Cours et **exercices d'applications et de réflexions sur Structures algébriques**

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

Structures algébriques(partie2)

Groupe anneau corps

I) Groupes .

1) Définition : Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne (notée $*$).
(G, $*$) est un groupe si et seulement si
1) $*$ est associative,
2) $*$ possède un élément neutre dans G
3) tout élément de G possède un symétrique pour $*$ dans G.
Si de plus, $*$ est commutative, le groupe (G, $*$) est dit commutatif ou abélien.

2) Exemples

1) •$(\mathbb{Z};+)$; $(\mathbb{Q};+)$; $(\mathbb{R};+)$; $(\mathbb{C};+)$; $(\mathbb{Q}^*;\times)$; $(\mathbb{R}^*;\times)$; $(\mathbb{C}^*;\times)$ sont des groupes commutatifs

•$(\mathbb{C};\times)$ n'est pas un groupe car 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{C}$ (pour ×).

•$(\mathbb{Z};\times)$ et $(\mathbb{N};+)$ ne sont pas des groupes car 2 n'a pas de symétrique

• $(V_2;+)$ et $(V_3;+)$ sont deux groupes commutatifs

• $(\mathcal{P}(E);\cap)$ n'est pas un groupe car une partie $A \neq E$ n'admet pas de symétrique

• $(\mathcal{P}(E);\cup)$ n'est pas un groupe car une partie $A \neq \varnothing$ n'admet pas de symétrique

•$(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+)$; $(\mathbb{R}_n[X];+)$ sont des groupes commutatifs

•$(M_2(\mathbb{R});+)$ et $(M_3(\mathbb{R});+)$ sont des groupes non commutatifs

Ex : $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$$A\times B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 5\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 5 & 9\end{pmatrix}$$

Donc on a : $A\times B \neq B\times A$

• L'ensemble des translations $(T_r;\circ)$ et l'ensemble des rotations de même centre O $(R_O;\circ)$ sont des groupes commutatifs

L'ensemble des transformations du plan : $(\mathrm{T};\circ)$ est un groupe

Remarque : soit : $(G;*)$ un groupe

1) on utilisant une notation additive on dit que : $(G;+)$ un groupe additif

a) $(a+b)+c=b+(a+c)$

b) on note 0 l'élément neutre

c)le symétrique de a appelé opposé de a on le note $-a$ dans ce cas on pose : $a+a=2a$

et $\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n fois}=na$ avec la convention :

$$\begin{cases}0a=0\\ 1a=a\\ n(-a)=-na\end{cases}$$

Et on vérifie alors les relations suivantes : $na+ma=(n+m)a$ et

$n\times(ma)=(n\times m)a=nma \quad \forall(n;m)\in\mathbb{Z}^2$

2) on utilusant une notation multiplicative on dit que : $(G;\times)$ un groupe multiplicative

a) $(a\times b)\times c = b\times(a\times c)$

b) on note 1 l'élément neutre

c)le symétrique de a on le note a^{-1}(l'inverse)

d) ce cas on pose : $a\times a = a^2$ et $\underbrace{a\times a\times ...\times a}_{nfois} = a^n$

avec la convention : $\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^1 = a \\ a^{-n}\left(a^{-1}\right)^n \end{cases}$ Et on vérifie

alors les relations suivantes : $a^n \times a^m = a^{n+m}$ et

$\left(a^n\right)^m = a^{n\times m} \quad \forall(n;m)\in\mathbb{Z}^2$

$(a\times b)^n = a^n \times b^n$ si le groupe est commutatif

$(a\times b)^n \neq a^n \times b^n$ si le groupe est non commutatif

(Dans le pratique on pourra supprimer le symbole $\times$ ou on le remplaçant par un point)

Exemple :on pose $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall(x;y)\in I^2$

On muni I de la loi de composition définie par :

$x*y = ar\tan\left(-1+\tan x+\tan y\right)$

Montrer que $(I;*)$ est un groupe commutatif

Solution :1)soit $(x;y)\in I^2$

$x*y = arc\tan\left(-1+\tan x+\tan y\right) = arc\tan\left(-1+\tan y+\tan x\right)$

Donc $x*y = y*x$ et par suite $*$ est commutatif

2)soit $(x;y;y)\in I^3$

$(x*y)*z = \left(arc\tan\left(-1+\tan x+\tan y\right)\right)*z$

$= arc\tan\left(-1+\tan((arc\tan(-1+\tan x+\tan y))+\tan z)\right)$

$= arc\tan(-1+\left(-1+\tan x+\tan y\right)+\tan z))$

$= arc\tan(-2++\tan x+\tan y+\tan z)$

Et on a :

$x*(y*z) = x*\left(ar\tan\left(-1+\tan y+\tan z\right)\right)$

$= ar\tan\left(-1+\tan x+\tan((arc\tan(-1+\tan y+\tan z)))\right)$

$= arc\tan(-1+\tan x+\left(-1+\tan y+\tan z\right))$

$= arc\tan(-2++\tan x+\tan y+\tan z)$

Donc : $(x*y)*z = x*(y*z)$

par suite $*$ est associative

3) $\forall x\in I$ on a :

$x*\frac{\pi}{4} = arc\tan\left(-1+\tan x+\tan\frac{\pi}{4}\right) = arc\tan\left(-1+\tan x+1\right)$

$x*\frac{\pi}{4} = arc\tan\left(\tan x\right) = x$

Et puisque $*$ est commutatif on a aussi : $\frac{\pi}{4}*x = x$

Et puisque : $\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

alors : $*$ possède un élément neutre $e = \frac{\pi}{4}$

4) soit : $x\in I$ on cherche $x'\in I$ tel que :

$x*x' = \frac{\pi}{4}$?

$x*x' = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow arc\tan\left(-1+\tan x+\tan x'\right) = \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow -1+\tan x+\tan x' = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \tan x+\tan x' = 2$

$\Leftrightarrow \tan x' = 2-\tan x \Leftrightarrow x' = \arctan\left(2-\tan x\right)\in I$

Donc : tout élément de I possède un symétrique pour $*$ dans I.

Finalement :$(I;*)$ est un groupe commutatif

Exercice 1: on muni $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne $\top$ définit par :

$(x;y)\mathrm{T}(x';y')=\left(x+x';ye^{x'}+y'e^{-x}\right)$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(x';y')\in\mathbb{R}^2$

Monter que $\left(\mathbb{R}^2;\mathrm{T}\right)$ groupe non commutative

Solution:a)soient $(x;y)$; $(x';y')$ et $(x'';y'')$ des éléments de $\mathbb{R}^2$

$$\left((x;y)\mathrm{T}(x';y')\right)\mathrm{T}(x'';y'')=\left(x+x';ye^{x'}+y'e^{-x}\right)\mathrm{T}(x'';y'')$$

$$=\left(x+x'+x'';\left(ye^{x'}+y'e^{-x}\right)e^{x''}+y''e^{-(x+x')}\right)$$

$$=\left(x+x'+x'';ye^{-(x'+x'')}+y'e^{-x+x''}+y''e^{-(x+x')}\right)$$

$$(x;y)\mathrm{T}\left((x';y')\mathrm{T}(x'';y'')\right)=(x;y)\mathrm{T}\left(x'+x'';y'e^{x''}+y''e^{-x'}\right)$$

$$=\left(x+x'+x'';\left(y'e^{x''}+y''e^{-x'}\right)e^{-x}+ye^{x'+x''}\right)$$

$$=\left(x+x'+x'';y'e^{(x''-x)}+y''e^{-(x+x')}+ye^{x'+x''}\right)$$

Donc :

$$\left((x;y)\mathrm{T}(x';y')\right)\mathrm{T}(x'';y'')=(x;y)\mathrm{T}\left((x';y')\mathrm{T}(x'';y'')\right)$$

donc : T est associative

b) l'élément neutre de T ?

$(e_1;e_2)$ l'élément neutre de T ssi $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$(x;y)\mathrm{T}(e_1;e_2)=(x;y)$ et $(e_1;e_2)\mathrm{T}(x;y)=(x;y)$

$$(x;y)\mathrm{T}(e_1;e_2)=(x;y)\Leftrightarrow\left(x+e_1;ye^{e_1}+e_2e^{-x}\right)=(x;y)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+e_1=x\\ye^{e_1}+e_2e^{-x}=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_1=0\\e_2e^{-x}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_1=0\\e_2=0\end{cases}$$

Et on a : $(0;0)\mathrm{T}(x;y)=(x;y)$

Donc : $(0;0)$ est l'élément neutre de T

c) le symétrique d'un élément dans T ?

soient $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ montrons l'existence de $(x';y')\in\mathbb{R}^2$ tel que : $(x;y)\mathrm{T}(x';y')=(0;0)$ et $(x';y')\mathrm{T}(x;y)=(0;0)$

$$(x;y)\mathrm{T}(x';y')=(0;0)\Leftrightarrow\left(x+x';ye^{x'}+y'e^{-x}\right)=(0;0)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+x'=0\\ye^{x'}+y'e^{-x}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-x\\(y+y')e^{-x}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-x\\y+y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-x\\y'=-y\end{cases}$$

On a aussi : $(-x;-y)\mathrm{T}(x;y)=(0;0)$

Donc : $(-x;-y)$ est le symétrique de élément $(x;y)$ dans T

Donc : $\left(\mathbb{R}^2;\mathrm{T}\right)$ est un groupe

Et puisque : $(1;1)\mathrm{T}(1;0)=(2;e)$ et $(1;0)\mathrm{T}(1;1)=\left(2;e^{-1}\right)$

Alors : $(1;1)\mathrm{T}(1;0)\neq(1;0)\mathrm{T}(1;1)$

donc : T n'est pas commutative

3) propriété des groupes

Théorème :soit $(G;*)$ est un groupe

1) l' élément neutre dans G est unique
2) tout élément de G possède un symétrique unique dans G.

