

TD : d'ARITHMETIQUE : Exercices de rappels avec corrections

Exercice1 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156
 12) Déterminer dans \mathbb{Z} tous les diviseurs de -8
Solution : 1) 156 a 12 diviseurs :
 1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78 et 156.
 156 et 1 sont appelés diviseurs triviaux, les autres sont des diviseurs stricts.

2) $D_{-8} = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

Exercice2 : 1) $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$

- a) montrer que si $a \nmid 2b+c$ et $a \nmid b+c$ alors $a \nmid c$
- b) montrer que si $a \nmid 2b+3c$ et $a \nmid b+c$ alors $a \nmid c$
- c) montrer que si $a \nmid x-y$ et $a \nmid b-c$ alors $a \nmid xb-cy$

2) $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $a \nmid 12n+1$ et $a \nmid -2n+3$

Montrer que $a \nmid 19$

3) $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ et $d \nmid n^2+3$ et $d \nmid 2n-1$

Montrer que $d \nmid 13$

Solution : 1) a) $\begin{cases} a \nmid 2b+c \\ a \nmid b+c \end{cases} \Rightarrow a \nmid 2(b+c) - (2b+c) \Rightarrow a \nmid c$

1) b) $\begin{cases} a \nmid 2b+3c \\ a \nmid b+c \end{cases} \Rightarrow a \nmid 2b+3c - 2(b+c) \Rightarrow a \nmid c$

1) c) $\begin{cases} a \nmid x-y \\ a \nmid b-c \end{cases} \Rightarrow a \nmid bx-by \text{ et } a \nmid by-cy \Rightarrow a \nmid bx-cy$

2) $a \nmid 12n+1$ et $a \nmid -2n+3$

$\Rightarrow a \nmid 12n+1 \text{ et } a \nmid -12n+18 \Rightarrow a \nmid 19$

$\Rightarrow a \in \{\pm 1; \pm 19\}$

3) $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ et $d \nmid n^2+3$ et $d \nmid 2n-1$

$\Rightarrow d \nmid n^2+3 \text{ et } a \nmid (2n-1)^2 \Rightarrow d \nmid 4n^2+12 \text{ et } d \nmid 4n^2-4n+1$

$\Rightarrow d \nmid 11+4n \text{ et } d \nmid -2+4n \Rightarrow d \nmid 13$

Exercice3 : $a \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$

Montrer que : $\begin{cases} a \nmid 5x-7 \\ a \nmid 2x+3 \end{cases} \Rightarrow a \nmid 29$

Solution : $\begin{cases} a \nmid 5x-7 \\ a \nmid 2x+3 \end{cases} \Rightarrow a \nmid 2(5x-7) - 5(2x+3)$

$a \nmid 10x-14 - 10x-15 \Rightarrow a \nmid -29 \Rightarrow a \nmid 29$

Exercice4 : Soient $a_n = 2n+1$ et $b_n = 5n+4$

1- Montrer que tout diviseur commun de a_n et b_n divise 3.

2- Déterminer tous les diviseurs communs de a_n et b_n

Exercice5 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$:

3 divise $4^n - 1$ **Solution :**

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$

1étapes : l'initialisation : Pour $n=0$ nous avons

$4^0 - 1 = 0$ est un multiple de 3

Donc $P(0)$ est vraie.

2étapes : d'hérité : Supposons que $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$ donc $4^n = 3k + 1$

3étapes : Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie. Montrons alors que :

$\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1} - 1 = 3k' ??$

$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1$

$= 4 \times (3k+1) - 1 = 12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k+1)$

avec $k' = 4k + 1$ Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}; 4^n - 1$ est divisible par 9

Exercice6 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$

Solution : $n+2/3n+1$ et $n+2/n+2$

$n+2/3n+1$ et $n+2/3n+6$ donc

$n+2/(3n+6) - (3n+1)$ donc $n+2/5$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5 donc il faut que $n+2 \in \{-1; -5; 1; 5\}$ ce qui entraîne que

$n \in \{-3; -7; -1; 3\}$

On vérifie que si $n \in \{-3; -7; -1; 3\}$ alors $n+2/3n+1$ avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$ sont : -7 ; -3 ; -1 ; 3

Exercice7 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

Solution : Cette fraction a un sens si : $n+4 \neq 0$ soit $n \neq -4$. On constate que $3n+8 = 3(n+4) - 4$ $n+4$ divise $3(n+4)$, donc $n+4$ divise $3n+8$ si $n+4$ divise -4.

Les diviseurs de -4 sont 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4.

Il faut que $n+4 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$ ce qui

entraîne que $n \in \{-8; -6; -5; -3; -2; 0\}$

On vérifie que -4 n'appartient pas à -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0 avant de conclure.

Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un

entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0.

Exercice8 : Résoudre dans \mathbb{N}^2 les équations suivantes : a) $x^2 - y^2 = 32$ avec $x > y$

b) $2xy + 2x + y = 99$

Solution : a) $x^2 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 32$

$x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs positifs de 32

Et $(x-y) + (x+y) = 2x$ est un nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité $32 = 2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$$S = \{(6; 2); (9; 7)\}$$

b) $2xy + 2x + y = 99 \Leftrightarrow 2xy + y + 2x + 1 - 1 = 99$

$$\Leftrightarrow y(2x+1) + 2x + 1 = 99 + 1 \Leftrightarrow (2x+1)(y+1) = 100$$

Donc : $2x+1$ et $y+1$ sont des diviseurs positifs de 100 : $D_{100} = \{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$

$2x+1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y+1$	100	50	25	20	5	4	2	1
x	0			2		12		
y	99			10		3		

$$S = \{(0; 99); (2; 19); (12; 3)\}$$

Exercice9 : déterminer le nombre entier naturel n tel que le quotient de la division euclidienne de n par 25 est p et le reste est p^2 ($p \in \mathbb{N}$)

Solution: $n \in \mathbb{N} : n = 25p + p^2$ et $0 \leq p^2 < 25$

donc $0 \leq p < 5$

Donc : $\begin{cases} p=0 \\ n=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=1 \\ n=25 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=2 \\ n=54 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=3 \\ n=84 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=4 \\ n=116 \end{cases}$

Donc : $n \in \{0; 25; 54; 84; 116\}$

Exercice 10: n et a et b des entiers naturels Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b alors q' est aussi le quotient de n par ab

Solution: soit r le reste de la division euclidienne de n par a et r' le reste de la division euclidienne de q par b on a donc : $n = aq + r$ et $0 \leq r \leq a-1$ et on a : $q = bq' + r'$ et $0 \leq r' \leq b-1$ donc on déduit que : $n = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r$

Et puisque : $0 \leq r' \leq b-1$ et $0 \leq r \leq a-1$ alors : $ar' + r \leq ab-1$ donc $n = abq' + ar' + r$

$0 \leq ar' + r \leq b-1$ conclusion : q' est aussi le quotient de n par ab

Exercice11: $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$

si q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

Solution : soit r le reste de la division euclidienne de $a-1$ par b donc :

$$a-1 = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b$$

$$\text{Donc : } ab^9 - b^9 = b^{10}q + rb^9$$

$$\text{Donc : } ab^9 - 1 = b^{10}q + rb^9 + b^9 - 1$$

$$\text{Donc : } ab^9 - 1 = b^{10}q + (r+1)b^9 - 1$$

$$\text{On montre que : } 0 \leq (r+1)b^9 - 1 < b^{10} ???$$

$$\text{On a : } 0 \leq r < b \text{ donc } 0 \leq r+1 \leq b$$

$$\text{donc } 0 \leq (r+1)b^9 \leq b^{10} \text{ donc } 0 \leq (r+1)b^9 - 1 \leq b^{10} - 1$$

$$\text{donc } 0 \leq (r+1)b^9 - 1 < b^{10}$$

conclusion : q est aussi le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

b) L'inverse est-il vrai ?

Exercice12: 1) Les nombres suivants sont-ils premiers : 499 ; 601 ; 703 ; 2003 ; $2n^2 + 3n$ $n \in \mathbb{N}$

Exercice 13 :

Montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 3 ne peut pas être égal à 2.

Exercice 14 :

a) Montrer que tout nombre premier s'écrit de la forme $p = 6n + 1$ ou $p = 6n + 5$

Exercice 15 : montrer que $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \wedge (a+1) = 1$

Solution : on pose $d = a \wedge (a+1)$

$$\Rightarrow d \mid a \text{ et } d \mid a+1 \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$$

Exercice 16 : $n \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = n^2 + 3$ et $B = n + 2$

1) montrer que $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N}$

Solution : 1) on pose $d = A \wedge B$ et $d' = (n+2) \wedge 7$

On a : $d = A \wedge B$

$$\Rightarrow d \mid A \text{ et } d \mid B \Rightarrow d \mid n^2 + 3 \text{ et } d \mid n + 2$$

$\Rightarrow d \mid n^2 + 3$ et $d \mid n + 2$ on utilisant la division

euclidienne : on trouve : $n^2 + 3 = (n+2)(n-2) + 7$

$$n^2 + 3 - (n+2)(n-2) = 7$$

$$\Rightarrow d \mid n^2 + 3 - (n+2)(n-2)$$

$$\Rightarrow d \mid 7 \text{ et } d \mid n+2 \Rightarrow d \mid (n+2) \wedge 7 \Rightarrow d \mid d'$$

Inversement : On a : $d' = (n+2) \wedge 7$

$$\Rightarrow d' \mid n+2 \text{ et } d' \mid 7 \Rightarrow d' \mid (n+2)(n-2) \text{ et } d' \mid 7$$

$$\Rightarrow d' \mid (n+2)(n-2) + 7 \text{ et } d' \mid 7 \Rightarrow d' \mid n^2 + 3 \text{ et } d' \mid 7$$

donc : $d' \mid A \wedge B$ donc $d' \mid d$

donc $d \mid d'$ et $d \mid d$ et $d \in \mathbb{N}$ et $d' \in \mathbb{N}$ donc

donc $d = d'$ donc : $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

$$2) \frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n+2 \mid n^2+3 \text{ et on a : } n+2 \mid n+2$$

Donc : $n+2 \mid A \wedge B$ Donc : $n+2 \mid (n+2) \wedge 7$

Donc : $n+2 \mid 7$ or 7 est premier donc :

Il faut que $n+2 \in \{1; 7\}$ ce qui entraîne que $n=5$

Exercice 17:

1- Montrer que tout diviseur commun de : $a = 2n + 3$ et $b = 5n + 1$ est un diviseur de 13
2- Déterminer tous les diviseurs communs

de a et b .

3- Déterminer les valeurs de n pour lesquels : $a \wedge b = 13$

Exercice 18: $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que : $a = bc + d$

1) montrer que $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que : $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

Solution : 1) on pose $\Delta_1 = a \wedge b$ et $\Delta_2 = b \wedge d$

On a : $\Delta_1 \mid a$ et $\Delta_1 \mid b$ donc $\Delta_1 \mid a$ et $\Delta_1 \mid bc$ donc

$$\Delta_1 \mid a - bc \text{ donc } \Delta_1 \mid d$$

$$\text{donc } \Delta_1 \mid d \text{ et } \Delta_1 \mid b \text{ donc } \Delta_1 \mid b \wedge d \text{ donc } \Delta_1 \mid \Delta_2$$

inversement On a : $\Delta_2 \mid b$ et $\Delta_2 \mid d$ donc $\Delta_2 \mid d$ et

$$\Delta_2 \mid bc \text{ donc } \Delta_2 \mid bc + d \text{ donc } \Delta_2 \mid a$$

$$\text{donc } \Delta_2 \mid a \text{ et } \Delta_2 \mid b \text{ donc } \Delta_2 \mid a \wedge b \text{ donc } \Delta_2 \mid \Delta_1$$

On a donc : $\Delta_1 \mid \Delta_2$ et $\Delta_2 \mid \Delta_1$ et $\Delta_1 \in \mathbb{N}$ et $\Delta_2 \in \mathbb{N}$

donc $\Delta_1 = \Delta_2$

donc : $a \wedge b = b \wedge d$

2) on a : $a = bc + (a - bc)$ si on prend : $d = a - bc$ et d'après 1) on aura : $a \wedge b = b \wedge d = b \wedge (a - bc)$

Exercice 19 : $a \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = 35a + 57$ et $B = 45a + 76$ montrer que $A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Solution : 1) on pose $d = A \wedge B$

$$\Rightarrow d \mid A \text{ et } d \mid B \Rightarrow d \mid 35a + 57 \text{ et } d \mid 45a + 76$$

$$\Rightarrow d \mid 9(35a + 57) \text{ et } d \mid 7(45a + 76)$$

$$\Rightarrow d \mid 315a + 513 \text{ et } d \mid 315a + 532$$

$\Rightarrow d \mid 19$ or 19 est premier donc :

Il faut que $d \in \{1; 19\}$ ce qui entraîne que :

$A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Exercice 20:

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer :

$$67 \wedge 39$$

2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel que : $39u + 67v = 1$

Solution: 1) (1) $67 = 1 \times 39 + \boxed{28}$ (2) $39 = 1 \times 28 + \boxed{11}$

$$(3) 28 = 2 \times 11 + \boxed{6} \quad (4) 11 = 1 \times 6 + \boxed{5}$$

$$(5) 6 = 1 \times 5 + \boxed{1} \quad (6) 5 = 1 \times 5 + \boxed{0}$$

Donc : $67 \wedge 39 = 1$ c'est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide

$$\begin{aligned}
 2) (5) \quad & 6 = 1 \times 5 + \boxed{1} \Rightarrow 6 - 1 \times 5 = \boxed{1} \\
 \Rightarrow 6 - 1 \times (11 - 1 \times 6) &= \boxed{1} \Rightarrow 2 \times 6 - 1 \times 11 = \boxed{1} \\
 \Rightarrow 2 \times (28 - 2 \times 11) - 1 \times 11 &= \boxed{1} \Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times 11 = \boxed{1} \\
 \Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times (39 - 1 \times 28) &= \boxed{1} \Rightarrow 7 \times 28 - 5 \times 39 = \boxed{1} \\
 \Rightarrow 7 \times (67 - 1 \times 39) - 5 \times 39 &= \boxed{1} \Rightarrow 7 \times 67 - 12 \times 39 = \boxed{1}
 \end{aligned}$$

Exercice21 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$1) \quad n \wedge (n+1) = 1 \quad 2) \quad n \wedge (2n+1) = 1$$

$$3) \quad (2n+1) \wedge (3n+1) = 1$$

Exercice22: $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de a par 19

Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de b par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

$$1) \quad a+b \quad 2) \quad a^2 + b^2 \quad 3) \quad 2a - 5b$$

Solution : 1) On a : $a \equiv 17[19]$ et $b \equiv 15[19]$

$$\text{donc } a+b \equiv 17+15[19] \Leftrightarrow a+b \equiv 13[19]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a+b$ Par 19 est : 13

$$2) \quad a \equiv 17[19] \Rightarrow a^2 \equiv 17^2[19] \Rightarrow a^2 \equiv 4[19]$$

$$b \equiv 15[19] \Rightarrow b^2 \equiv 15^2[19] \Rightarrow b^2 \equiv 16[19]$$

$$\text{Donc } a^2 + b^2 \equiv 4+16[19] \Leftrightarrow a^2 + b^2 \equiv 1[19]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a^2 + b^2$ Par 19 est : 1

$$3) \quad a \equiv 17[19] \Rightarrow 2a \equiv 2 \times 17[19] \Rightarrow 2a \equiv 15[19] \quad (1)$$

$$b \equiv 15[19] \Rightarrow 5b \equiv 5 \times 15[19] \Rightarrow 5b \equiv 18[19]$$

$$\text{Donc } 5b \equiv -1[19] \Rightarrow -5b \equiv 1[19] \quad (2)$$

De (1) et (2) on déduit que :

$$2a - 5b \equiv 15+1[19] \Rightarrow 2a - 5b \equiv 16[19]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre $2a - 5b$ Par 19 est : 16

Exercice23 : 1) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 10 du nombres 3^n

2) en déduire le chiffre des unités du nombres 2019^{2020}

3) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n tels que : $3^n + 5n + 2 \equiv 0[10]$

Solution : 1) $3^n \equiv r[10]$ et $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

$$\text{On a : } 3^0 \equiv 1[10] \text{ et } 3^1 \equiv 3[10] \text{ et } 3^2 \equiv 9[10]$$

$$\text{et } 3^3 \equiv 7[10] \text{ et } 3^4 \equiv 1[10]$$

Si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n = 4k + r$ avec $r \in \{0; 1; 2; 3\}$

$$\text{On a : } 3^4 \equiv 1[10] \text{ donc } (3^4)^k \equiv 1^k[10]$$

donc : $3^{4k} \equiv 1[10]$ et $3^{4k+1} \equiv 3[10]$ et $3^{4k+2} \equiv 9[7]$

et $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

2) le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est le reste dans la division du nombre 2019^{2020} Par 10

cad : on cherche r tel que : $2019^{2020} \equiv r[10]$??

On a : $2019 = 2010 + 9$ donc : $2019 \equiv 9[10]$

donc : $2019^{2020} \equiv 9^{2020}[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 3^{4040}[10]$

or : $4040 = 4 \times 1010 = 4 \times k$

donc : $2019^{2020} \equiv 3^{4k}[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 1[10]$

le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est 1

Autre méthode : $2019 \equiv 9[10]$

donc : $2019 \equiv -1[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 1[10]$

3) On Dresse une table comme suite :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
3^n	$\equiv 1[10]$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 9[10]$	$\equiv 7[10]$
$5n$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$
$3^n + 5n + 2$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 1[10]$	$\equiv 4[10]$

donc : $3^n + 5n + 2 \equiv 0[10] \Leftrightarrow n = 3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice24 : 1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(n+1) \equiv 0[n^2]$$

2) montrer que : $7^{7^{7^{7^7}}} \equiv 3[10]$

Solution : 1) on a : $(n+2)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$ Donc :

$$(n+2)^{n+2} = C_{n+2}^0 n^0 2^{n+2} + C_{n+2}^1 n^2 2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$$

$$(n+2)^{n+2} = 2^{n+2} + (n+2)n2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$$

$$\text{Donc : } (n+2)^{n+2} = 2^{n+1}(2+n^2+2n) + n^2 \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$$

$$(n+2)^{n+2} = 2^{n+1}(2+2n) + 2^{n+1}n^2 + n^2 \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$$

$$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(1+n) = n^2 \left(2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k} \right)$$

$$\text{on a : } n^2 \left(2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k} \right) \equiv 0[n^2]$$

$$\text{donc : } (n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(n+1) \equiv 0[n^2]$$

2) on a : $7 \equiv 7[10]$ et $7^2 \equiv -1[10]$ donc $7^4 \equiv 1[10]$

Donc : $7^{4k} \equiv 1[10]$ et $7^{4k+1} \equiv 7[10]$ et $7^{4k+2} \equiv 9[10]$

$7^{4k+3} \equiv 3[10]$

On aussi : $7 \equiv 3[4]$ et $7^2 \equiv 1[4]$

Donc $7^{2k} \equiv 1[4]$ et $7^{2k+1} \equiv 3[4]$

Or : $7^{7^{7^7}} \equiv 1[2]$ (car impair)

Donc : $7^{7^{7^{7^7}}} \equiv 3[10]$

- Exercice 25 :** 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 45872^{2018} par 9
 2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 25614^{6512} par 13
 3) Montrer que pour tout n entier naturel : $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7
 4) Montrer que pour tout n entier naturel, $5n^3 + n$ est divisible par 6
 5) Montrer que si n n'est pas un multiple de 7, alors : $n^6 - 1$ est un multiple de 7
 6) Montrer que pour tout entier naturel, le nombre $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6

Exercice 26 : $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}^*$ On considère les deux nombres : $a = 9x + 4y$ et $b = 2x + y$

- 1) montrer que $x \wedge y = a \wedge b$
 2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = n^2 + 5n + 13$ et $b = n + 3$
 a) montrer que $a \wedge b = b \wedge 7$
 b) en déduire les valeurs possibles $a \wedge b = d$
 c) montrer que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$
 d) en déduire les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$

Solution : 1) on pose $d = x \wedge y$ et $d' = a \wedge b$

montrons que : $d = d'$

$d = x \wedge y$ donc : $\Rightarrow d \mid x$ et $d \mid y \Rightarrow d \mid a$ et $d \mid b$

Car il divise toute combinaison de x et y

$\Rightarrow d \mid a \wedge b \Rightarrow d \mid d'$

Inversement :

$d' = a \wedge b \Rightarrow d' \mid a$ et $d' \mid b \Rightarrow d' \mid 9x + 4y$ et $d' \mid 2x + y$

$\Rightarrow d' \mid (9x + 4y) - 4(2x + y)$ et $d' \mid 9(2x + y) - 2(9x + 4y)$

$\Rightarrow d' \mid x$ et $d' \mid y \Rightarrow d' \mid x \wedge y \Rightarrow d' \mid d$

ce qui entraîne: $d = d'$

2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = n^2 + 5n + 13$ et $b = n + 3$

a) montrons que $a \wedge b = b \wedge 7$?

la division euclidienne de $n^2 + 5n + 13$ par $n + 3$

donne : $n^2 + 5n + 13 = (n+3)(n+2) + 7$

Donc : $a = b(n+2) + 7 \Leftrightarrow a - b(n+2) = 7$

on pose $d' = b \wedge 7$ et $d = a \wedge b$

montrons que : $d = d'$

$d = a \wedge b \Rightarrow d \mid a$ et $d \mid b \Rightarrow d \mid a - b(n+2)$ et $d \mid b$
 $\Rightarrow d \mid 7$ et $d \mid b \Rightarrow d \mid b \wedge 7 \Rightarrow d \mid d'$
 $d' = b \wedge 7 \Rightarrow d' \mid b$ et $d' \mid 7 \Rightarrow d' \mid b(n+2) + 7$ et $d' \mid b$
 $\Rightarrow d' \mid a$ et $d' \mid b \Rightarrow d' \mid a \wedge b \Rightarrow d' \mid d$

ce qui entraîne: $d = d'$

b) les valeurs possibles $a \wedge b = d$??

on a : $a \wedge b = b \wedge 7 = d$

donc : $d \mid 7$ donc : $d = 1$ ou $d = 7$

c) montrons que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$

$n \equiv 4[7] \Leftrightarrow n+3 \equiv 0[7] \Leftrightarrow 7 \mid n+3 \Leftrightarrow 7 \mid b \wedge 7 = 7 \Leftrightarrow b \wedge a = 7$

d) les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$??

$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow n$ n'est pas congrue à 0 modulo 4

$n \equiv 0[7]$ ou $n \equiv 1[7]$ ou $n \equiv 2[7]$ ou $n \equiv 3[7]$ ou $n \equiv 5[7]$

ou $n \equiv 6[7]$

Exercice 27: Résoudre les équations

suivantes dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: 1) $\bar{2}x = \bar{3}$ 2) $x^2 + \bar{3}x = \bar{0}$

3) $\bar{2}013x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

Solution : On a : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}\}$

1) On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que
 Cette équation n'admet pas de solutions

Donc : $S = \emptyset$

1) On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$x^2 + \bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont solutions de l'équation

Donc : $S = \{\bar{0}; \bar{1}\}$

2) $\bar{2}013x^3 + \bar{2}x = \bar{k} \Leftrightarrow \bar{1}x^3 + \bar{2}x = \bar{k} \Leftrightarrow x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

Car : $2013 = 503 \times 4 + 1$

On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^3	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$x^3 + \bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Si $\bar{k} = \bar{0}$: $S = \{\bar{0}; \bar{2}\}$ Si $\bar{k} = \bar{1}$: $S = \{\bar{3}\}$

Si $\bar{k} = \bar{2}$: $S = \emptyset$

Si $\bar{k} = \bar{3}$: $S = \{\bar{1}\}$

Exercice28 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ l'équations suivants : $x + \bar{3}y = \bar{1}$

Solution : on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$ Comme suite

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

$$S = \{(\bar{0}; \bar{2}); (\bar{1}; \bar{0}); (\bar{2}; \bar{3}); (\bar{3}; \bar{1}); (\bar{4}; \bar{3}); (\bar{4}; \bar{4})\}$$

Exercice29 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ les

système suivants : $\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$

Solution :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{3} + \bar{2})x + (\bar{2} + \bar{4})y = \bar{3} + \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \bar{4} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \bar{1} \\ y = \bar{4} \end{cases} \text{ donc } S = \{(\bar{1}; \bar{4})\}$$

Exercice30 : déterminer : $d = (-8316) \wedge 1080$

et $m = 8316 \vee 1080$

Solution : la décomposition des nombres 8316 et 1080 en produit des facteurs premiers

Donnent : $8316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11$ et

$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$

$$d = 8316 \wedge 1080 = 2^2 \times 3^3 = 108 \text{ et}$$

$$m = 8316 \vee 1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = 11880$$

Exercice31: si $2 = a \wedge b$ et $-12 = a \times b$

déterminer : $a \vee b$

Solution : on a $a \wedge b \times (a \vee b) = |ab|$

$$\text{donc } a \vee b = |a \times b| / a \wedge b = |-12| / 2 = 6$$

Exercice32: $a = (25^n - 1)(36^n - 1)$ et $b = (5^n - 1)(6^n - 1)$

Calculer les $a \vee b$ ($n \in \mathbb{N}$)

Solution :

$$a = ((5^n)^2 - 1)((6^n)^2 - 1) = (5^n - 1)(5^n + 1)(6^n - 1)(6^n + 1)$$

$$a = b(5^n + 1)(6^n + 1) \text{ donc } \frac{b}{a} \text{ donc } a \vee b = a$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien