0_A$  b)  $x+y \neq y$

5) déterminer le tableau de la somme pour les éléments :  $0_A$  ;  $x$  ;  $y$  ;  $x+y$

**Solution :** 1) soit  $x \in A$  on a :

$$(x+x)^2 = (x+x)(x+x) = xx + xx + xx + xx$$

$$(x+x)^2 = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x+x+x+x \text{ car } x^2 = x$$

$$\text{Donc : } (x+x)^2 = x+x+x+x$$

2) a) soient :  $x \in A$  et  $y \in A$

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = xx + xy + yx + yy$$

$$(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$$

$$(x+y)^2 = x+xy+yx+y \text{ car } x^2 = x \quad \forall x \in A$$

b) on a :  $(x+y)^2 = x+xy+yx+y$  et  $(x+y)^2 = x+y$

$$\text{donc : } x+xy+yx+y = x+y$$

donc :  $xy+yx = 0_A$  et puisque  $xy+yx = 0_A$

Alors :  $xy+yx = xy+xy$  donc  $yx = xy$

Donc :  $(A; +; \times)$  est commutatif

c) déduction de :  $xy(x+y)$

soient :  $x \in A$  et  $y \in A$

$$xy(x+y) = xyx + xy^2 = xxy + xy^2 = x^2y + xy^2 = xy + xy$$

et puisque  $xy+xy = 0_A$  alors :  $xy(x+y) = 0_A$

4) on suppose que :  $x \neq 0_A$  et  $y \neq 0_A$  et  $y \neq x$

a) on suppose que  $x+y = 0_A$  et puisque  $x+x = 0_A$

Alors :  $x+y = x+x$  cad  $y = x$  contradiction

Donc :  $x+y \neq 0_A$

b) on suppose que  $x+y = y$  donc :  $x = 0_A$

Contradiction donc  $x+y \neq y$

5) on a :  $x+x = 0_A$  et  $x+0_A = 0_A$  et  $x = x$

+	$0_A$	$x$	$y$	$x+y$
$0_A$	$0_A$	$x$	$y$	$x+y$
$x$	$x$	$0_A$	$x+y$	$y$
$y$	$y$	$x+y$	$0_A$	$x$
$x+y$	$x+y$	$y$	$x$	$0_A$

**Exercice 16:** soit  $(K, +, \times)$  un corps finit :

$$K = \{0; e; x_1; x_2; \dots; x_m\} ; m \in \mathbb{N}^*$$

Avec :  $0$  (resp.  $e$ ) l'élément neutre pour  $+$  (resp.  $\times$ ).

1) montrer que :  $-e$  et  $e$  sont les seuls éléments de  $K$  qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi  $\times$

2) montrer que le produit de tous les éléments de  $K$  est égal à  $-e$

3) on considérant le corps  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +; \times)$  avec  $n$

premier montrer que :  $\overline{(n-1)!+1} \equiv 0[n]$

**Solution :1)**

$$\forall x \in K - \{0\} \quad x = x^{-1} \Leftrightarrow x \times x = x^{-1} \times x \Leftrightarrow x^2 = e$$

$$\Leftrightarrow x^2 - e = 0 \Leftrightarrow x^2 - e^2 = 0 \Leftrightarrow (x - e)(x + e) = 0$$

$\Leftrightarrow x = -e$  ou  $x = e$  car  $(K, +, \times)$  un corps

2)puisque :  $-e$  et  $e$  sont les seuls élément de  $K$  qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi  $\times$

Alors :  $K - \{0\} = \{-e; e; a_1; a_1^{-1}; a_2; a_2^{-1}; \dots; a_p; a_p^{-1}\}$

$$\text{Donc : } -e \times e \times a_1 \times a_1^{-1} \times a_2 \times a_2^{-1} \dots \times a_p \times a_p^{-1} = \\ = -e \times e \times e \times \dots \times e = -e$$

$$3) \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \dots; \bar{n-1}\} \text{ (un corps)}$$

D'après les questions précédentes on a :

$$\bar{1} \times \bar{2} \times \dots \times \bar{n-1} = \bar{1} \text{ donc :}$$

$$\overline{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)} = \bar{1}$$

$$\text{donc : } \overline{(n-1)!} + 1 \equiv 0[n]$$

$$xa = ya \Rightarrow x = y$$

**Exercice17:** on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1)Monter que  $(E; +)$  est un groupe commutatif

2)Monter que  $E$  est une partie stable de  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

3)soit  $f$  l'application qui associe à chaque

matrice  $M_{(a;b)}$  de  $E - \{0_2\}$  le nombre complexe :

$$a + ib\sqrt{2} \text{ de } \mathbb{C}^*$$

a) Monter que  $f$  est un morphisme bijectif de

$(E - \{0_2\}, \times)$  dans  $(\mathbb{C}^*; \times)$

b)en déduire la structure de  $(E - \{0_2\}, \times)$

4) Monter que  $(E; +; \times)$  est un corps

**Solution :** 1)on a :  $M_{(0;0)} = 0_2 \in E$  donc :  $E \neq \emptyset$

Et on a  $E \subset (M_2(\mathbb{R}); \times)$

soit  $M_{(a;b)} \in E$  et  $M_{(c;d)} \in E$

$$\text{Donc : } M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ et } M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$M_{(a;b)} - M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & -2(b-d) \\ b-d & a-c \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc : } M_{(a;b)} - M_{(c;d)} = M_{(a-c; b-d)}$$

Et puisque :  $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$  alors :  $a - c \in \mathbb{R}$  et

$$b - d \in \mathbb{R} \text{ donc : } M_{(a;b)} - M_{(c;d)} \in E$$

Donc :  $(E; +)$  est un sous-groupe de  $(M_2(\mathbb{R}); +)$

donc  $(E; +)$  est un groupe commutatif

$$2) M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} =$$

$$M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} ac - 2bd & -2(ad + bc) \\ ad + bc & ac - 2bd \end{pmatrix} = M_{(ac - 2bd; ad + bc)}$$

Et puisque :  $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$  alors :  $ac - 2bd \in \mathbb{R}$  et

$$ad + bc \in \mathbb{R} \text{ donc : } M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} \in E$$

$E$  est une partie stable de  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

3)soient :  $M_{(a;b)} \in E$  et  $M_{(c;d)} \in E$

$$f(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)}) = f(M_{(ac - 2bd; ad + bc)})$$

$$= ac - 2bd + i(ad + bc)\sqrt{2}$$

$$f(M_{(a;b)}) \times f(M_{(c;d)}) = (a + ib\sqrt{2})(c + id\sqrt{2})$$

$$= ac - 2bd + i(ad + bc)\sqrt{2} = f(M_{(ac - 2bd; ad + bc)})$$

$$= f(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)})$$

$f$  est un morphisme de  $(E - \{0_2\}, \times)$  dans  $(\mathbb{C}^*; \times)$

Soit  $x + iy \in \mathbb{C}^*$  avec  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

On cherche  $M_{(a;b)} \in E$  tel que :  $f(M_{(a;b)}) = x + iy$

$$f(M_{(a,b)}) = x + iy \Leftrightarrow a + ib\sqrt{2} = x + iy$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b\sqrt{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \frac{y}{\sqrt{2}} \end{cases} (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ Existe et il}$$

est unique

donc :  $f$  est un morphisme bijectif de

$(E - \{0_2\}, \times)$  dans  $(\mathbb{C}^*; \times)$

b)  $(E - \{0_2\}, \times)$  et  $(\mathbb{C}^*; \times)$  sont isomorphes

et  $(\mathbb{C}^*; \times)$  un groupe commutatif donc aussi

et on a  $(E - \{0_2\}, \times)$  un groupe commutatif

4) La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans  $M_2(\mathbb{R})$  et  $E$  est une partie stable

de  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$  donc La multiplication est

distributive par rapport à l'addition dans  $E$

Donc on a :  $(E; +)$  est un groupe commutatif et

$(E - \{0_2\}, \times)$  un groupe commutatif

La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans  $E$

Conclusion :  $(E; +; \times)$  est un corps

**Exercice 18:** Soit  $(K; +; \times)$  un corps.

On note :  $0_K$  l'élément neutre de  $(K; +)$  et  $1_K$

l'élément neutre de  $(K; \times)$  et on suppose qu'il

existe un homomorphisme  $f$  bijectif de  $(K; +)$

vers  $(K - \{0_K\}; \times)$

1) on suppose que  $1_K + 1_K = 0_K$

montrer que :  $f(K) = \{1_K\}$

2) on suppose que :  $1_K + 1_K \neq 0_K$  et on pose :

$$\alpha = f^{-1}(1_K) \text{ et } \beta = f^{-1}(-1_K)$$

a) montrer que :  $\alpha + \alpha = \beta + \beta$

b) en déduire que  $\alpha = \beta$

3) en déduire qu'il n'existe pas

d'homomorphisme  $f$  bijectif de  $(K; +)$  vers

$(K - \{0_K\}; \times)$

**Solution :** 1) on suppose que  $1_K + 1_K = 0_K$

soit  $x \in K$  on a donc :  $x \times (1_K + 1_K) = x \times 0_K$

donc :  $x \times 1_K + x \times 1_K = x \times 0_K$

donc :  $x + x = 0_K$  donc :  $f(x + x) = f(0_K)$

puisque  $f$  homomorphisme bijectif de  $(K; +)$  vers

$(K - \{0_K\}; \times)$  on a donc :  $f(x) \times f(x) = 1_K$

donc :  $(f(x))^2 = 1_K$  donc :  $(f(x) - 1_K)(f(x) + 1_K) = 0_K$

donc :  $f(x) = 1_K$  ou  $f(x) = -1_K = 1_K$  car

$$1_K + 1_K = 0_K$$

donc :  $\forall x \in K f(x) = 1_K$  donc :  $f(K) = \{1_K\}$

2) a) on a :  $1_K + 1_K \neq 0_K$  et  $\alpha = f^{-1}(1_K)$  et  $\beta = f^{-1}(-1_K)$

$$\alpha = f^{-1}(1_K) \Leftrightarrow f(\alpha) = 1_K \text{ et } \beta = f^{-1}(-1_K) \Leftrightarrow f(\beta) = -1_K$$

$$\text{donc : } f(\alpha + \alpha) = (f(\alpha))^2 = (1_K)^2 = 1_K$$

$$\text{et } f(\beta + \beta) = (f(\beta))^2 = (-1_K)^2 = 1_K$$

$$\text{donc : } f(\alpha + \alpha) = f(\beta + \beta)$$

donc :  $\alpha + \alpha = \beta + \beta$  car  $f$  bijectif

$$\text{b) on a : } \alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) = 0_K$$

$$\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta) \times (1_K + 1_K) = 0_K$$

$$\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0_K \text{ ou } 1_K + 1_K = 0_K$$

$\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0_K$  car  $1_K + 1_K \neq 0_K$

$\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

3) s'il existe un homomorphisme  $f$  bijectif de

$(K; +)$  vers  $(K - \{0_K\}; \times)$  on alors deux cas :

1cas :  $1_K + 1_K = 0_K$  d'après 1) on a :

$$\forall x \in K \quad f(x) = 1_K \Leftrightarrow \forall x \in K; f(x) = f(0_K)$$

Puisque  $f$  bijectif :  $\forall x \in K \quad x = 0_K$

Cad  $K = \{0_K\}$  et donc :  $K - \{0_K\} = \emptyset$

contradiction

2cas :  $1_K + 1_K \neq 0_K$  d'après 2) et on posons :

$$\alpha = f^{-1}(1_K) \text{ et } \beta = f^{-1}(-1_K) \text{ on trouve : } \alpha = \beta$$

Cad  $f^{-1}(-1_K) = f^{-1}(1_K)$  et Puisque  $f^{-1}$  bijectif

Alors :  $-1_K = 1_K$  cad  $1_K + 1_K = 0_K$  contradiction

Avec le fait que  $1_K + 1_K \neq 0_K$

Donc : qu'il n'existe pas d'homomorphisme  $f$

bijectif de  $(K; +)$  vers  $(K - \{0_K\}; \times)$

### Exercice19:

1) On munit de la loi de composition interne définie par :  $x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1); \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que  $*$  est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre.

2) On munit  $\mathbb{R}^{+*}$  de la loi de  $*$  composition interne

définie par :  $x * y = \sqrt[3]{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que  $*$  est commutative, associative, et que 0 est élément neutre. Montrer que aucun élément de  $\mathbb{R}^{+*}$  n'a de symétrique pour  $*$

3) On munit  $\mathbb{R}$  de la loi de composition interne  $*$

définie par :  $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que l'application :  $x \rightarrow x^3$  est un

isomorphisme de  $(\mathbb{R}; *)$  vers  $(\mathbb{R}; +)$  En déduire que  $(\mathbb{R}; *)$  est un groupe commutatif

**Solution :** 1)  $x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$

$$= yx + (y^2 - 1)(x^2 - 1)$$

La loi est commutative

Pour montrer que la loi n'est pas associative, il suffit de trouver  $x, y, z \in \mathbb{R}$  et tels que :

$$x * (y * z) \neq (x * y) * z$$

1 sera l'élément neutre il ne faut pas prendre 1 dans  $x, y, z$  et.

Prenons, par exemple :  $x = 0; y = 2; z = 3$

$$x * (y * z) = 0 * (2 * 3) = 0 * (2 \times 3 + (2^2 - 1)(3^2 - 1))$$

$$= 0 * 30 = 0 \times 30 + (0^2 - 1)(30^2 - 1) = -899$$

$$(x * y) * z = (0 * 2) * 3 = 0 * 2 + (0^2 - 1)(2^2 - 1) * 3$$

$$= -3 * 3 = 0 * 2 + ((-3)^2 - 1)(3^2 - 1) = -9 + 8^2 = 55$$

La loi n'est pas associative

$$1 * x = 1x + (1^2 - 1)(x^2 - 1) = x$$

De plus, comme la loi est commutative

$$x * 1 = 1 * x$$

On a bien  $x * 1 = 1 * x = x$ , 1 est l'élément neutre.

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y * x$$

La loi est commutative.

$$(x * y) * z = (\sqrt{x^2 + y^2}) * z = (\sqrt{x^2 + y^2}) * z = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2}$$

$$(x * y) * z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

En reprenant le calcul ci-dessus en changeant

$$\text{en } (x, y, z) \text{ en } (y, z, x) \quad (y * z) * x = \sqrt{y^2 + z^2 + x^2}$$

Comme  $*$  est commutative :

$(y * z) * x = x * (y * z)$  Et finalement :

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

La loi est associative.

Remarque : On aurait pu calculer directement

$$x * (y * z)$$

$$0 * x = \sqrt{0^2 + x^2} = |x| \text{ car } x \geq 0$$

Comme \* est commutative :  $0 * x = x * 0 = x$

0 est l'élément neutre.

Supposons  $x$  qu'admette un symétrique  $y$

$$x * y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = |x| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$$

Or  $x > 0$  et  $y > 0$  donc :  $x * y = 0$  est impossible, pour tout  $x > 0$   $x$  n'a pas de symétrique.

3) On pose  $\rho(x) = x^3$  ET  $\rho'(x) > 0$  pour tout

$x \neq 0$  et est nul en 0,  $\rho$  est une fonction

strictement croissante  $\mathbb{R}$  de sur  $\mathbb{R}$ ,  $\rho$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . Il reste à montrer qu'il s'agit d'un morphisme.

$$\rho(x * y) = (x * y)^3 = \left(\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right)^3 = x^3 + y^3 = \rho(x) + \rho(y)$$

$\rho$  est un morphisme de  $(\mathbb{R}; *)$  dans  $(\mathbb{R}; +)$  et donc un isomorphisme de  $(\mathbb{R}; *)$  dans  $(\mathbb{R}; +)$  (puisque  $\rho$  est bijective).

$\rho^{-1}$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{R}; +)$  dans  $(\mathbb{R}; *)$

donc un morphisme,  $(\mathbb{R}; +)$  est un groupe commutatif

et l'image d'un groupe commutatif par un morphisme de groupe est un groupe.

$(\mathbb{R}; *)$  est un groupe.

**Exercice 20:** on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$G = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a^2 + b^2 = 1 \text{ et } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Monter que :  $G \neq \emptyset$

$$2) \text{ Monter que : } G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

3) Monter que  $G$  est une partie stable de  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

4) est ce que  $G$  est une partie stable de  $(M_2(\mathbb{R}); +)$  ?

$$5) \text{ on pose : } M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

calculer  $M^n(\theta) \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{ou : } M^n(\theta) = \underbrace{M(\theta) \times M(\theta) \times \dots \times M(\theta)}_{n \text{ fois}}$$

6) soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $G$  tel que :

$$f(\theta) = M(\theta)$$

a) Monter que  $f$  est un morphisme surjectif de  $(\mathbb{R}; +)$  dans  $(G; \times)$

b) en déduire la structure de  $(G; \times)$

$$7) \text{ soit l'ensemble : } U = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z| = 1 \right\}$$

$$a) \text{ Monter que : } U = \left\{ e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Monter que  $(U; \times)$  est un groupe commutatif

$$\text{Solution : } 1) \text{ on a : } M_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ et } 0^2 + 1^2 = 1$$

donc :  $G \neq \emptyset$

2)

$$M \in G \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ et } a^2 + b^2 = 1$$

$$\exists \theta \in \mathbb{R} / a = \cos \theta \text{ et } b = \sin \theta$$

$$\text{Donc : } M \in G \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$3) \text{soit: } M_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

Deux éléments de  $G$

$$M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

Donc :  $M_1 \times M_2 \in G$

Donc  $G$  est une partie stable de  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

$$4) \text{on a ; } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$$

Deux éléments de  $G$

$$\text{Et puisque : } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin G$$

$$\text{Car } 0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$$

Donc  $G$  n'est pas une partie stable de  $(M_2(\mathbb{R}); +)$

$$5) \text{on pose : } M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Calculons :  $M^n(\theta)$

$$M^2(\theta) = M(\theta) \times M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Montrons que :

$$M^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} = M(n\theta)$$

par récurrence sur  $\mathbb{N}^*$

$$a) \text{on a : } M^1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = M(1\theta)$$

la ppté est vraie pour  $n=1$

b) on suppose que :

$$M^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} = M(n\theta)$$

c) montrons que :

$$M^{n+1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos((n+1)\theta) & -\sin((n+1)\theta) \\ \sin((n+1)\theta) & \cos((n+1)\theta) \end{pmatrix} = M((n+1)\theta) ?$$

$$M^{n+1}(\theta) = M(\theta)M^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n\theta + \theta) & -\sin(n\theta + \theta) \\ \sin(n\theta + \theta) & \cos(n\theta + \theta) \end{pmatrix} = M((n+1)\theta)$$

Donc :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M^n(\theta) = M(n\theta)$

6)a) Soit  $(\theta_1; \theta_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{On a : } f(\theta_1 + \theta_2) = M(\theta_1 + \theta_2) = M(\theta_1) \times M(\theta_2)$$

$$\text{donc : } f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1) \times f(\theta_2)$$

donc :  $f$  est un morphisme de  $(\mathbb{R}; +)$  dans  $(G; \times)$

et on a :  $\forall M \in G \quad \exists \theta \in \mathbb{R} / f(\theta) = M(\theta)$

donc  $f$  est un morphisme surjectif de  $(\mathbb{R}; +)$  dans  $(G; \times)$

6)b) puisque  $f$  est un morphisme surjectif de  $(\mathbb{R}; +)$  dans  $(G; \times)$  on a  $f(G) = \mathbb{R}$  et on a aussi  $(\mathbb{R}; +)$  est un groupe commutatif alors aussi  $(G; \times)$  est un groupe commutatif

7) a) Montrons que :  $U = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$  ?

Soit  $z \in \mathbb{C}$  alors  $z = a + ib$  avec  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

$$z \in U \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow |a + ib| = 1$$

$$z \in U \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / a = \cos \theta \text{ et } b = \sin \theta \text{ et } z = a + ib$$

$z \in U \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} : z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$

Donc :  $U = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$

b) Montrons que  $(U; \times)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*; \times)$

on a  $U \subset \mathbb{C}^*$  et  $U \neq \emptyset$  car  $1 \in U$

Soient  $z_1 \in U$  et  $z_2 \in U$  montrons que

$z_1 \times z_2^{-1} \in U$  ?

$z_1 \in U \Leftrightarrow \exists \theta_1 \in \mathbb{R} : z_1 = e^{\theta_1 i}$

$z_2 \in U \Leftrightarrow \exists \theta_2 \in \mathbb{R} : z_2 = e^{\theta_2 i}$

On a :  $z_1 \times z_2^{-1} = e^{\theta_1 i} \times (e^{\theta_2 i})^{-1} = e^{\theta_1 i} \times e^{-\theta_2 i} = e^{(\theta_1 - \theta_2)i}$

Avec  $\theta_1 - \theta_2 \in \mathbb{R}$  donc :  $z_1 \times z_2^{-1} \in U$

Donc :  $(U; \times)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*; \times)$

Et puisque  $(\mathbb{C}^*; \times)$  est commutatif

Alors :  $(U; \times)$  est un groupe commutatif

$$2) M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} =$$

$$M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} ac - 2bd & -2(ad + bc) \\ ad + bc & ac - 2bd \end{pmatrix} = M_{(ac - 2bd; ad + bc)}$$

Et puisque :  $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$  alors :  $ac - 2bd \in \mathbb{R}$  et

$ad + bc \in \mathbb{R}$  donc :  $M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} \in E$

$E$  est une partie stable de  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

3) Soient :  $M_{(a;b)} \in E$  et  $M_{(c;d)} \in E$

$$f(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)}) = f(M_{(ac - 2bd; ad + bc)})$$

$$= ac - 2bd + i(ad + bc)\sqrt{2}$$

$$f(M_{(a;b)}) \times f(M_{(c;d)}) = (a + ib\sqrt{2})(c + id\sqrt{2})$$

$$= ac - 2bd + i(ad + bc)\sqrt{2} = f(M_{(ac - 2bd; ad + bc)})$$

$$= f(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)})$$

$f$  est un morphisme de  $(E - \{0_2\}, \times)$  dans  $(\mathbb{C}^*; \times)$

Soit  $x + iy \in \mathbb{C}^*$  avec  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

On cherche  $M_{(a;b)} \in E$  tel que :  $f(M_{(a;b)}) = x + iy$

$$f(M_{(a;b)}) = x + iy \Leftrightarrow a + ib\sqrt{2} = x + iy$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b\sqrt{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \frac{y}{\sqrt{2}} \end{cases} (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ Existe et il est unique}$$

donc :  $f$  est un morphisme bijectif de

$(E - \{0_2\}, \times)$  dans  $(\mathbb{C}^*; \times)$

b)  $(E - \{0_2\}, \times)$  et  $(\mathbb{C}^*; \times)$  sont isomorphes

et  $(\mathbb{C}^*; \times)$  un groupe commutatif donc aussi

et on a  $(E - \{0_2\}, \times)$  un groupe commutatif

4) La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans  $M_2(\mathbb{R})$  et  $E$  est une partie stable

de  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$  donc La multiplication est

distributive par rapport à l'addition dans  $E$   
Donc on a :

$(E; +)$  est un groupe commutatif et

$(E - \{0_2\}, \times)$  un groupe commutatif

La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans  $E$

Conclusion :  $(E; +; \times)$  est un corps

**Exercice 21:** Soit  $(A; +; \times)$  un anneau.

Et  $1_A$  est l'élément neutre de  $(A; \times)$

soient :  $a \in A$  et  $b \in A$  tels que :

a)  $ab + ba = 1_A$

b)  $a^2b + ba^2 = a$

1) montrer que :  $a^2b = ba^2$

2) montrer que :  $aba + aba = a$

3) en déduire que :  $ab = ba$

**Solution :** 1) on a :  $a^2b + ba^2 = a$

donc :  $a^2b + ba^2 = a 1_A$

donc :  $a^2b + ba^2 = a(ab + ba)$

donc :  $a^2b + ba^2 = a^2b + aba$

donc :  $ba^2 = aba(1)$

et on a :  $a^2b + ba^2 = a = 1_A a$

donc :  $a^2b + ba^2 = (ab + ba)a$

donc :  $a^2b + ba^2 = aba + ba^2$

donc :  $a^2b = aba(2)$

de (1) et (2) en déduit que :  $a^2b = ba^2$

2) d'après ce qui précéde on a :

$ba^2 = aba$  et  $a^2b = aba$

Donc :  $aba + aba = a^2b + ba^2$  et d'après b) on a  
 $aba + aba = a$

3) on a :  $(ab)(ab) = abab = (aba)b = (ba^2)b$

$(ba)(ba) = baba = b(aba) = b(a^2b)$

(Car :  $aba = a^2b$ )

Et on a :  $(ab)(ab) = (1_A - ba)(1_A - ba)$

$(ab)(ab) = 1_A - ba - ba + (ba)(ba)$

Donc :  $ba^2b = 1_A - ba - ba + ba^2b$

Car :  $(ab)(ab) = (ba)(ba) = ba^2b$

Donc :  $ba + ba = 1_A$  et puisque :  $ba + ab = 1_A$

Alors :  $ab = ba$

**Exercice 22:** Soit  $(K; +; \times)$  un corps.

On note :  $1_K$  l'élément neutre de  $(K; \times)$

Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $K - \{0_K\}$

Qui vérifient les conditions suivantes :

a)  $x + y = 1_K$       b)  $x^{-1} + y^{-1} = 1_K$

avec :  $x^{-1}$  le symétrique de  $x$  pour la loi  $\times$

1) montrer que :  $xy = yx = -1_K$

2) montrer que :  $x^4 + y^4 = 7.1_K$

Avec :  $7.1_K = \underbrace{1_K + 1_K + \dots + 1_K}_{7 \text{ fois}}$

**Solution :** 1) Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de

$K - \{0_K\}$  on a :  $xy = x(x^{-1} + y^{-1})y$

$xy = xx^{-1}y + xy^{-1}y = y + x = -1_K$

Donc :  $xy = yx = -1_K$

2) on a :  $1_K = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$

$1_K = x^2 - 1_K - 1_K + y^2$

Donc :  $x^2 + y^2 = 3.1_K$

Donc :  $9.1_K = (x^2 + y^2)^2$

Donc :  $9.1_K = x^4 + x^2y^2 + y^2x^2 + y^4$

Donc :  $9.1_K = x^4 + 1_K + 1_K + y^4$

Donc :  $x^4 + y^4 = 7.1_K$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