Si x' est le symétrique de x et y' est le symétrique de y alors le symétrique de $x*y$ est $y'*x'$:

Cad : $(x*y)'=y'*x'$

3) tout élément de G est regulier cad :

$\forall a\in G$ et $\forall(x;y)\in G^2$

$a*x=a*y\Rightarrow x=y$ et $x*a=y*a\Rightarrow x=y$

Preuve :1) et 2) voir la leçon précédente

3)soient : $a\in G$ et $(x;y)\in G^2$

$$x*a=y*a\Rightarrow(x*a)*a'=(y*a)*a'$$

Avec a' est le symétrique de a

$\Rightarrow x*(a*a')=y*(a*a')$ Car $*$ est associative

$\Rightarrow x*e=y*e$ Car $*$ possède un élément neutre e

$\Rightarrow x=y$ De même on montre l'autre implication

Exemple1 :soit $(G;\cdot)$ un groupe noté multiplicativement et tel que : $(a;b)\in G^2$ $(ab)^2=a^2b^2$ Montrer que que ce groupe est commutatif

Solution :par hypothèse on a quels que soient les éléments $(a;b)\in G^2$: $abab=aabb$

Mais dans un groupe tout élément étant régulier on peut simplifier à gauche par a et à droite par b

Donc : $abab=aabb$

Donc $ba=ab$ et par suite ce groupe est commutatif

Proposition :si $(G;*)$ est un groupe qui admet un élément neutre e et $(a;b)\in G^2$ et a' est le symétrique de a alors :les équations : $(E_1):a*x=b$ et $(E_2):x*a=b$ admettent une solution unique :

- •Pour (E_1) la solution est : $x=a'*b$
- •Pour (E_2) la solution est : $x=b*a'$

Exemple2:(étude d'un groupe fini)

$\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};+\right)$ et $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}-\{\overline{0}\};\times\right)$ sont deux groupes commutatifs :

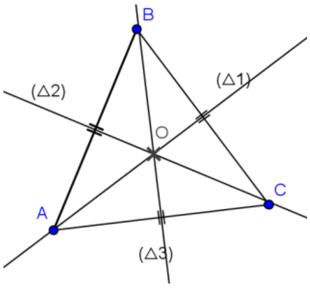
+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};+\right)$ et Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};\times\right)$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Exemple3 :(étude d'un groupe fini)

(ABC) un triangle équilatéral



(Δ_1) la médiatrice du segment $[BC]$

(Δ_2) la médiatrice du segment $[AB]$

(Δ_3) la médiatrice du segment $[AC]$

Soit ζ l'ensemble des transformations suivantes : $\zeta=\{r_1;r_2;r_3;s_1;s_2;s_3\}$

r_1 la rotation de centre O et d'angle 0 : $r_1(O;0)$

r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$: $r_2\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)$

r_3 la rotation de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$: $r_3\left(O;\frac{4\pi}{3}\right)$

s_1 la symétrie axial d'axe : (Δ_1)

s_2 la symétrie axial d'axe : (Δ_2)

s_3 la symétrie axial d'axe : (Δ_3)

Donc : on utilisant la loi de composition des transformation $\circ$ on trouve le tableau suivant :

$\circ$	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_1	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_2	r_2	r_3	r_1	s_3	s_1	s_2
r_3	r_3	r_1	r_2	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2	r_3
s_2	s_2	s_3	s_1	r_3	r_1	r_2
s_3	s_3	s_1	s_2	r_2	r_3	r_1

Remarque : si $(G;*)$ est un groupe fini alors chaque élément de G se trouve sur le tableau une fois dans chaque ligne et dans chaque colonne

Exercice 2: soit $(G;\cdot)$ un groupe noté multiplicativement et e l'élément neutre de G

1) Montrer que si: $\forall(a;b)\in G^2$: $(a.b)^2=a^2.b^2$ alors le groupe G est commutatif

2)Montrer que si: $\forall x\in G$: $x^2=e$ alors le groupe G est commutatif

Solution : 1) soit $(a;b)\in G^2$

par hypothèse on a: $(a.b)^2=a^2.b^2$

donc : $a.b.a.b=a.a.b.b$ puisque G un groupe tout élément de G est regulier

Donc : $b.a=a.b$

Par suite ce groupe est commutatif

2) soient les éléments $(x;y)\in G^2$

par hypothèse on a: $xyxy=e$

on multipliant à gauche par x et à droite par y

Donc : $xxyxyy=xey\Rightarrow x^2yxy^2=xey\Rightarrow eyxe=xy$

$\Rightarrow yx=xy$ Par suite ce groupe est commutatif

3) Sous-groupes

Définition : Soient (G, $*$) un groupe et H une partie stable pour (G, $*$)

H est un sous-groupe de (G, $*$) si et seulement si (H, $*$) est un groupe

Remarque :si e est l'élément neutre de G

{e} et G sont des sous-groupes de (G, $*$) appelés sous-groupes triviaux du groupe (G, $*$). Les autres sous-groupes, s'il en existe, sont appelés sous-groupes propres de (G, $*$).

Exemples :

• $(\mathbb{Z};+)$; $(\mathbb{Q};+)$; $(\mathbb{R};+)$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{C};+)$

• $(\mathbb{Q}^*;\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*;\times)$

• $(\mathbb{R}_n[X];+)$ est un sous-groupe de $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+)$

• $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$

$(U;\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*;\times)$

$(U;+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C};+)$

• $(\mathbb{N};+)$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z};+)$

Exemple:(on considére l'ensemble des matrices suivante : $E=\left\{M_a=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & 0\end{pmatrix}/a\in\mathbb{R}\right\}$

Monter que E n'est pas un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R});+)$

Solution : soit $M_a\in E$ et $M_b\in E$

Donc : $M_a=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ et $M_b=\begin{pmatrix}1 & b\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

$M_a\times M_b\in E$?

$$M_a\times M_b=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & b\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2a & b\\ 2 & 2b\end{pmatrix}\notin E$$

donc : E n'est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

donc : E n'est pas un sous-groupe e $(M_2(\mathbb{R});+)$

Théorème :(caractérisations d'un sous-groupe).

Soient (G, $*$) un groupe et H une partie de G.

1)H est un sous-groupe de (G, $*$)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\, e\in H\\ (2)\,\forall(x,y)\in H^2;x*y\in H\\ (3)\,\forall x\in H;x'\in H\end{cases}\quad(I)$$

2)H est un sous-groupe de (G, $*$)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\, H\neq\varnothing\\ (2)\,\forall(x,y)\in H^2;x*y'\in H\end{cases}(II)$$

Démonstration :

• Supposons que H soit un sous-groupe de (G, $*$), alors la propriété (2) de (I) est vérifiée.

Notons e_H l'élément neutre de H.

On a $e_H * e = e_H$ car e est élément neutre de G et d'autre part, $e_H = e_H * e_H$ car e_H est élément neutre de H. Par suite, $e_H * e = e_H * e_H$.

Maintenant, dans le groupe (G, $*$), tout élément est métrisable et en particulier, tout élément est regulier. Après simplification par e_H, on obtient e = e_H. Ceci montre en particulier que e ∈ H.

Soit x un élément de H. Notons x'_H son symétrique pour ∗ dans H.

On a x'_H ∗ x ∗ x′= e ∗ x′= x′(puisque e_H = e) et d'autre part,x_H ∗ x ∗ x′= x'_H ∗ e = x'_H.

Donc, le symétrique x'_H de x dans H est son symétrique x′ dans G. Ceci montre en particulier que x′ est dans H.

On a montré que si H est un sous-groupe de (G, ∗) alors (I) est vérifié.

• Montrons que : (I) ⇒ H sous-groupe de (G, ∗).

Supposons (I).

H est une partie non vide de G d'après (1). La restriction de ∗ à H^2 est une loi interne dans H d'après (2). ∗ est associative dans G et donc la loi induite est associative dans H

L'élément neutre e de (G, ∗) vérifie :

∀x ∈ H, x ∗ e = e ∗ x = x et donc e est élément neutre de H pour la loi induite.

Enfin, si x est un élément quelconque de H, le symétrique x′ de x dans G est dans H et vérifie x∗x′= x′∗x = e où e est maintenant élément neutre de H. x′ est donc le symétrique de x dans H et on a montré que tout élément de H admet un symétrique dans H.

De tout ceci, on en déduit bien que H est un sous-groupe de (G, ∗)

Donc que (H sous-groupe) ⇔ (I).

• Il est clair que (I) ⇒ (II). Il reste à montrer que (II) ⇒ (I). On suppose donc que H vérifie (II).

Soit x un élément de H. Puisque e et x sont dans H alors: H≠∅et e ∗ x′= x′ est dans H d'après (2).

Ainsi, ∀x ∈ H, x′ ∈ H.

Soient enfin, x et y deux éléments de H.

D'après ce qui précède, y′est encore dans H

Donc x ∗ (y′)′= x ∗ y est dans H.

On a montré que (II) ⇒ (I)

Finalement que (I) ⇔ (II).

Remarque : soit : $(G;*)$ un groupe

1) on utilusant une notation additive on a :

H est un sous-groupe de $(G;+)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) H \neq \varnothing \\ (2) \forall (x,y) \in H^2; x-y \in H \end{cases}$$

2) on utilusant une notation multiplicative

on a : H est un sous-groupe de $(G;\times)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) H \neq \varnothing \\ (2) \forall (x,y) \in H^2; xy^{-1} \in H \end{cases}$$

Exemple1 : soit I l'ensemble des nombres entiers relatifs pairs

montrer que $(I;+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z};+)$

Solution :on a **:** $I \subset \mathbb{Z}$

$(1) I \neq \varnothing$ car $0 = 2\times 0 \in I$

$(2) \forall (x,y) \in I^2; x-y \in I$?

Soient : $x \in I$ et $y \in I$ donc : $x = 2\times p$ et $x = 2\times q$

$x - y = 2\times p - 2\times p = 2\times(p-p) = 2\times k \in I$

Donc : $(I;+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z};+)$ d'après

La propriété caractéristique d'un sous-groupe

Exemple2 : montrer que : $H = \{3^m 7^n / m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}\}$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*;\times)$

Solution :on a : $H \subset \mathbb{R}^*$ car $\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2; 3^m 7^n \in \mathbb{R}^*$

$(1) H \neq \varnothing$ car $3^0 7^0 = 1 \in H$

$(2) \forall (x,y) \in H^2; x \times y^{-1} \in H$?

Soient : $x \in H$ et $y \in H$ donc :

$\exists (n,m) \in \mathbb{Z}^2; x = 3^m 7^n$

Et $\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2; y = 3^p 7^q$

$x \times y^{-1} = 3^m 7^n \times (3^p 7^q)^{-1} = 3^m 7^n \times 3^{-p} 7^{-q}$

$x\times y^{-1}=3^m7^n\times\left(3^p7^q\right)^{-1}=3^{m-p}7^{n-q}=3^e7^f$

Avec : $(e,f)\in\mathbb{Z}^2$ donc :

$(2)\forall(x,y)\in H^2;x\times y^{-1}\in H$

Donc : $(H;\times)$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}^*;\times\right)$

D'après la propriété caractéristique d'un sous-groupe

Exemple3 : Si E est un ensemble, l'intersection dans P(E) est interne, commutative, associative et possède un élément neutre, à savoir E.
Soit alors F une partie stricte de E. P(F) est une partie non vide de P(E), stable pour l'intersection (l'intersection de deux parties de F reste une partie de F). L'intersection possède un élément neutre dans P(F), à savoir F. Cet élément neutre est distinct de l'élément neutre de (P(E), ∩). Une conséquence est que (P(E), ∩) n'est pas un groupe.

Exemple4 : $U=\left\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\right\}$

Montrer que $(U;\times)$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{C}^*;\times\right)$

Solution :
1) Un nombre complexe de module 1 est non nul

et donc $U\subset\mathbb{C}^*$

Et 1 a pour module 1 et donc 1 ∈ U.

Soit alors $(z_1;z_2)\in U^2$.

$z_1\times z_2^{-1}\in U$???

$\left|z_1\times z_2^{-1}\right|=|z_1|\times\left|z_2^{-1}\right|=|z_1|\times|z_2|^{-1}=1\times1=1\times1\in U$

Exercice 3: on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$E=\left\{M_a=\begin{pmatrix}\ln a & 0\\ 0 & \ln a\end{pmatrix}/a\in\mathbb{R}^{+*}\right\}$$

Monter que E est un sous-groupe de $\left(M_2(\mathbb{R});+\right)$

Solution : 1)on a $M_e=\begin{pmatrix}\ln e & 0\\ 0 & \ln e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$

Donc : $I_2\in E$ donc : $E\neq\varnothing$

2) soit $M_a\in E$ et $M_b\in E$

$M_a-M_b\in E$? :

$$M_a-M_b=\begin{pmatrix}\ln a & 0\\ 0 & \ln a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\ln b & 0\\ 0 & \ln b\end{pmatrix}$$

$$M_a-M_b=\begin{pmatrix}\ln a-\ln b & 0\\ 0 & \ln a-\ln b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ln\frac{a}{b} & 0\\ 0 & \ln\frac{a}{b}\end{pmatrix}=M_{a/b}$$

Et puisque $a\in\mathbb{R}^{+*}$ et $b\in\mathbb{R}^{+*}$ alors $a/b\in\mathbb{R}^{+*}$

Donc : $M_a-M_b=M_{a/b}\in E$

Donc : E est un sous-groupe de $\left(M_2(\mathbb{R});+\right)$

Exercice 4 :soit $(G;\cdot)$ un groupe noté multiplicativement et soit $a\in G$

On pose : $C_a=\{x\in G/ax=xa\}$

(centralisateur de a)

Et : $Z(G)=\{x\in G/\forall y\in G:xy=yx\}$

(centre de G)

Montrer que C_a et $Z(G)$ sont des sous-groupes de $(G;\cdot)$

Solution : 1) Montrons que C_a est un sous-groupe de $(G;\cdot)$?

Soit e l'élément neutre du groupe $(G;\cdot)$

a) on a : $ae=ea=a$ donc $e\in C_a$ donc : $C_a\neq\varnothing$

b)soient les éléments $(x;y)\in C_a^{\;2}$

montrons que : $xy^{-1}\in C_a$ cad montrons que :

$a\left(xy^{-1}\right)=\left(xy^{-1}\right)a$??

On a $(x;y)\in C_a^{\,2}$ donc : $\begin{cases} ax = xa(1) \\ ay = ya(2) \end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow (ay)^{-1}=(ya)^{-1} \Leftrightarrow y^{-1}a^{-1}=a^{-1}y^{-1}$

$\Rightarrow y^{-1}a^{-1}=a^{-1}y^{-1}$ et $ax=xa(1)$

$\Rightarrow axy^{-1}a^{-1}=xaa^{-1}y^{-1} \Rightarrow axy^{-1}a^{-1}=xey^{-1}$

$\Rightarrow axy^{-1}a^{-1}=xy^{-1} \Rightarrow axy^{-1}a^{-1}a=xy^{-1}a$

$\Rightarrow axy^{-1}e=xy^{-1}a \Rightarrow axy^{-1}=xy^{-1}a$ donc $xy^{-1}\in C_a$

Donc : C_a est un sous-groupe de $(G;\cdot)$

2) Montrons que $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G;\cdot)$?

a) on a : $\forall y\in G: ey=ye$ donc $e\in Z(G)$

donc : $Z(G)\neq\varnothing$

b)soient les éléments $(a;b)\in Z(G)^2$

montrons que : $ab^{-1}\in Z(G)$ cad montrons que :

$(ab^{-1})y=y(ab^{-1}) \quad \forall y\in G$??

On a $(a;b)\in Z(G)^2$ donc : $\begin{cases} ay = ya(1) \\ by = yb(2) \end{cases}$

De la même façon que précédemment on trouve $(ab^{-1})y=y(ab^{-1})\ \forall y\in G$ donc $ab^{-1}\in Z(G)$

Donc : $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G;\cdot)$

Théorème : Si H et K sont des sous-groupes de (G, ∗), H ∩ K est un sous-groupe de (G, ∗). Ainsi, une intersection de sous-groupes est un sous-groupe.

Démonstration. (On utilise la caractérisation (II) ci-dessus). Soient H et K deux sous-groupes. D'après ce qui précède, H etK contiennent l'élément neutre e de G et donc e ∈ H ∩ K.
D'autre part, bien sûr H ∩ K ⊂ G.
Soient alors x et y deux éléments de H ∩ K.

(x, y) ∈ (H ∩ K)^2 ⇒ ((x, y) ∈ H^2
et (x, y) ∈ K^2) ⇒ (x ∗ y′ ∈ H et x ∗ y′ ∈ K)
⇒ x ∗ y′ ∈ H ∩ K.
Ceci montre que H ∩ K est un sous-groupe de (G, ∗).

Théorème : soit f un homomorphisme du groupe (G, ∗)Dans un groupe(F ; $\top$)
L'image du groupe (G, ∗) par l'homomorphisme f C'est le groupe(f(G) ; $\top$)

Démonstration : on a déjà montré que f(G) Est une partie stable (F ; $\top$) et donc :
∗ est associative dans : (G, ∗) donc :
∗ est associative dans : (f(G) , $\top$) soit e l'élément neutre de (G, ∗) donc : $f(e)$ est l'élément neutre de (f(G) , $\top$) et si x' est le symétrique de x dans (G, ∗) alors $f(x')$ est le symétrique de $f(x)$

Dans (f(G) ; $\top$)
Donc : (f(G) ; $\top$) est un groupe

Remarque :
Si f un homomorphisme surjectif alors f(G) =F
Dans ce cas L'image du groupe (G, ∗) par l'homomorphisme f c'est le groupe (F ; $\top$)

1)Exemples :

Les applications suivantes :

$g:(\mathbb{R}^{*+};\times)\to(\mathbb{R};+)$, $x\mapsto \ln x$ $\qquad f:(\mathbb{Z};+)\to(\mathbb{R}^{*+};\times)$, $r\mapsto 2^r$

$h:(\mathbb{C};\times)\to(\mathbb{C};\times)$, $z\mapsto \overline{z}$ $\qquad l:(\mathbb{R};+)\to(\mathbb{R}^{*+};\times)$, $x\mapsto e^x$

Sont des homomorphismes de groupes

Exercice 5 : On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne définie par :

$$x*y=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\,;\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$$

1)soit l'application :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ vers $(\mathbb{R};*)$

2) En déduire la structure de $(\mathbb{R};*)$

Solution :1) a) f est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\succ 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Par suite f est une fonction bijectif de $\mathbb{R}$

Dans $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

b) soient $x;y\in\mathbb{R}$

$$f(x+y)=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}$$

$$f(x)*f(y)=f(x)\sqrt{f(y)^2+1}+f(y)\sqrt{f(x)^2+1}$$

Et on a :

$$f(y)^2+1=1+\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)^2=\frac{e^{2y}+2+e^{-2y}}{4}=\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)^2$$

Donc : $\sqrt{f(y)^2+1}=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$ de même on a :

$\sqrt{f(x)^2+1}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ Donc :

$$f(x)*f(y)=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)$$

$$f(x)*f(y)=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}$$

Finalement : $f(x+y)=f(x)*f(y)$

Donc : f est un homorphisme bijectif de $(\mathbb{R};+)$ vers $(\mathbb{R};*)$ donc un isomorphisme

2)puisque : f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ vers $(\mathbb{R};*)$ et $(\mathbb{R};+)$ est un groupe commutatif

Alors : $(\mathbb{R};*)$ est un groupe commutatif

II) Anneaux

1)Distributivité d'une loi sur une autre

Définition : Soient E un ensemble non vide $*$ et T deux lois de composition internes sur E.
T est distributive sur $*$ ⇔ ∀(x, y, z) ∈ E^3
x T (y $*$ z) = (x T y) $*$ (x T z)
Et (y $*$ z) T x = (y T x) $*$ (z T x).

Remarque : Si on sait que T est commutative, une et une seule des deux égalités ci-dessus suffit.

Exemples :1) Dans $\mathbb{C}$, la multiplication est distributive sur l'addition

$\forall(x;y;z)\in\mathbb{C}^3$: $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$

2)Dans P(E), l'intersection est distributive sur la réunion et la réunion est distributive sur l'intersection : $\forall(A;B;C)\in P(E)^3$:

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ et $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

3)Dans $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});\circ)$ $\circ$ est distributive à droite sur +, mais pas à gauche ((g+h)◦f = g◦f+h◦f, mais en général, f◦(g+h) 6= f◦g+f◦h.

1) dans $M_2(\mathbb{R})$ et $M_3(\mathbb{R})$ la multiplication est distributive sur l'addition mais l'addition

$\forall(A;B;C)\in M_3(\mathbb{R})^3$:

$$A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$$

$$(A+B)\times C=(A\times C)+(B\times C)$$

4) dans $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$ l'addition n'est pas distributive sur la multiplication :

$1+(5\times 3)\neq(1+5)\times(1+3)$

5)on muni $\mathbb{N}$ de la loi

5)on muni $\mathbb{N}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b=a^b$ si $a\neq 0$ et $a\neq 0$;

Et $a*0=1$

Etudions la distributivité de la loi $*$ par rapport a la multiplication ??

a) $a*(b\times c)=a^{bc}$

$(a*b)\times(a*c)=a^{b}\times a^{c}=a^{b+c}$

$a*(b\times c)\neq(a*b)\times(a*c)$ donc la loi $*$ n'est pas distributive a gauche sur la multiplication

b) $(b\times c)*a=(bc)^{a}$

$(b*a)\times(c*a)=b^{a}\times c^{a}=(bc)^{a}$

Donc : $(b\times c)*a=(b*a)\times(c*a)$ donc la loi $*$ est distributive à droite sur la multiplication

Finalement : la loi $*$ n'est pas distributive sur la multiplication

2) Anneaux

Définition : Soit A un ensemble non vide ayant au moins deux éléments muni de deux lois de composition interne (notées $*$ et T).

(A, $*$, T) est un anneau $\Leftrightarrow$

1) (A, $*$) est un groupe commutatif
2) T est associative
3) T est distributive sur $*$

L'anneau est commutatif si et seulement si T est commutative si de plus T admet un élément neutre on dira qu'il est unitaire

Notation additif et multiplicatif :

On note en général la première loi + et la deuxième loi $\times$

On aura alors l'anneau (A, +, $\times$)

On note 0 l'élément neutre pour la loi + et on l'appelle l'élément nul de l'anneau A

Si la loi $\times$ admet un élément neutre on le note1 et on l'appelle l'élément unitaire de l'anneau A

Donc **les conditions (axiomes)pour un anneau (A, +, $\times$)deviennent :**

1) $\forall(x;y;z)\in A^{3}$: $x+(y+z)=(x+y)+z$

2) $\forall(x;y)\in A^{2}$: $x+y=y+x$

3) $\exists 0\in A\ \ \forall x\in A$: $x+0=x$

4) $\forall x\in A\ \exists -x\in A$: $x+(-x)=0$

5) $\forall(x;y;z)\in A^{3}$: $x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$

6) $\forall(x;y;z)\in A^{3}$: $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$ et

$(x+y)\times z=x\times z+y\times z$

3)Exemples anneaux :

1) $(\mathbb{Z};+;\times)$; $(\mathbb{Q};+;\times)$; $(\mathbb{R};+;\times)$; $(\mathbb{C};+;\times)$

Sont des anneaux commutatifs unitaires

(1 l'élement unitaire)

2) $(\mathbb{N};+;\times)$ n'est pas un anneau (car ($\mathbb{N}$, +) n'est pas un groupe)

3)L'anneau des polyn^omes de degré inferieur a n

$(\mathbb{R}_{n}[X];+;\times)$ Est un anneau commutatif unitaire

4) $(M_{2}(\mathbb{R});+;\times)$; $(M_{3}(\mathbb{R});+;\times)$ Sont des anneaux non commutatifs mais unitaires

(ls matrice unitaires sont resp:

$I_{2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $I_{3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$)

5) $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\circ)$ n'est pas un anneau car la loi $\circ$ n'est distributive sur l'addition

En effet : $f:x\to x$ et $g:x\to 1$ et $h:x\to\sqrt{|x|}$

On montre que :

$[h\circ(f+g)](x)\neq(h\circ f)(x)+(h\circ g)(x)$

6) $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\times)$ est unanneau commutatif unitaire

($U:x\to 1$l'élement unitaire)

7) $(P(E);\Delta;\cap)$ est unanneau commutatif unitaire

(E l'élement unitaire)

8) $(P(E);\Delta;\cup)$ n'est pas un anneau car la loi $\cup$ n'est distributive sur Δ

4)Calculs dans un anneau

Théorème : Soit (A, +, $*$) un anneau. On note 0_A l'élément neutre de A pour +.

$\forall x \in A$, $x * 0_A = 0_A * x = 0_A$ (l'élément neutre pour l'addition est toujours absorbant pour la multiplication).

Démonstration :

Soit $x \in A$. $0_A * x = (0_A + 0_A) * x = 0_A * x + 0_A * x$ car $*$ est distributive sur +. Maintenant, (A, +) est un groupe et dans un groupe, tout élément est régulier.

Donc, $0_A * x + 0_A * x = 0_A * x = 0_A * x + 0_A$

entraîne $0_A * x = 0_A$. de même, $x * 0_A = 0_A$. ❑

Théorème : Soit $(A, +, *)$ un anneau.

$\forall (a, b) \in A^2$

$(-a) * b = a * (-b) = -(a * b)$

Démonstration : Soit $(a, b) \in A^2$

$a * b + (-a) * b = (a + (-a)) * b = 0_A * b = 0_A$

et donc $(-a) * b = -a * b$.

De même, $a * b + a * (-b) = a * (b + (-b))$

$= a * 0_A = 0_A$ et donc $a * (-b) = -a * b$.

Remarques : Dans un anneau (ayant au moins deux éléments) on montre aisément

que : $0_A \neq 1_A$ et que 0_A n'a pas de symétrique (pour la 2iém loi). Si tous les autres éléments de A sont Inversibles, on montrera que l'ensemble des

éléments non nuls $A^* = A - \{0_A\}$

Forme un groupe (pour la loi 2iém loi)

Théorème : Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

On note A^* l'ensemble des éléments de A qui sont inversibles c'est-à-dire l'ensemble des éléments de A symétrisables pour $\times$

$(A^*, \times)$ est un groupe.

Démonstration : 1_A est un élément de A^*

car 1_A est inversible pour $\times$, d'inverse lui-même.

Donc : $A^* \neq \varnothing$

• Si x et y sont deux éléments de A^*

on sait que $x \times y$ est dans A^* et que :

$(x \times y)^{-1} = y^{-1} \times x^{-1}$

Donc, $\times$ induit une loi de composition interne sur A^* que l'on note encore $\times$.

$\times$ est associative dans A et donc $\times$ est associative dans A^*

$1_A \in A^*$ et pour tout x de A^*, $1_A \times x = x \times 1_A = x$.

Donc, $\times$ possède un élément neutre 1_A dans A^*

Soit $x \in A^*$. On sait que $x^{-1} \in A^*$ et que

$(x^{-1})^{-1} = x$. Donc, tout élément de A^* admet un symétrique pour $\times$ dans A^*

Donc : $(A^*, \times)$ est un groupe

4) Diviseurs de zéro - Anneau intègre

4-1) Diviseurs de zéro

Exemple : Considérons les deux matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad N = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aucune de ces deux matrices n'est la matrice nulle, et pourtant leur produit vérifie :

$$M \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On dit que les matrices *M* et *N* sont des *diviseurs de zéro.*

Plus généralement, on a les définitions suivantes :

Définition 1: Soit $(A; *; \mathrm{T})$ un anneau et e l'élément neutre pour $*$

Un élément $a \neq e$ de A est appelé un diviseur de zéro s'il existe un autre élément $b \neq e$ de A tel que $a \mathrm{T} b = e$ et $b \mathrm{T} a = e$

Définition 2 : l'anneau $(A; *; \mathrm{T})$ est dit intègre

S'il ne possède pas de diviseurs de zéros

Définition 3 : l'anneau $(A; +; \times)$ est intègre

Ssi : $a \times b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$

Exemples :

- $(\mathbb{Z}; +; \times)$ est un anneau intègre : le produit de deux entiers relatifs est nul si et seulement si l'un de ces deux entiers est nul.
- L'exemple précédent montre que $(M_2(\mathbb{R}); +; \times)$ n'est pas un anneau intègre.

De même pour $(M_3(\mathbb{R});+;\times)$

- $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\times)$ est unanneau commutatif unitaire

Non intègre en effet :

$f: x \to \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1}; x \geq 0 \\ 0; x \prec 0 \end{cases}$ et $g: x \to \begin{cases} 0; x \geq 0 \\ x^5; x \prec 0 \end{cases}$

On a : $f \neq \theta$ et $g \neq \theta$ avec $\theta: x \to 0$ l'élément neutre de $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+)$

On montre que : $f \times g = \theta$

- $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z};+;\times)$ n'est pas un anneau intègre.

Car : $\overline{2} \neq \overline{0}$ et $\overline{3} \neq \overline{0}$ mais $\overline{2} \times \overline{3} = \overline{6} = \overline{0}$

$\overline{3}$ est un diviseur de zéro et $\overline{2}$ aussi

- $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};+;\times)$ est un anneau intègre.

Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};\times\right)$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

proposition : soit $(A;*;\mathrm{T})$ un anneau unitaire si $a \in A$ admet un symétrique pour T alors a n'est pas un diviseur de zéro dans $(A;*;\mathrm{T})$

Preuve : Soit e l'élément neutre pour $*$ et Soit f l'élément neutre pour T et a' le symétrique De a

Supposons qu'il existe $b \in A$ tel que : $a\mathrm{T}b = e$ et $b\mathrm{T}a = e$

$a\mathrm{T}b = e \Leftrightarrow a'\mathrm{T}(a\mathrm{T}b) = a'\mathrm{T}e \Leftrightarrow (a'\mathrm{T}a)\mathrm{T}b = e$

$\Leftrightarrow f\mathrm{T}b = e \Leftrightarrow b = e$

Exercice 6 : on considére l'ensemble suivant :

$E = \left\{a + b\sqrt{3} / (a;b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$

1)Monter que $(E;+)$ est un groupe commutatif

2) Monter que E est une partie stable de $(\mathbb{Q};\times)$

3) Monter que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire

Solution : 1) Montrons que $(E;+)$ est un un sous-groupe de $(\mathbb{Q};+)$?

On a $E \subset \mathbb{Q}$ et on a $1 = 1 + 0\sqrt{3}$ donc : $1 \in E$

donc : $E \neq \varnothing$

soit $x \in E$ et $y \in E$ montrons $x - y \in E$?

$x \in E \Leftrightarrow \exists (a;b) \in \mathbb{Q}^2 / x = a + b\sqrt{3}$

$y \in E \Leftrightarrow \exists (c;d) \in \mathbb{Q}^2 / x = c + d\sqrt{3}$

$x - y = \left(a + b\sqrt{3}\right) - \left(c + d\sqrt{3}\right) = (a - c) + (b - d)\sqrt{3}$

On a $(a;b;c;d) \in \mathbb{Q}^4$ donc : $a - c \in \mathbb{Q}$ et $b - d \in \mathbb{Q}$

Donc : $x - y = a'' + b''\sqrt{3}$ par suite : $x - y \in E$

Donc : $(E;+)$ est un un sous-groupe de $(\mathbb{Q};+)$

donc $(E;+)$ est un un groupe

2)) Montons que E est une partie stable de $(\mathbb{Q};\times)$?

soit $x \in E$ et $y \in E$ montrons $x \times y \in E$?

$x - y = \left(a + b\sqrt{3}\right) \times \left(c + d\sqrt{3}\right) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}$

puisque $(a;b;c;d) \in \mathbb{Q}^4$ alors : $ac + 3bd \in \mathbb{Q}$ et $ad + bc \in \mathbb{Q}$ donc : $x \times y \in E$

: $E = \left\{a + b\sqrt{3} / (a;b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$

Donc : E est une partie stable de $(\mathbb{Q};\times)$

3) on a $(\mathbb{Q};+;\times)$ est un anneau commutatif

Donc La multiplication est commutative et distributive par rapport à l'addition dans E

Par suite $(E;+;\times)$ un anneau commutatif

Et $1=1+0\sqrt{3}$ donc : $1\in E$ et 1 est l'élément

neutre de la multiplication dans $(\mathbb{Q};\times)$

Donc : 1 est l'élément neutre de la multiplication dans E

Conclusion : $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif

unitaire

Exercice 7: Soit $(A;+;\times)$ un anneau.

Tel que : $x^2=x \quad \forall x\in A$ ($(A;+;\times)$ s'appelle

anneau
De Boole)

1) calculer $(x+x)^2$

2)en déduire que : $x+x=0_A$ (0_A est l'élément

neutre de $(A;+)$)

3)soient : $x\in A$ et $y\in A$

a) calculer $(x+y)^2$ en fonction de x et y

b) en déduire que $(A;+;\times)$ est commutatif

c) en déduire : $xy(x+y)$

4)on suppose que : $x\neq 0_A$ et $y\neq 0_A$ et $y\neq x$

a) montrer que : a) $x+y\neq 0_A$ b) $x+y\neq y$

5)déterminer le tableau de la somme pour les

éléments : 0_A ; x ; y ; $x+y$

Solution : 1)soit $x\in A$ on a :

$(x+x)^2=(x+x)(x+x)=xx+xx+xx+xx$

$(x+x)^2=x^2+x^2+x^2+x^2=x+x+x+x$ car $x^2=x$

Donc : $(x+x)^2=x+x+x+x$

2)a)soient : $x\in A$ et $y\in A$

$(x+y)^2=(x+y)(x+y)=xx+xy+yx+yy$

$(x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2$

$(x+y)^2=x+xy+yx+y$ car $x^2=x \quad \forall x\in A$

b)on a : $(x+y)^2=x+xy+yx+y$ et $(x+y)^2=x+y$

donc : $x+xy+yx+y=x+y$

donc : $xy+yx=0_A$ et puisque $xy+xy=0_A$

Alors : $xy+yx=xy+xy$ donc $yx=xy$

Donc : $(A;+;\times)$ est commutatif

c) déduction de : $xy(x+y)$

soient : $x\in A$ et $y\in A$

$xy(x+y)=xyx+xy^2=xxy+xy^2=x^2y+xy^2=xy+xy$

et puisque $xy+xy=0_A$ alors : $xy(x+y)=0_A$

4) on suppose que : $x\neq 0_A$ et $y\neq 0_A$ et $y\neq x$

a) on suppose que $x+y=0_A$ et puisque $x+x=0_A$

Alors : $x+y=x+x$ cad $y=x$ contradiction

Donc : $x+y\neq 0_A$

b) on suppose que $x+y=y$ donc : $x=0_A$

Contradiction donc $x+y\neq y$

5) on a : $x+x=0_A$ et $x+0_A=0_A+x=x$

$+$	0_A	x	y	$x+y$
0_A	0_A	x	y	$x+y$
x	x	0_A	$x+y$	y
y	y	$x+y$	0_A	x
$x+y$	$x+y$	y	x	0_A

III) corps

1)Définition : Soit (K, +, ×) un anneau.
(K, +, ×) est un corps si et seulement si tout élément non nul de K admet un inverse (pour ×) dans K.et le corps est commutatif si et seulement si $*$ est commutative.

Exemples :1) $(\mathbb{Q};+;\times)$; $(\mathbb{R};+;\times)$; $(\mathbb{C};+;\times)$ sont des corps commutatifs.

2) $(\mathbb{Z};+;\times)$ Est un anneau commutatif qui n'est pas un corps car par exemple, le nombre 2 n'est Pas inversible dans Z.

3) $(M_2(\mathbb{R});+;\times)$ n'est pas un corps car par exemple : $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ n'est pas inversible

4) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z};+;\times)$ n'est pas un corps car par exemple $\overline{3}$ n'est pas inversible

2)Notation additif et multiplicatif d'un corps :
On note en général la première loi + et la deuxième loi $\times$
On aura alors le corps (K, +, $\times$)
On note 0 l'élément neutre pour la loi + et on l'appelle l'élément nul du corps K
l'élément neutre pour la loi $\times$ on le note1
et on l'appelle l'élément unitaire corps K

<u>Donc les conditions (axiomes)pour un corps</u> (K, +, $\times$) <u>deviennent :</u>

1) $\forall(x;y;z)\in K^3$: $x+(y+z)=(x+y)+z$

2) $\forall(x;y)\in K^2$: $x+y=y+x$

3) $\exists 0\in K\ \ \forall x\in K$: $x+0=x$

4) $\forall x\in K\ \ \exists -x\in K$: $x+(-x)=0$

5) $\forall(x;y;z)\in K^3$: $x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$

6) $\exists 1\in K\ \ \forall x\in K$: $x\times 1=x\times 1=x$

7) $\forall x\in K-\{0\}\ \ \exists x^{-1}\in K-\{0\}$: $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$

8) $\forall(x;y;z)\in K^3$: $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$ et $(x+y)\times z=x\times z+y\times z$

Théorème : Dans un corps, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ces facteurs est nuls :

$\forall(x;y)\in K^3$: $x\times y=0\Leftrightarrow x=0$ ou $y=0$

Donc un un corps ne contient pas de diviseur de zéro

Démonstration. Soit (K, +, ×) : on note 0 (resp. 1) l'élément neutre pour + (resp. ×).
Soit (a, b) ∈ K^2 tel que :a × b = 0.
Si a $\neq$ 0, a admet un inverse pour × noté a^{-1}
On peut écrire :a × b = 0 ⇒
a^{-1} × a × b = a^{-1} × 0
⇒ 1 × b = 0 ⇒ b = 0.

Exercice : soit (K, +, ×) un corps finit :
$K=\{0;e;x_1;x_2;...;x_m\}$; $m\in\mathbb{N}^*$
Avec : 0 (resp. e) l'élément neutre pour +(resp. ×).
1)montrer que : $-e$ et e sont les seuls élément de K qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi ×
2)montrer que le produit de tous les éléments de K est égal a $-e$
3)on considérant le corps $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};+;\times)$ avec n premier montrer que : $\overline{(n-1)!+1}\equiv 0[n]$

Solution :1)

$\forall x\in K-\{0\}\quad x=x^{-1}\Leftrightarrow x\times x=x^{-1}\times x\Leftrightarrow x^2=e$

$\Leftrightarrow x^2-e=0\Leftrightarrow x^2-e^2=0\Leftrightarrow(x-e)(x+e)=0$

$\Leftrightarrow x=-e$ ou $x=e$ car (K, +, ×) un corps
2)puisque : $-e$ et e sont les seuls élément de K qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi ×

Alors : $K-\{0\}=\{-e;e;a_1;a_1^{-1};a_2;a_2^{-1}...;a_p;a_p^{-1}\}$

Donc : $-e\times e\times a_1\times a_1^{-1}\times a_2\times a_2^{-1}...\times a_p\times a_p^{-1}=$
$=-e\times e\times e\times e...\times e=-e$

3) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};.....;\overline{n-1}\}$ (un corps)

D'après les questions précédentes on a :

$\overline{1}\times\overline{2}\times.....\times\overline{n-1}=-\overline{1}$ donc :

$\overline{1\times 2\times 3\times.....\times(n-1)}=-\overline{1}$

donc : $\overline{(n-1)!+1}\equiv 0[n]$

Théorème : Dans un corps, tout élément de $K-\{0\}$ est régulier pour la loi × :

$\forall(x;y)\in K^3$ et $\forall a\in K-\{0\}$

$ax=ay\Rightarrow x=y$ et $xa=ya\Rightarrow x=y$

Exercice8: on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$E=\left\{M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1)Monter que $(E;+)$ est un groupe commutatif

2)Monter que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

3)soit f l'application qui associe à chaque matrice $M_{(a;b)}$ de $E-\{0_2\}$ le nombre complexe : $a+ib\sqrt{2}$ de $\mathbb{C}^*$

a) Monter que f est un morphisme bijectif de $(E-\{0_2\},\times)$ dans $(\mathbb{C}^*;\times)$

b)en déduire la structure de $(E-\{0_2\},\times)$

4) Monter que $(E;+;\times)$ est un corps

Solution : 1)on a : $M_{(0;0)}=0_2\in E$ donc : $E\neq\varnothing$

Et on a $E\subset(M_2(\mathbb{R});\times)$

soit $M_{(a;b)}\in E$ et $M_{(c;d)}\in E$

Donc : $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $M_{(c;d)}=\begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix}$

$$M_{(a;b)}-M_{(c;d)}=\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-c & -2(b-d) \\ b-d & a-c \end{pmatrix}$$

Donc : $M_{(a;b)}-M_{(c;d)}=M_{(a-c;b-d)}$

Et puisque : $(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4$ alors : $a-c\in\mathbb{R}$ et $b-d\in\mathbb{R}$ donc : $M_{(a;b)}-M_{(c;d)}\in E$

Donc :$(E;+)$ est un un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R});+)$

donc $(E;+)$ est un groupe commutatif

2) $M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}=\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix}=$

$$M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}=\begin{pmatrix} ac-2bd & -2(ad+bc) \\ ad+bc & ac-2bd \end{pmatrix}=M_{(ac-2bd;ad+bc)}$$

Et puisque : $(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4$ alors : $ac-2bd\in\mathbb{R}$ et $ad+bc\in\mathbb{R}$ donc : $M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}\in E$

E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

3)soient : $M_{(a;b)}\in E$ et $M_{(c;d)}\in E$

$f\left(M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}\right)=f\left(M_{(ac-2bd;ad+bc)}\right)$

$=ac-2bd+i(ad+bc)\sqrt{2}$

$f\left(M_{(a;b)}\right)\times f\left(M_{(c;d)}\right)=\left(a+ib\sqrt{2}\right)\left(c+id\sqrt{2}\right)$

$=ac-2bd+i(ad+bc)\sqrt{2}=f\left(M_{(ac-2bd;ad+bc)}\right)$

$=f\left(M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}\right)$

f est un morphisme de $(E-\{0_2\},\times)$ dans $(\mathbb{C}^*;\times)$

Soit $x+iy\in\mathbb{C}^*$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

On cherche $M_{(a;b)}\in E$ tel que : $f\left(M_{(a;b)}\right)=x+iy$

$f\left(M_{(a;b)}\right)=x+iy\Leftrightarrow a+ib\sqrt{2}=x+iy$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b\sqrt{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \dfrac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ Existe et il est unique

donc : f est un morphisme bijectif de

$(E-\{0_2\}, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*;\times)$

b)$(E-\{0_2\}, \times)$ et $(\mathbb{C}^*;\times)$ sont isomorphes

et $(\mathbb{C}^*;\times)$ un groupe commutatif donc aussi

et on a $(E-\{0_2\}, \times)$ un groupe commutatif

4)La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $M_2(\mathbb{R})$ et E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$ donc La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans E

Donc on a :

$(E;+)$ est un groupe commutatif et

$(E-\{0_2\}, \times)$ un groupe commutatif

La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans E

Conclusion :

$(E;+;\times)$ est un corps

Exercice 9: Soit $(K;+;\times)$ un corps.

On note : 0_K l'élément neutre de $(K;+)$ et 1_K l'élément neutre de $(K;\times)$ et on suppose qu'il existe un homomorphisme f bijectif de $(K;+)$ vers $(K-\{0_K\};\times)$

1)on suppose que $1_K + 1_K = 0_K$¨

montrer que : $f(K) = \{1_K\}$

2) on suppose que : $1_K + 1_K \neq 0_K$ et on pose :

$\alpha = f^{-1}(1_K)$ et $\beta = f^{-1}(-1_K)$

a) montrer que : $\alpha + \alpha = \beta + \beta$

b) en déduire que $\alpha = \beta$

3) en déduire qu'il n'existe pas d'homomorphisme f bijectif de $(K;+)$ vers $(K-\{0_K\};\times)$

Solution : 1))on suppose que $1_K + 1_K = 0_K$¨

soit $x \in K$ on a donc: $x \times (1_K + 1_K) = x \times 0_K$

donc: $x \times 1_K + x \times 1_K = x \times 0_K$

donc: $x + x = 0_K$ donc: $f(x+x) = f(0_K)$

puisque f homomorphisme bijectif de $(K;+)$ vers $(K-\{0_K\};\times)$ on a donc : $f(x) \times f(x) = 1_K$

donc: $(f(x))^2 = 1_K$ donc: $(f(x) - 1_K)(f(x) + 1_K) = 0_K$

donc : $f(x) = 1_K$ ou $f(x) = -1_K = 1_K$ car $1_K + 1_K = 0_K$

donc : $\forall x \in K$ $f(x) = 1_K$ donc : $f(K) = \{1_K\}$

2)a)on a : $1_K + 1_K \neq 0_K$ et $\alpha = f^{-1}(1_K)$ et $\beta = f^{-1}(-1_K)$

$\alpha = f^{-1}(1_K) \Leftrightarrow f(\alpha) = 1_K$ et $\beta = f^{-1}(-1_K) \Leftrightarrow f(\beta) = -1_K$

donc : $f(\alpha + \alpha) = (f(\alpha))^2 = (1_K)^2 = 1_K$

et $f(\beta + \beta) = (f(\beta))^2 = (-1_K)^2 = 1_K$

donc : $f(\alpha + \alpha) = f(\beta + \beta)$

donc : $\alpha + \alpha = \beta + \beta$ car f bijectif

b)on a : $\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) = 0_K$

$\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta) \times (1_K + 1_K) = 0_K$

$\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0_K$ ou $1_K + 1_K = 0_K$

$\alpha+\alpha=\beta+\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta=0_K$ car $1_K+1_K \neq 0_K$

$\alpha+\alpha=\beta+\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$

3) s'il existe un homomorphisme f bijectif de $(K;+)$ vers $(K-\{0_K\};\times)$ on alors deux cas :

1cas : $1_K+1_K=0_K$ d'après 1) on a :

$\forall x\in K \quad f(x)=1_K \Leftrightarrow \forall x\in K; f(x)=f(0_K)$

Puisque f bijectif : $\forall x\in K \quad x=0_K$

Cad $K=\{0_K\}$ et donc : $K-\{0_K\}=\varnothing$

contradiction

2cas : $1_K+1_K\neq 0_K$ d'après 2) et on posons :

$\alpha=f^{-1}(1_K)$ et $\beta=f^{-1}(-1_K)$ on trouve : $\alpha=\beta$

Cad $f^{-1}(-1_K)=f^{-1}(1_K)$ et Puisque f^{-1} bijectif

Alors : $-1_K=1_K$ cad $1_K+1_K=0_K$ contradiction

Avec le fait que $1_K+1_K\neq 0_K$

Donc : qu'il n'existe pas d'homomorphisme f bijectif de $(K;+)$ vers $(K-\{0_K\};\times)$

Exercice10 :

1) On munit de la loi de composition interne définie par : $x*y=xy+(x^2-1)(y^2-1)$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre.

2)On munit $\mathbb{R}^{+*}$ de la loi de $*$ composition interne définie par : $x*y=\sqrt[3]{x^2+y^2} \quad \forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Montrer que $*$ est commutative, associative, et que 0 est élément neutre. Montrer que aucun élément de n'a de symétrique pour $*$

.3)On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par : $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3} \quad \forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Montrer que l'application : $x\to x^3$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R};*)$ vers $(\mathbb{R};+)$ En déduire que $(\mathbb{R};*)$ est un groupe commutatif

Solution :1) $x*y=xy+(x^2-1)(y^2-1)$)

$=yx+(y^2-1)(x^2-1)$

La loi est commutative

Pour montrer que la loi n'est pas associative, il suffit de trouver $x;y;z\in\mathbb{R}$ et tels que :

$x*(y*z)\neq(x*y)*z$

1 sera l'élément neutre il ne faut pas prendre 1 dans $x;y;z$ et.

Prenons, par exemple : $x=0;y=2;z=3$

$x*(y*z)=0*(2*3)=0*(2\times3+(2^2-1)(3^2-1))$

$=0*30=0\times30+(0^2-1)(30^2-1)=-899$

$(x*y)*z=(0*2)*3=0*2+(0^2-1)(2^2-1)*3$

$=-3*3=0*2+((-3)^2-1)(3^2-1)=-9+8^2=55$

La loi n'est pas associative

$1*x=1x+(1^2-1)(x^2-1)=x$

De plus, comme la loi est commutative

$x*1=1*x$

On a bien $x*1=1*x=x$, 1 est l'élément neutre.

$x*y=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{y^2+x^2}=y*x$

La loi est commutative.

$(x*y)*z=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)*z=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)*z=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2}$

$(x*y)*z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

En reprenant le calcul ci-dessus en changeant en $(x;y:z)$ en $(y;z;x)$ $(y*z)*x=\sqrt{y^2+z^2+x^2}$

Comme $*$ est commutative :

$(y*z)*x=x*(y*z)$ Et finalement :

$(x*y)*z=x*(y*z)$

La loi est associative.

Remarque : On aurait pu calculer directement $x*(y*z)$

$0*x=\sqrt{0^2+x^2}=|x|$ car $x\geq 0$

Comme $*$ est commutative : $0*x=x*0=x$

0 est l'élément neutre.

Supposons x qu'admette un symétrique y

$x*y=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=|x|\Leftrightarrow x^2+y^2=0\Leftrightarrow x+y=0$

Or $x\succ 0$ et $y\succ 0$ donc : $x*y=0$ est impossible,

pour tout $x\succ 0$ x n'a pas de symétrique.

3) On pose $\rho(x)=x^3$ ET $\rho'(x)\succ 0$ pour tout

$x\neq 0$ et est nul en 0 , ρ est une fonction

strictement croissante $\mathbb{R}$ de sur $\mathbb{R}$, ρ est une

bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Il reste à montrer qu'il s'agit d'un morphisme.

$\rho(x*y)=(x*y)^3=\left(\sqrt[3]{x^3+y^3}\right)^3=x^3+y^3=\rho(x)+\rho(y)$

ρ est un morphisme de($\mathbb{R}$; $*$) dans ($\mathbb{R}$;+)et

donc un isomorphisme de($\mathbb{R}$; $*$) dans ($\mathbb{R}$;+)

(puisque ρ est bijective).

ρ^{-1} est un isomorphisme de($\mathbb{R}$;+) dans($\mathbb{R}$; $*$)

donc un morphisme, ($\mathbb{R}$;+) est un groupe commutatif

et l'image d'un groupe commutatif par un morphisme de groupe est un groupe.

($\mathbb{R}$; $*$)est un groupe.

Exercice11 : on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$G=\left\{M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}/\ a^2+b^2=1 et\ (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1)Monter que : $G\neq\varnothing$

2)Monter que : $G=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}/\ \theta\in\mathbb{R}\right\}$

3)Monter que G est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

4) est ce que G est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});+)$?

5)on pose : $M(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

calculer $M^n(\theta)\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

ou : $M^n(\theta)=\underbrace{M(\theta)\times M(\theta)\times\ldots\times M(\theta)}_{nfois}$

6) soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans G tel que :

$f(\theta)=M(\theta)$

a) Monter que f est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R};+)$ dans $(G;\times)$

b)en déduire la structure de $(G;\times)$

7) soit l'ensemble : $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$

a) Monter que : $U=\{e^{i\theta}/\theta\in\mathbb{R}\}$

b)Monter que $(U;\times)$ est un groupe commutatif

Solution : 1)on a : $M_{(1;0)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$ et $0^2+1^2=1$

donc : $G\neq\varnothing$

2)

$M\in G\Leftrightarrow\exists(a;b)\in\mathbb{R}^2/M=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}eta^2+b^2=1$

$\exists\theta\in\mathbb{R}/a=\cos\theta$ et $b=\sin\theta$

Donc : $M\in G\Leftrightarrow\exists\theta\in\mathbb{R}/M=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$$G=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}/\theta\in\mathbb{R}\right\}$$

3)soit: $M_1=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}$ et $M_2=\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}$

Deux éléments de G

$$M_1\times M_2=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2\\ \sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2-\cos\theta_1\cos\theta_2\end{pmatrix}$$

$$M_1\times M_2=\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}$$

Donc : $M_1\times M_2\in G$

Donc G est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

4)on a ; $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$ et $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I_2$

Deux éléments de G

Et puisque : $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\notin G$

Car $0^2+0^2=0\neq 1$

Donc G n'est pas une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});+)$

5)on pose : $M(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Calculons : $M^n(\theta)$

$$M^2(\theta)=M(\theta)\times M(\theta)=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}$$

Montrons que :

$$M^n(\theta)=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}=M(n\theta)$$

par récurrence sur $\mathbb{N}^*$

a)on a : $M^1(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=M(1\theta)$

la ppté est vraie pour n=1

b)on suppose que :

$$M^n(\theta)=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}=M(n\theta)$$

c) montrons que :

$$M^{n+1}(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta\\ \sin(n+1)n\theta & \cos(n+1)\theta\end{pmatrix}=M((n+1)\theta)\ ?$$

$$M^{n+1}(\theta)=M(\theta)M^n(\theta)=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(n\theta+\theta) & -\sin(n\theta+\theta)\\ \sin(n\theta+\theta) & \cos(n\theta+\theta)\end{pmatrix}=M((n+1)\theta)$$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad M^n(\theta)=M(n\theta)$

6)a)Soit $(\theta_1;\theta_2)\in\mathbb{R}^2$

On a : $f(\theta_1+\theta_2)=M(\theta_1+\theta_2)=M(\theta_1)\times M(\theta_2)$

donc : $f(\theta_1+\theta_2)=f(\theta_1)\times f(\theta_2)$

donc : f est un morphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(G;\times)$

et on a : $\forall M\in G\quad \exists\theta\in\mathbb{R}\ /\ f(\theta)=M(\theta)$

donc f est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R};+)$ dans $(G;\times)$

6)b)puisque f est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R};+)$ dans $(G;\times)$ on a $f(G)=\mathbb{R}$ et on a aussi $(\mathbb{R};+)$ est un groupe commutatif alors aussi $(G;\times)$ est un groupe commutatif

7) a)Montrons que : $U=\left\{e^{i\theta}\ /\ \theta\in\mathbb{R}\right\}$?

Soit $z\in\mathbb{C}$ alors $z=a+ib$ avec $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

$$z\in U\Leftrightarrow |z|=1\Leftrightarrow |a+ib|=1$$

$$z\in U\Leftrightarrow a^2+b^2=1$$

$$\Leftrightarrow \exists\theta\in\mathbb{R}/a=\cos\theta \text{ et } b=\sin\theta \text{ et } z=a+ib$$

$z \in U \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} : z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{\theta i}$

Donc : $U = \left\{ e^{i\theta} \,/\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

b)Montrons que $(U;\times)$est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*;\times)$

on a $U \subset \mathbb{C}^*$ et $U \neq \varnothing$ car $1 \in U$

Soient $z_1 \in U$ et $z_2 \in U$ montrons que

$z_1 \times z^{-1}{}_2 \in U$?

$z_1 \in U \Leftrightarrow \exists \theta_1 \in \mathbb{R} : z_1 = e^{\theta_1 i}$

$z_2 \in U \Leftrightarrow \exists \theta_2 \in \mathbb{R} : z_2 = e^{\theta_2 i}$

On a : $z_1 \times z^{-1}{}_2 = e^{\theta_1 i} \times \left(e^{\theta_2 i}\right)^{-1} = e^{\theta_1 i} \times e^{-\theta_2 i} = e^{(\theta_1 - \theta_2)i}$

Avec $\theta_1 - \theta_2 \in \mathbb{R}$ donc : $z_1 \times z^{-1}{}_2 \in U$

Donc : $(U;\times)$ est un un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*;\times)$

Et puisque $(\mathbb{C}^*;\times)$ est commutatif

Alors : $(U;\times)$ est un groupe commutatif

2) $M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} =$

$M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} ac-2bd & -2(ad+bc) \\ ad+bc & ac-2bd \end{pmatrix} = M_{(ac-2bd;ad+bc)}$

Et puisque : $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$ alors : $ac-2bd \in \mathbb{R}$et

$ad+bc \in \mathbb{R}$ donc : $M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} \in E$

E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

3)soient : $M_{(a;b)} \in E$ et $M_{(c;d)} \in E$

$f\left(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)}\right) = f\left(M_{(ac-2bd;ad+bc)}\right)$

$= ac - 2bd + i(ad+bc)\sqrt{2}$

$f\left(M_{(a;b)}\right) \times f\left(M_{(c;d)}\right) = \left(a + ib\sqrt{2}\right)\left(c + id\sqrt{2}\right)$

$= ac - 2bd + i(ad+bc)\sqrt{2} = f\left(M_{(ac-2bd;ad+bc)}\right)$

$= f\left(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)}\right)$

f est un morphisme de ($E - \{0_2\}$, $\times$) dans $(\mathbb{C}^*;\times)$

Soit $x + iy \in \mathbb{C}^*$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

On cherche $M_{(a;b)} \in E$ tel que : $f\left(M_{(a;b)}\right) = x + iy$

$f\left(M_{(a;b)}\right) = x + iy \Leftrightarrow a + ib\sqrt{2} = x + iy$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b\sqrt{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \dfrac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ Existe et il est unique

donc : f est un morphisme bijectif de

($E - \{0_2\}$, $\times$) dans $(\mathbb{C}^*;\times)$

b)($E - \{0_2\}$, $\times$) et $(\mathbb{C}^*;\times)$ sont isomorphes

et $(\mathbb{C}^*;\times)$ un groupe commutatif donc aussi

et on a ($E - \{0_2\}$, $\times$) un groupe commutatif

4)La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $M_2(\mathbb{R})$ et E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$donc La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans E

Donc on a :

$(E;+)$ est un groupe commutatif et

($E - \{0_2\}$, $\times$) un groupe commutatif

La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans E

Conclusion : $(E;+;\times)$est un corps

Exercice 12: Soit $(A;+;\times)$un anneau.

Et 1_A est l'élément neutre de $(A;\times)$

soient : $a \in A$ et $b \in A$ tels que :

a) $ab+ba=1_A$

b) $a^2b+ba^2=a$

1)montrer que : $a^2b=ba^2$

2)montrer que : $aba+aba=a$

3)en déduire que : $ab=ba$

Solution : 1)on a : $a^2b+ba^2=a$

donc : $a^2b+ba^2=a1_A$

donc : $a^2b+ba^2=a(ab+ba)$

donc : $a^2b+ba^2=a^2b+aba$

donc : $ba^2=aba\ (1)$

et on a : $a^2b+ba^2=a=1_Aa$

donc : $a^2b+ba^2=(ab+ba)a$

donc : $a^2b+ba^2=aba+ba^2$

donc : $a^2b=aba\ (2)$

de (1) et (2) en déduit que : $a^2b=ba^2$

2)d'après ce qui précéde on a :

$ba^2=aba$ et $a^2b=aba$

Donc : $aba+aba=a^2b+ba^2$ et d'après b) on a $aba+aba=a$

3) on a : $(ab)(ab)=abab=(aba)b=(ba^2)b$

$(ba)(ba)=baba=b(aba)=b(a^2b)$

(Car : $aba=a^2b$)

Et on a : $(ab)(ab)=(1_A-ba)(1_A-ba)$

$(ab)(ab)=1_A-ba-ba+(ba)(ba)$

Donc : $ba^2b=1_A-ba-ba+ba^2b$

Car : $(ab)(ab)=(ba)(ba)=ba^2b$

Donc : $ba+ba=1_A$ et puisque : $ba+ab=1_A$

Alors : $ab=ba$

Exercice13: Soit $(K;+;\times)$ un corps.

On note : 1_K l'élément neutre de $(K;\times)$

Soient x et y deux éléments de $K-\{0_K\}$

Qui vérifient les conditions suivantes :

a) $x+y=1_K$ b) $x^{-1}+y^{-1}=1_K$

avec : x^{-1} le symétrique de x pour la loi $\times$

1)montrer que : $xy=yx=-1_K$

2)montrer que : $x^4+y^4=7.1_K$

Avec : $7.1_K=\underbrace{1_K+1_K+\dots+1_K}_{7\ fois}$

Solution : 1) Soient x et y deux éléments de $K-\{0_K\}$ on a : $xy=x\left(x^{-1}+y^{-1}\right)y$

$xy=xx^{-1}y+xy^{-1}y=y+x=-1_K$

Donc : $xy=yx=-1_K$

2)on a : $1_K=(x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2$

$1_K=x^2-1_K-1_K+y^2$

Donc : $x^2+y^2=3.1_K$

Donc : $9.1_K=\left(x^2+y^2\right)^2$

Donc : $9.1_K=x^4+x^2y^2+y^2x^2+y^4$

Donc : $9.1_K=x^4+1_K+1_K+y^4$

Donc : $x^4+y^4=7.1_K$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien