

Exercices d'applications et de réflexions sur les Lois de composition interne

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences maths

**TD : Structures algébriques (partie 1)**

**Lois de composition interne**

**Exercice1** : montrer on utilisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$  que l'addition et la multiplication sont des lois de compositions internes

**Exercice2** : on définit sur l'ensemble  $] -1; 1[$  la

relation  $T$  tel que :  $xTy = \frac{x+y}{1+xy}$  ;  $\forall (x; y) \in ] -1; 1[$

Monter que  $T$  est une loi de composition interne

Dans  $] -1; 1[$

**Exercice3** : on considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ calculer } A^2 \text{ et } A^3 \text{ et en déduire}$$

$$A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

**Exercice4** : on muni  $\mathbb{R}$  d'une loi de composition interne  $*$  définit par :  $x * y = xy - 3x - 3y + 12$  ;

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et soit : } S = ]3; +\infty[$$

Monter que  $S$  est une partie stable pour  $(\mathbb{R}; *)$

**Exercice5** : 1) on muni  $\mathbb{R}$  d'une loi de composition interne  $*$  définit par :  $a * b = a + b - 3ab$  ;  $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$

Monter que  $*$  est commutative et associative

2) on muni  $\mathbb{R}^2$  d'une loi de composition interne  $T$  définit par :

$$(a; b)T(x; y) = (ax; ay + b) ; \forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

Monter que  $T$  est ni commutative et ni associative dans  $\mathbb{R}^2$

**Exercice6** : on muni  $\mathbb{R}$  d'une loi de composition interne  $*$  définit par :  $a * b = ab - (a + b) + 2$  ;

$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$  1) Monter que  $*$  est commutative

2) Monter que  $*$  admet un élément neutre et déterminer les éléments symétrisables

**Exercice7** : on muni  $\mathbb{R}$  d'une loi de composition interne  $*$  définit par :  $x * y = xy - 4x - 4y + 20$  ;

$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$  1) la loi  $*$  est-elle commutative ?

2) la loi  $*$  admet -elle un élément neutre et déterminer le s'il existe

3) déterminer les éléments symétrisables s'il existent

**Exercice8** : on muni  $\mathbb{R}$  d'une loi de composition interne  $*$  définit par :  $x * y = x + 4y - 1$  ;  $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

1) la loi  $*$  est-elle commutative ?

2) la loi  $*$  admet -elle un élément neutre et déterminer le s'il existe

**Exercice9** : on considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que :  $A^2 - 2A + I_2 = 0$  et en déduire que

La matrice  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$

2) calculer :  $B^2$  et  $B^3$  et en déduire que

La matrice  $B$  n'admet pas d'inverse

**Exercice10 :** on considère les matrices

suivantes :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) calculer :  $A^2$  et  $A^3$  et en déduire que

2) Montrer que :  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}$

3) Montrer que :  $(A - I_2)^2 = 0_2$  avec  $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) en déduire que La matrice  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$

**Exercice11 :** on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$$

Montrer que  $E$  est une partie stable de  $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

**Exercice12 :** soit l'application :  $f : (\mathbb{Z}; +) \rightarrow (\mathbb{Z}^*; \times)$   
 $x \mapsto 5^x$

montrons que  $f$  est un morphisme de  $(\mathbb{Z}, +)$

dans  $(\mathbb{Z}^*, \times)$

**Exercice13 :** soit l'application :  $g : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \ln x$

montrons que  $g$  est un morphisme de :

$(]0; +\infty[, \times)$  dans  $(\mathbb{R}, +)$

**Exercice14:** soit l'application :  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $z \mapsto |z|$

montrons que  $h$  est un morphisme de :  
 $(\mathbb{C}, \times)$  dans  $(\mathbb{R}, \times)$

**Exercice15 :** soit l'application :

$$k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$\theta \mapsto e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

montrons que  $k$  est un morphisme de :  $(\mathbb{R}, +)$

dans  $(\mathbb{C}^*, \times)$

$$l : \mathbb{R} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$$

**Exercice16 :** soit l'application :  $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

montrons que  $l$  est un morphisme de :  $(\mathbb{R}, +)$

dans  $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

**Exercice17:** soit  $f$  l'application :  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$   
 $n \mapsto \overline{2^n}$

montrons que  $f$  est un morphisme de  $(\mathbb{N}, +)$

dans  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \times)$

**Exercice18 :** on muni  $\mathbb{R}^2$  de la loi de composition

interne suivante :  $(a;b) + (a';b') = (a+a'; b+b')$  ;

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall (a';b') \in \mathbb{R}^2$$

Soit  $A(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  l'ensemble des applications affines :

$$A(\mathbb{R}; \mathbb{R}) = \{ f_{(a;b)} / \forall x \in \mathbb{R} : f_{(a;b)}(x) = ax + b \}$$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow A(\mathbb{R}; \mathbb{R})$   
 Soit l'application :  $\varphi : (a;b) \mapsto f_{(a;b)}$

Montrer  $\varphi$  est un morphisme de  $(\mathbb{R}^2, +)$

dans  $(A(\mathbb{R}; \mathbb{R}), +)$

**Exercice19 :** soient  $a \in ]2; +\infty[$  et  $b \in ]2; +\infty[$

On pose :  $a * b = (a-2)(b-2) + 2$

1) montrer que  $*$  est une loi de composition interne

Dans  $I = ]2; +\infty[$

2) soit l'application définie sur  $\mathbb{R}^{**}$  vers  $I$

$$\text{tel que : } f(x) = \frac{2x+1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{**}$$

a) montrer que  $f$  est un morphisme de  $(\mathbb{R}^{**}, \times)$

dans  $(I, *)$

b) en déduire que  $*$  est associative et admet un élément neutre a determiner

**Exercice20 :** on muni  $\mathbb{R}$  d'une loi de composition interne  $*$  définie par :  $a * b = ab + (a^2 - 1)(b^2 - 1)$  ;

$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$  1) Monter que  $*$  est commutative

2) Monter que  $*$  n'est pas associative

3) est ce que la loi  $*$  admet un élément neutre ?

4) résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :

a)  $2 * x = 5$       b)  $x * x = 1$

**Exercice21 :** on muni  $\mathbb{R}^2$  de la loi de composition interne suivante :  $(a; b) * (a'; b') = (a \times a'; b \times b')$  ;

$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$  et  $\forall (a'; b') \in \mathbb{R}^2$

1) Monter que  $*$  est commutative et associative

2) Monter que  $*$  admet un élément neutre et déterminer dans  $\mathbb{R}^2$  les éléments symétrisables Pour la loi  $*$

3) soit :  $S = \mathbb{R} \times \{0\}$

a) montrer que  $S$  est une partie stable de  $(\mathbb{R}^2, *)$

b) Monter que  $(S, *)$  admet un élément neutre et comparer les éléments neutres de  $(\mathbb{R}^2, *)$  et de  $(S, *)$

**Exercice22 :** on muni  $\mathbb{C}$  de la loi de composition interne  $T$  suivante :  $zTz' = z\overline{z'}$  ;  $\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2$

$\forall (a'; b') \in \mathbb{R}^2$  (F, T)  $\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2$

1) étudier la commutativité et l'associativité de  $T$

2) résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $(zTz)Tz = i$

**Exercice23 :** on muni  $I = ]0; +\infty[$  de la loi de composition interne  $*$  suivante :

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall (x; y) \in I^2$$

soit  $f$  l'application définie sur  $I$  vers  $I$

tel que :  $f(x) = x^2 \quad \forall x \in I$

1) montrer que :  $f(x * y) = f(x) + f(y)$

2) a) montrer que  $*$  est associative

b) est ce que  $*$  admet un élément neutre

3) soit  $a \in I$  calculer :  $A = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}} \quad n \in \mathbb{N}^*$

**Exercice24 :** 1) on muni  $\mathbb{R}$  d'une loi de composition interne  $*$  définie par :  $x * y = x + y - xy$  ;  $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

soit  $f$  l'application définie sur  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$

tel que :  $f(x) = 1 - x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1) montrer que  $f$  est un homomorphisme bijectif

De  $(\mathbb{R}; *)$  dans  $(\mathbb{R}; \times)$

2) en déduire que  $*$  est associative et que  $*$  admet un élément neutre que l'on déterminera

3) déterminer l'ensemble des éléments symétrisables pour la loi  $*$

4) soit  $a \in \mathbb{R}$  calculer :  $A = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}} \quad n \in \mathbb{N}^*$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

