L'ARITHMETIQUE

I) REPPEL

1) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$; on dit que l'entier relatif b divise a s'il existe un entier relatif k tel que $\boldsymbol{a = kb}$; on écrit : $\boldsymbol{b|a}$.
On dit que a est divisible par b ou a est un multiple de b

Définition :

- Si $b|m$ et $b|n$ on dit que b est un diviseur commun de m et n
- Si $b|m$ et $b'|m$, on dit que m est un multiple commun de b et b'.

Propriété :

Etant donnés des entiers relatifs non nuls. On a les assertions suivantes :

① $\begin{cases} a|b \\ b|a \end{cases} \Rightarrow |a| = |b|$

② $\begin{cases} a|b \\ b|c \end{cases} \Rightarrow a|c$

③ $\begin{cases} a|m \\ a|n \end{cases} \Rightarrow a|\alpha m + \beta n$ où α et β sont des entiers relatifs quelconques.

Application :

Soient $a_n = 2n + 1$ et $b_n = 5n + 4$

1- Montrer que tout diviseur commun de a_n et b_n divise 3.

2- Déterminer tous les diviseurs communs de a_n et b_n

Propriété :

① $\begin{cases} d|a \\ \delta|b \end{cases} \Rightarrow d\delta|ab$

② $a|b \Leftrightarrow a^n|b^n$

③ $\begin{cases} d|a \\ d|a+b \end{cases} \Rightarrow d|b$

2) Division Euclidienne

Propriété :

Considérons a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$ ils existent un entiers relatif q et un entier naturel r tels que : $a = bq + r$ où $0 \leq r < |b|$

- L'entier a s'appelle : ***Le divisé***
- L'entier b s'appelle : ***Le diviseur***
- L'entier q s'appelle : ***Le quotient***
- L'entier r s'appelle : ***Le reste***

Exercice 1 :

Montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 3 ne peut pas être égale à 2.

Exercice 2 :

a) Montrer que tout nombre premier s'écrit de la forme $p = 6n + 1$ ou $p = 6n + 5$

b) L'inverse est-il vraie ?

3) Les nombres premiers

Définitions

- On dit que l'entier d est un diviseur **effectif** de l'entier relatif a si $d|a$ et $|d| \neq 1$ et $|d| \neq |a|$
- On dit qu'un entier relatif non nul p est **premier** s'il est différent de 1 et s'il n'admet pas de diviseurs effectifs.

Remarque :

- Un nombre premier p admet exactement deux diviseurs positifs 1 et $|p|$.

- Si p est un nombre premier positif alors p n'admet pas de diviseurs effectifs de même $-p$ n'admet pas de diviseurs effectif d'où : $-p$ est aussi premier ;
Pour l'étude des nombres premiers on se contente d'étudier les nombres premiers positifs.

Propriété :

Soit a un entier naturel non nul différent de 1 et non premier, **le plus petit diviseur de a diffèrent de 1 est un nombre premier**

Propriété :

Soit n un entier naturel non nul, diffèrent de 1 et non premier, il existe un nombre premier p qui divise l'entier n et qui vérifie $p^2 \leq n$.

Remarque :

Cette propriété nous permet de déterminer si un nombre est premier ou non.

Corolaire :

Si un entier n n'est divisible par aucun entier premier p et qui vérifie $p^2 \leq n$ alors n est premier.

Crible d'Eratosthène. Les nombres premiers inferieurs à 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Application : Montrer que le nombre 2003 est premier.

Théorème :

L'ensemble des nombres premiers est infini.

4) Plus grand diviseurs commun

Définition :

On dit que le nombre d est **le plus grand diviseur commun** de deux entiers relatifs a et b lorsque d divise a et d divise b et qu'il n'y a pas d'autre plus grands diviseurs de ces deux nombres. On note $d = PGDC(a, b) = a \wedge b$

Propriétés :

- $a \wedge a = |a|$
- $1 \wedge a = 1$
- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
- Si $b|a$ alors $a \wedge b = |b|$
- $\begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases} \Rightarrow d|(a \wedge b)$
- $a \wedge b = a \wedge (a - b)$

Exercice :

1- Montrer que tout diviseur commun de $a = 2n + 3$ et $b = 5n + 1$ est un diviseur de 13

2- Déterminer tous les diviseurs commun de a et b.

3- Déterminer les valeurs de n pour lesquels $a \wedge b = 13$.

Définition :

On dit que deux entier relatifs a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$.

5) L'algorithme d'Euclide.

Théorème :

Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul on a : $a = bq + r$ où $0 \leq r < b$ on a : $a \wedge b = b \wedge r$

L'algorithme d'Euclide.

Soient a et b deux entiers naturels ($b \neq 0$) on a :

$a = bq_1 + r_1$ si $r_1 \neq 0$ alors :

$b = r_1q_2 + r_2$ si $r_2 \neq 0$ alors :

$r_1 = r_2q_3 + r_3$ si $r_3 \neq 0$ alors :

....

$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$ si $r_n \neq 0$ alors :

$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}$ si $r_{n+1} = 0$ on arrête le processus.

Et d'après la propriété précédente : $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = \cdots = r_{n-1} \wedge r_n = r_n$ car : $r_n | r_{n-1}$

Propriété :

Soient a et b deux entier naturels non nuls.
Le plus grand diviseur commun de a et b est le dernier reste non nul dans les divisions euclidiennes successives.

Application :

1- Trouver le $PGDC(362154\,,82350)$.

2- Déterminer tous les diviseurs commun de 362154 et 82350.

Propriété :

Soient a et b deux entier relatifs non nuls et $\delta = a \wedge b$, on a les diviseurs communs de a et b sont les diviseurs de δ. On peut dire que : $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b = \mathcal{D}_{a \wedge b}$

6) Le plus petit multiple commun.

Définition :

On dit que le nombre entier naturel m est **le plus petit multiple commun** de deux entiers relatifs a et b lorsque m est un multiple de a et de b et qu'il n'y a pas d'autre plus petit multiple non nuls de ces deux nombres. On note : $m = PPCM(a, b) = a \vee b$

Propriétés :

- $a \vee a = |a|$
- $a \vee b = b \vee a$
- $a \vee 1 = |a|$
- Si $b|a$ alors $a \vee b = |a|$
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
- $a|(a \vee b)$; $b|(a \vee b)$ et $(a \vee b)|ab$

Propriété :

Considérons a et b deux entiers relatifs.
Si $a \vee b = m$ et M un multiple commun de a et b alors $m|M$.

7) la congruence modulo n.

Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs ; et n **un entier naturel non nul.** on dit que : $\boldsymbol{a}$ **est congrue à** $\boldsymbol{b}$ **modulo** $\boldsymbol{n}$ si $n|(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$. On écrit : $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} \quad [\boldsymbol{n}]$

Propriété :

Si $a \equiv b \quad [n]$ alors a et b ont le même reste de la division euclidienne sur n

Propriété fondamentale :

- $(\forall a \in \mathbb{Z})(a \equiv a \quad [n])$ on dit que la relation de congruence est **réflexive.**
- $(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2)(\, a \equiv b \quad [n] \Leftrightarrow b \equiv a \quad [n]\,)$, on dit que la relation de congruence est **symétrique.**
- $(\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3)\left(\begin{matrix} a \equiv b \quad [n] \\ b \equiv c \quad [n] \end{matrix} \Rightarrow a \equiv c \quad [n]\right)$, on dit que la relation de congruence est **transitive.**

Définition :

Puisque la relation est de congruence est réflexive, symétrique et transitive on dit que la relation de congruence est une **relation d'équivalence**

Propriété et définition :

Soit n un entier naturel non nul. Si $a \equiv b \quad [n]$ et $c \equiv d \quad [n]$ alors ;

- $a + c \equiv b + d \quad [n]$; On dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition dans $\mathbb{Z}$
- $ac \equiv bd \quad [n]$; On dit que la relation de congruence est compatible avec la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Corolaire :

Si $a \equiv b \quad [n]$ alors pour tout k dans $\mathbb{N}$ on a : $a^k \equiv b^k \quad [n]$

Applications

❶ Déterminer le reste de la division euclidienne de 4587^{2018} par 9
❷ Déterminer le reste de la division euclidienne de 25614^{6512} par 13
❸ Montrer que pour tout n entier naturel : $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7
❹ Montrer que pour tout n entier naturel, $5n^3 + n$ est divisible par 6
❺ Montrer que si n n'est pas un multiple de 7, alors : $n^6 - 1$ est un multiple de 7
❻ Montrer que pour tout entier naturel, le nombre $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6

8) Les classes d'équivalences.

Définition :

Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste r de la division euclidienne par n s'appelle **la classe d'équivalence de r** et se note : $\bar{r}$ ou $\dot{r}$

$$\bar{r} = \{m \in \mathbb{Z} \,/\, m \equiv r \quad [n]\} = \{nk + r \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

Définition :

Soit n un entier naturel non nul. On définit dans $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ les deux lois :

- **L'addition :** On pose : $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$
- **La multiplication :** On pose : $\bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}$

Exemple :

Dans $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$: $\bar{3} \times \bar{4} = \bar{0}$ $\quad \bar{5} + \bar{4} = \bar{3}$

Exercice :

1- Dresser les tables des opérations de $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$

2- Résoudre dans $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$ les équations :

a) $\bar{2}x = \bar{1}$ b) $\bar{4}x + \bar{1} = x + \bar{3}$ c) $\bar{5}x^2 + \bar{3}x + \bar{1} = \bar{0}$

9) Décomposition d'un entier en facteurs des nombres premiers

Théorème :

- Chaque entier **naturel** m non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers comme suite : $m = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$
- Chaque entier **relatif** m non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers comme suite : $m = \varepsilon\, p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \varepsilon \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$ où $\varepsilon \in \{-1,1\}$

Propriété 1:

Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme : $a = \varepsilon\, p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$; un entier d non nul divise l'entier a si et seulement si d à une décomposition de la forme :
$d = \varepsilon'\, p_1^{\delta_1} \times p_2^{\delta_2} \times p_3^{\delta_3} \times \dots \times p_n^{\delta_n}$ où $(\forall i \in [\![1, n]\!])(0 \le \delta_i \le \alpha_i)$

Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme : $a = \varepsilon\, p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$ et
$d = \varepsilon'\, p_1^{\delta_1} \times p_2^{\delta_2} \times p_3^{\delta_3} \times \dots \times p_n^{\delta_n}$ un diviseur de a le nombre des valeurs possibles de δ_i est $\alpha_i + 1$
On en déduit que :

Propriété 2:

Si $a = \varepsilon\, p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$ est un entier, le nombre des diviseurs de a est :
$2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$

Application :

1- Décomposer le nombre 2975 en facteurs des nombres premiers

2- Déterminer le nombre des diviseurs de 2975.

3- Déterminer tous les diviseurs positifs de 2975.

Propriété 3 :

Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme : $a = \varepsilon\, p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots . \times p_n^{\alpha_n}$; un entier m est un multiple de a si et seulement si $m = \varepsilon'\, p_1^{\mu_1} \times p_2^{\mu_2} \times p_3^{\mu_3} \times \dots . \times p_n^{\mu_n}$ où $(\forall i \in [\![1,n]\!])(\alpha_i \leq \mu_i)$

9.1 Le P.G.C.D de deux nombres.

Soient $a = \varepsilon \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$ et $b = \varepsilon' \prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers ; si $d = \varepsilon'' \prod_{k=1}^{n} p_k^{\delta_k}$ est un diviseur commun de a et b alors :

$$(\forall k \in [\![1,n]\!])\begin{cases} 0 \leq \delta_k \leq \alpha_k \\ 0 \leq \delta_k \leq \beta_k \end{cases}$$

On en déduit que le $P.G.D.C\ (a,b)$ est l'entier $\delta = \prod_{k=1}^{n} p_k^{\delta_k}$ où $(\forall k \in [\![1,n]\!])(\delta_k = \inf(\alpha_k, \beta_k))$

Propriété :

Si $a = \varepsilon \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$ et $b = \varepsilon' \prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers alors $a \wedge b = \prod_{k=1}^{n} p_k^{\inf(\alpha_k,\beta_k)}$

Exercice :

1- Décomposer les nombres 362154 et 82350 en produit des facteurs premiers

2- Déterminer le P.G.C.D de 362154 et 82350

3- Déterminer tous les diviseurs communs de 362154 et 82350

9.2 Le P.P.C.M de deux nombres.

Soient $a = \varepsilon \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$ et $b = \varepsilon' \prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers ; si $m = \varepsilon'' \prod_{k=1}^{n} p_k^{\mu_k}$ est un multiple commun de a et b alors :

$$(\forall k \in [\![1,n]\!])\begin{cases} \alpha_k \leq \mu_k \\ \beta \leq \mu_k \end{cases}$$

On en déduit que le $P.P.C.M\ (a,b)$ est l'entier $\mu = \prod_{k=1}^{n} p_k^{\mu_k}$ où $(\forall k \in [\![1,n]\!])(\mu_k = \sup(\alpha_k, \beta_k))$

Propriété :

Si $a = \varepsilon \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$ et $b = \varepsilon' \prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers alors $a \vee b = \prod_{k=1}^{n} p_k^{\sup(\alpha_k,\beta_k)}$

Propriété :

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, on a les assertions suivantes :

- $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$
- $ca \vee cb = c(a \vee b)$
- $ca \wedge cb = c(a \wedge b)$

Exercice :

Si $d|a$ et $d|b$ alors : $d|(a \wedge b)$.

II) THEOREMES PRINCIPAUX.

1) Théorème de Bézout :

Théorème 1 :

Soient a et b et des entiers relatifs non nuls :

$$a \wedge b = d \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2 \ ; \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$$

Preuve :

$(\Rightarrow)$ On suppose que $a \wedge b = d$

On a $d|a$ et $d|b$ donc $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $a = \alpha d$ et $b = \beta d$ donc :

$$\begin{aligned} d &= \alpha d \wedge \beta d \\ &= |d|(\alpha \wedge \beta) \text{ et puisque } d \in \mathbb{N}^* \text{ alors } \alpha \wedge \beta = 1 \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ On suppose que $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2$; $\begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$ On a :

$a \wedge b = \alpha d \wedge \beta d = |d|(\alpha \wedge \beta) = d$ car $(|d| = d$ et $\alpha \wedge \beta = 1)$

Théorème 2 :

Soient a et b et des entiers relatifs non nuls : $a \wedge b = d \Rightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \,; d = au + bv$

Preuve :

1- Si $a|b$ alors $a \wedge b = |b|$

- si $b > 0$ alors $b = 0a + 1b$
- si $b < 0$ alors $b = 0a + (-1)b$

2- Si $b|a$ (même raisonnement)

3- On suppose que $b \nmid a$ tel que $0 < b < a$

d'après l'algorithme d'Euclide on a

$a = bq_0 + r_0$ si $r_0 \neq 0$ alors :
$b = r_0q_1 + r_1$ si $r_1 \neq 0$ alors :
$r_0 = r_1q_2 + r_2$ si $r_2 \neq 0$ alors :
…….
$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$ si $r_n \neq 0$ alors :
$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}$ si $r_{n+1} = 0$ on arrête le processus .

Et d'après la propriété précédente : $a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = \cdots = r_{n-1} \wedge r_n = r_n$ car : $r_n | r_{n-1}$
et $0 < r_n < r_{n-1} < \cdots < r_1 < r_0 < b$

On obtient :

$r_0 = a - bq_0 = u_0a + v_0b$ où $u_0 = 1$ et $v_0 = -q$
$r_1 = b - r_0q_1 = b - (a - bq_0)q_1 = -aq_1 + b(1 + q_0q_1) = u_1a + v_1b$ où $u_1 = -q_1$ et $v_1 = (1 + q_0q_1)$

On répète le processus et à chaque fois on montre que : $r_k = au_k + bu_k$ cette opération est valable pour tous les reste r_k en particulier pour le dernier reste r_n qui est $a \wedge b$ donc : $\exists (u_n, v_n) \in \mathbb{Z}^2 \,; a \wedge b = au_n + bv_n$.

Remarque

- Dans l'écriture $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \,; a \wedge b = au + bv$ le couple (u, v) n'est pas unique.
  $12 \wedge 9 = 3$ on a $3 = 1 \times 12 + (-1) \times 9$ et $3 = (-2) \times 12 + 3 \times 9$
- La réciproque du théorème n'est pas vraie :
  $2 \times 12 + (-2) \times 9 = 6$ mais $12 \wedge 9 = 3 \neq 6$

Théorème (Théorème de Bézout)

Soient a et b et des entiers relatifs non nuls : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \,; 1 = au + bv$

($\Rightarrow$) C'est le théorème précèdent.
($\Leftarrow$) On suppose que $1 = au + bv$

Soit $d = a \wedge b$ on aura : $\begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases}$ donc $\begin{cases} d|ua \\ d|vb \end{cases}$ par suite $d|ua + vb = 1$ donc $d = 1$ $(d \in \mathbb{N}^*)$

et donc $a \wedge b = 1$

Exemples :

- $(5n + 3) \wedge (2n + 1) = 1$ car : $2 \times (5n + 3) + (-5) \times (2n + 1) = 1$
- $(n + 2) \wedge (n^2 + 2n - 1) = 1$ car $n \times (n + 2) + (-1) \times (n^2 + 2n - 1) = 1$

Application :

❶L'utilisation de l'algorithme d'Euclide pour déterminer les coefficients de *Bezout*

Montrons que : $360 \wedge 84 = 12$ et déterminons u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $360u + 84v = 12$

on a : $360 = 2^3.3^2.5$ et $84 = 2^2.3.7$ donc $360 \wedge 84 = 2^2.3 = 12$

D'autre part :

$360 = 84 \times 4 + \boxed{24} \longrightarrow 24 = \boxed{a - (b \times 4)}$

$84 = 24 \times 3 + \boxed{12} \longrightarrow b - \left(\overbrace{a - (b \times 4)}^{24}\right) \times 3 = 12$

$$24 = 12 \times 2 + 0$$

Donc : $-3a + 13b = 12$

❷ Considérons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $17x + 36y = 1$ et détérminons une solution particulière de (E).

On a $17 \wedge 36 = 1$ donc d'après le théorème de $Bézout$; il existe u et v tels que : $17u + 36v = 1$ donc (E) admet une solution.

On pose $a = 36$ et $b = 17$ on obtient :

$$a = 2b + 2$$
$$b = 8 \times 2 + 1$$

Donc : $2 = a - 2b$ et $b = 8 \times (a - 2b) + 1$

D'où : $-8a + 17b = 1$ donc le couple $(-8,17)$ est une solution de l'équation (E).

2) Application du théorème de Bézout :

Théorème de Gauss

Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls : $\begin{cases} c|ab \\ c \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow c|a$

Preuve :

On a : $c \wedge a = 1$ d'après le théorème de Bézout : $(\exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vc = 1)$ d'où $bau + bvc = b$

Et puis que $c|ab$ alors $ab = kc$ (où $k \in \mathbb{Z}$) donc $kcu + bvc = b$ d'où $c(ku + bv) = b$ et $ku + bv \in \mathbb{Z}$ donc $c|b$.

Remarque :

La condition $c \wedge b = 1$dans le théorème de Gauss est indispensable ; $6|4 \times 3$ mais $6 \nmid 3$ et $6 \nmid 4$

Théorème

Soients a, b et c des entiers relatifs non nuls : $\begin{cases} a|c \text{ et } b|c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab|c$

Preuve :

On a : $a|c$ et $b|c$ donc ils existent k et h tels que : $c = ka = hb$ et puisque $a \wedge b = 1$ alors :

$(\exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vb = 1)$

Donc : (on multipliant par c) $c = cau + cvb$

$$= hbau + kavb$$
$$= ab(hu + kv) \text{ et par suite } ab|c$$

Remarque :

La condition $c \wedge b = 1$dans le théorème précèdent est indispensable ; $6|12$ et $3|12$ mais $6 \times 3 = 18 \nmid 12$.

Propriétés :

Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls :

❶ $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge bc = 1$ ❷ $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1$ ❸ $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^n \wedge b^m = 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Preuve :

❶

$(\Rightarrow)$ On suppose que $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} (\exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vb = 1) \\ (\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2)(a\alpha + \beta c = 1) \end{cases}$

Par le produit on obtient : $(au + vb)(a\alpha + \beta c) = 1$; d'où après développement on obtient :

$a^2u\alpha + au\beta c + vba\alpha + vb\beta c = 1$ et donc $(au\alpha + u\beta c + vb\alpha)a + (v\beta)bc = 1$ donc et d'après Bézout $a \wedge bc = 1$

$(\Leftarrow)$ On suppose que $a \wedge bc = 1$ donc $(\exists(u,v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vbc = 1)$

D'où $au + (vb)c = 1$ donc $a \wedge c = 1$ et $au + (vc)b = 1$ donc $a \wedge b = 1$

❷

($\Rightarrow$) On suppose que $a \wedge b = 1$ et on montre par récurrence que : $a \wedge b^n = 1$

- Pour $n = 1$ la propriété est vraie.
- On suppose que la propriété est vraie pour n
- On montre qu'elle est vraie pour $n + 1$

  On a : $\begin{cases} a \wedge b^n = 1 \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$ donc et d'après ❶ on a : $a \wedge bb^n = 1$ d'où $a \wedge b^{n+1} = 1$

  Donc si $a \wedge b = 1$ alors $a \wedge b^n = 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

($\Leftarrow$)

On suppose que $a \wedge b^n = 1$ donc et d'près le théorème de Bézout $(\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vb^n = 1)$

Donc : $au + (vb^{n-1})b = 1$ donc $(\exists(u', v') \in \mathbb{Z}^2)(au' + v'b = 1)$ et par suite $a \wedge b = 1$

❸ Est un résultat immédiat de ❷.

3) L'équation $ax + by = c$

Théorème : (fondamental)

L'équation (E) : $ax + by = c$ admet une solution si et seulement si $(a \wedge b)|c$

Preuve :

- On suppose que $d = (a \wedge b)|c$ alors : $(\exists k \in \mathbb{Z})(c = kd)$ et on a : $(\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vb = d)$

  $kd = k(a \wedge b) = (ku)a + (kv)b$

  C'est-à-dire : $c = (ku)a + (kv)b$ donc l'équation (E) admet (x_0, y_0) comme solution où $\begin{cases} x_0 = ku \\ y_0 = kv \end{cases}$
- In versement : On suppose que : $ax + by = c$ admet une solution (x_0, y_0), donc :

  $ax_0 + by_0 = c$ puisque : $\begin{cases} (a \wedge b)|a \\ (a \wedge b)|b \end{cases}$ alors $\begin{cases} (a \wedge b)|x_0a \\ (a \wedge b)|y_0b \end{cases}$ donc $(a \wedge b)|(ax_0 + by_0) = c$ donc : $(a \wedge b)|c$.

Théorème :

Si le couple (x_0, y_0) est une solution de l'équation (E) : $ax + by = c$ alors, l'ensemble des solutions de (E) est : $S = \left\{\left(x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}, y_0 - \frac{ka}{a \wedge b}\right) / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Démonstration :

On pose : $A = \left\{\left(x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}, y_0 - \frac{ka}{a \wedge b}\right) / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ et on montre que $\begin{cases} A \subset S \\ S \subset A \end{cases}$

- Montrons que $A \subset S$: il suffit de montrer que le couple $\left(x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}, y_0 - \frac{ka}{a \wedge b}\right)$ est solution de l'équation (E) :

  On a : $a\left(x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}\right) + b\left(y_0 - \frac{ka}{a \wedge b}\right) = ax_0 + \frac{ak\cancel{b}}{a \wedge b} + by_0 - \frac{bk\cancel{a}}{a \wedge b}$

  $= ax_0 + by_0 = c$

  Donc le couple $\left(x_0 + \frac{kb}{a \wedge b}, y_0 - \frac{ka}{a \wedge b}\right)$ (pour $k \in \mathbb{Z}$) est solution : d'où : $A \subset S$.
- Inversement : On suppose que le couple $(x, y) \in S$

  Donc (x, y) es solution de l'équation (E) d'où $ax + by = c$; or : (x_0, y_0) est une solution de l'équation (E) , donc : $ax_0 + by_0 = c$ donc (différence membre à membre) $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$

  Soit $d = a \wedge b$ on a : $(\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2) \begin{cases} a = \alpha d \quad \text{et } b = \beta d \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$

  Donc :

  $$\begin{aligned}(x, y) \in S &\Leftrightarrow a(x - x_0) = -b(y - y_0) \\ &\Leftrightarrow \alpha d(x - x_0) = -\beta d(y - y_0) \\ &\Leftrightarrow \alpha(x - x_0) = -\beta(y - y_0) \ (*) \qquad (d \neq 0)\end{aligned}$$

  On conclut que : $\beta |\ \alpha(x - x_0)$ et puisque : $\alpha \wedge \beta = 1$ alors (d'après T. Gauss) $\beta|(x - x_0)$

  Donc $(\exists k \in \mathbb{Z})((x - x_0) = k\beta)$ et par suite : (*) $\alpha k\beta = -\beta(y - y_0)$ d'où : $y - y_0 = -k\alpha$

  Par suite : $(x, y) \in S \Leftrightarrow \begin{cases} (y - y_0) = -k\alpha \\ (x - x_0) = k\beta \end{cases}$ où $k \in \mathbb{Z}$ en remplaçant $\begin{cases} \alpha \ \text{ par } \frac{a}{d} \\ \beta \ \text{ par } \frac{b}{d} \end{cases}$ on obtient :

$(x,y) \in S \Leftrightarrow x = x_0 + \frac{kb}{d}$ $et\ y = y_0 - \frac{ka}{d}$ C.Q.F.D.

Exemple :

Considérons l'équation (E): $756x - 245y = 14$

1- Montrer l'équation (E) admet une solution.

2- Déterminer une solution particulière de (E)

3- Résoudre l'équation (E)

Solution :

$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$ et $245 = 5 \times 7^2$

1- On a : $756 \wedge 245 = 7$ et $7|14$ donc l'équation (E) admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

2- En utilisant l'algorithme d'Euclide on obtient $a = 756$ et $b = 245$

$a = 3 \times b + 21$

$b = 11 \times 21 + 14$

$21 = 14 + 7$

On a donc :

$21 = a - 3b$

$b = 11 \times (a - 3b) + 14 \Leftrightarrow 14 = 34b - 11a$

$7 = (a - 3b) - (34b - 11a) \Leftrightarrow 7 = 12a - 37b$

Finalement :

$14 = 24a - 74b$ et donc le couple $(24,74)$ est une solution particulière de (E) d'où

$S = \left\{\left(24 - \frac{k\times 245}{7}, 74 - \frac{k\times 756}{7}\right) /\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \{(24 - 35k, 74 - 108k) /\ k \in \mathbb{Z}\} = \{(24 + 35k, 74 + 108k) /\ k \in \mathbb{Z}\}$

4) La congruence modulo n ,complément.

Théorème :

Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. et $n \in \mathbb{N}^*$ et $d = n \wedge c$ on a : $ac \equiv bc\ [n] \Leftrightarrow a \equiv b \left[\frac{n}{d}\right]$

Preuve :

$(\Rightarrow)$

On suppose : $ac \equiv bc\ [n]$, donc $n|(ac - bc) = c(a - b)$ donc $\frac{n}{d} | \frac{c}{d}(a - b)$ et comme $\frac{n}{d} \wedge \frac{c}{d} = 1$

Alors :(D'après théorème de Gauss)

$\frac{n}{d} | (a - b)$ donc : $a \equiv b \left[\frac{n}{d}\right]$

$(\Leftarrow)$

On suppose que : $a \equiv b \left[\frac{n}{d}\right]$ donc $a = b + k\frac{n}{d}$ $(k \in \mathbb{Z})$ donc $da = db + kn$ $(d = n \wedge c \Rightarrow c = \alpha d\ )$

Donc : $\alpha da = \alpha db + \alpha kn$ d'où $ca = cb + hn$ donc $ac \equiv bc\ [n]$.

Propriété :

❶ $\begin{cases} ac \equiv bc\ [n] \\ c \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow a \equiv b\ [n]$ ❷ $\begin{cases} a \equiv b\ [n] \\ m|n \end{cases} \Rightarrow a \equiv b\ [m]$ ❸ $\begin{cases} ac \equiv bc\ [p] \\ p \text{ premier et } p \nmid c \end{cases} \Rightarrow a \equiv b\ [m]$

Preuve :

Ce sont des résultats immédiats du théorème précédent.

5) Le P.G.D.C et le P.P.M.C de plusieurs nombres.

Définition :

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers relatifs non nuls, le plus grand entier naturel d qui divise en même temps tous les nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ s'appelle le plus grand diviseur commun des nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ et se note : $d = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$

Théorème :

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers relatifs non nuls ; on a :

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-2}) \wedge (a_{n-1} \wedge a_n)$$

Exemple :

$$756 \wedge 350 \wedge 616 = 756 \wedge (350 \wedge 616) = 756 \wedge 14 = 14$$

Théorème $(Généralisation\ de\ Bézout)$

Si $d = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge\ a_n$ alors $\exists(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que : $d = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$

Preuve : par récurrence

Définition :

On dit que les entiers relatifs non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont premiers entre eux si $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge\ a_n = 1$

Remarque :

Les entiers relatifs non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont premiers entre eux ne veut pas dire que les entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont premiers entre eux deux à deux.

Exemple :

3, 5 et 6 sont premiers entre eux.

Théorème $(Généralisation\ de\ Bézout)$

Si $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge\ a_n = 1$ si et seulement si $\exists(u_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que : $1 = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i$

Définition :

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers relatifs non nuls, le plus petit entier naturel m qui est multiple en même temps tous les nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ s'appelle le plus grand diviseur commun des nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ et se note : $d = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee\ a_n$

6) Propriétés des nombres premiers.

Théorème :

① Si p et q sont des nombres premiers positifs alors ils sont premier entre eux.
② Si p est premier alors il est premier avec tout nombre entier non nul a tel que $p \nmid a$

Preuve : En exercice.

Remarque :

La réciproque de ① n'est pas vrais ; 14 et 9 sont premiers entre eux mais aucun d'eux n'est premiers.

Propriétés :

❶ $\begin{cases} p \text{ premier} \\ p|ab \\ p \nmid a \end{cases} \Rightarrow p|b$ ❷ $\begin{cases} p \text{ premier} \\ p|ab \end{cases} \Rightarrow p|a \text{ ou } p|b$ ❸ $\begin{cases} p \text{ premier} \\ p|a_1 a_2 \dots a_n \end{cases} \Rightarrow \exists i \in \{1,2,..,n\}\ p|a_i$

❹ $\begin{cases} \forall i \in \{1,2,\dots,n\}; p_i \text{ premier} \\ p \text{ premier} \\ p|p_1 p_2 \dots p_n \end{cases} \Rightarrow \exists i \in \{1,2,..,n\}\ p = p_i$

Preuve : Résultat du théorème de Gauss.

7) Le petit théorème de Fermat.

Théorème :

Si p est un nombre premier et a un entier relatif non nul et pas divisible par p alors :$a^{p-1} - 1$ est divisible par p c'est-à-dire $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$ ou encore : $a^p \equiv a\ [p]$

Preuve :

Soient p un nombre premier et k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq p-1$

On a p premier et $p > k$ donc $p \nmid k$ et par suite $p \wedge k = 1$ d'autre part :

$$kC_p^k = k\frac{p!}{k!\,(p-k)!} = \frac{p \times (p-1)!}{(k-1)!\,(p-k)!} = pC_{p-1}^{k-1}$$

Donc $p|kC_p^k$ et comme $p \wedge k = 1$ alors d'après T. Gauss $p|C_p^k$

Montrons que $p|(a+1)^p - a^p - 1$

On a d'près la formule de binôme On a : $(a+1)^p = a^p + C_p^1 a^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \cdots + C_p^{p-1} a + 1$

Donc $(a+1)^p - a^p - 1 = C_p^1 a^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \cdots + C_p^{p-1} a$

Et comme $p|C_p^k$ pour $1 \leq k \leq p-1$ alors $p|(a+1)^p - a^p - 1$

On a donc : $(a+1)^p - 1 \equiv a^p \ [p]$.

Montrons par récurrence sur a (On prend pour le moment $a \in \mathbb{N}$) que $a^p \equiv a \ [p]$

- Pour $a = 0$ la propriété est vraie car $0^p = 0 \equiv 0 \ [p]$
- On suppose que la propriété est vraie pour a c'est-à-dire $a^p \equiv a \ [p]$
- Montrons que le propriété est vraie pour $(a+1)$ c'est-à-dire $(a+1)^p \equiv a+1 \ [p]$
  On a : d'après les questions précédente $(a+1)^p \equiv a^p + 1 \ [p]$.
  Or d'après H.R $a^p \equiv a \ [p]$ donc : $(a+1)^p \equiv a+1 \ [p]$.
  Donc $(\forall a \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{P})(a^p \equiv a\,[p])$

Si $a < 0$ alors $-a > 0$

- Si $p = 2$ on aura $a^2 = (-a)^2 \equiv (-a)\,[2]$ et $-a \equiv a \ [2]$ car $(2|\big(a - (-a)\big) = 2a)$
- si $p \geq 3$ alors p est impaire et $(-a)^p = -a^p$ et $(-a)^p \equiv (-a)\,[p]$ on en déduit que $-a^p \equiv -a\,[p]$ et finalement $a^p \equiv a\,[p]$

D'où le théorème.

Exemple :

Montrons que : $(\forall n \geq 2)\ n^5 \equiv n \ [30]$

On a : d'après le petit théorème de Fermat : $n^5 \equiv n \ [5]$

Donc $5|n^5 - n$

D'autre part : $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2-1)(n^2+1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

Donc $2|n(n-1)$ et $3|(n-1)n(n+1)$ et puisque 2 et 3 sont premiers alors $6 = (2 \times 3)|n^5 - n$

Finalement :

$$\begin{cases} 6|n^5 - n \ \text{ et } \ 5|n^5 - n \\ \qquad 6 \wedge 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \ (30|n^5 - n)$$

Exercices

❶ Soient p et q deux nombres premiers distincts ; montrer que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1\,[pq]$

❷ Considérons dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E): $x^4 + 781 = 3y^4$ et soit S son ensemble de solution :

1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{Z})(x^4 \equiv 1 \ [5] \ \text{ ou } \ x^4 \equiv 0 \ [5])$

2- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{Z})(x^4 + 781 \equiv 2 \ [5] \ \text{ ou } \ x^4 + 781 \equiv 1 \ [5])$

3- Déterminer l'ensemble S.

Remarque :

La réciproque du théorème de Fermat n'est pas vraie : $7^{25} \equiv 1\,[24]$ mais 25 n'est pas premier.

III) SYSTEMES DE NUMERATION

1) Théorème et définition

Théorème :

> Soit b un entier naturel tel que : $b > 1$
> Chaque entier naturel non nul n s'écrit d'une façon unique de la forme :
> $$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_1 b + a_0$$
> Où : les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des entiers naturel $0 \leq a_i \leq b - 1$ et $a_m \neq 0$

Preuve :

En utilisant la division Euclidienne de n sur b on obtient : $n = q_1 b + a_0$ où $0 \leq a_0 < b$

- Si $q_1 \leq b - 1$ on s'arrête et $a_1 = q_1$
- si $q_1 \geq b$, On effectue une autre division Euclidienne de q_1 sur b on obtient : $q_1 = q_2 b + a_1$ et par suite $n = (q_2 b + a_1)b + a_0 = q_2 b^2 + a_1 b + a_0$.
  - Si $q_2 \leq b - 1$ on s'arrête et $a_2 = q_2$
  - Si non on continue le processus

Notation :

Si $n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_1 b + a_0$ on écrit : $n = \overline{a_m a_{m-1} \ldots . a\, a_0}_{(b)}$ cette écriture s'appelle l'écriture de l'entier n dans la base b

Exemple :

Le nombre $n = 2987$ s'écrit $n = \overline{2987}_{(10)}$ car $n = 2 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 7$

Essayons d'écrire n dans la base 6 :

On a :

$2987 = 6 \times 497 + 5$

$497 = 6 \times 82 + 5$

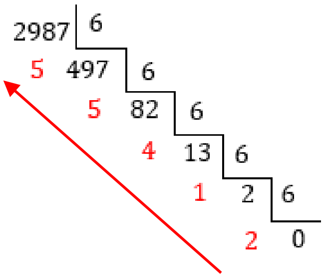
$82 = 6 \times 13 + 4$

$13 = 6 \times 2 + 1$

$2 = 6 \times 0 + 2$

Donc $2987 = 2 \times 6^4 + 1 \times 6^3 + 4 \times 6^2 + 5 \times 6 + 5 = \overline{21455}_{(6)}$

Cette succession de divisions Euclidiennes se représente comme ci-contre :



2) Les opérations dans une base de numération

2.1 La somme :

On peut effectuer la somme dans une base donnée b par deux façons différentes :

- *La décomposition :*

$$\begin{aligned} \overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} &= (2 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 3 \times 7 + 4\,) + (6 \times 7^2 + 3 \times 7 + 1\,) \\ &= 2 \times 7^3 + (5+6) \times 7^2 + (3+3) \times 7 + (4+1) \\ &= 3 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 6 \times 7 + 5 \\ &= \overline{3465}_{(7)} \end{aligned}$$

$5 + 6 = 7 + 4$

- *Calcul direct avec le retenu*

$$\begin{array}{r} 1 \\ \overline{2534}_{(7)} \\ + \quad \overline{631}_{(7)} \\ \hline = \overline{3465}_{(7)} \end{array}$$

2.2 Le produit :

Il est préférable d'effectuer le produit en utilisant **le calcul direct avec le retenu** car la décomposition risque d'être longue :

$$\begin{array}{rr} & {\scriptstyle 1\ 4} \\ & {\scriptstyle 2\ 5} \\ & \overline{327}_{(8)} \\ \times & \overline{56}_{(8)} \\ \hline & 2412 \\ + & 2063 \\ \hline = & \overline{23242}_{(8)} \end{array}$$

Pour vérifier :

$$\begin{aligned} \overline{327}_{(8)} \times \overline{56}_{(8)} &= (3\times 8^2 + 2\times 8 + 7)\times(5\times 8+6) \\ &= 9890 \\ &= \overline{23242}_{(8)} \end{aligned}$$

2.3 Opérations dans différentes bases :

Pour effectuer des opérations dans différentes base on développe les deux nombres dans la base 10 ; on effectue l'opération et on écrit le résultat dans la base demandée.

Exemple : effectuer dans la base 9

$$\begin{aligned} \overline{6432}_{(7)} \times \overline{54}_{(8)} &= (6\times 7^3 + 4\times 7^2 + 3\times 7 + 2)\times(5\times 8+4) \\ &= 100188 \\ &= 1\times 9^5 + 6\times 9^4 + 2\times 9^3 + 3\times 9^2 + 8\times 9 + 0 \\ &= \overline{162380}_{(9)} \end{aligned}$$

IV) CRITERES DE DIVISIBILITE DES NOMBRES 5,25,3,9,11 ET 4

Théorème :

Soit x un entier naturel non nul tel que : $x = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \cdots + a_1.10 + a_0$ où $0 \leq a_i \leq 9$; on a :

- $x \equiv 0\ [5] \Leftrightarrow\ a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$
- $x \equiv 0\ [25] \Leftrightarrow\ \overline{a_1a_0} \in \{0,25,50,75\}$
- $x \equiv 0\ [3] \Leftrightarrow\ \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0\ [3]$
- $x \equiv 0\ [9] \Leftrightarrow\ \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0\ [9]$
- $x \equiv 0\ [11] \Leftrightarrow\ \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \equiv 0\ [11]$
- $x \equiv 0\ [4] \Leftrightarrow\ \overline{a_1a_0} \equiv 0\ [4]$

Preuve en exercice :

V) L'ENSEMBLE $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ OU p EST UN NOMBRE PREMIER.

Théorème :

Pour tous entiers relatifs non nuls a et b ; $a \wedge n = 1 \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{Z})(am = 1\ [n])$

Preuve :

($\Rightarrow$) On suppose que : $a \wedge n = 1$, alors d'près T. Bézout $(\exists (m,u) \in \mathbb{Z}^2)(ma + un = 1)$

Donc : $(\exists (m,u) \in \mathbb{Z}^2)(un = 1 - ma)$ donc $n|ma - 1$ et finalement : $am = 1\ [n]$

($\Leftarrow$) On suppose que : $(\exists m \in \mathbb{Z})(am = 1\ [n])$ donc $n|(am-1)$ donc $(\exists k \in \mathbb{Z})(am - 1 = kn)$

donc : $am - kn = 1$ et d'après T. Bézout inverse $a \wedge n = 1$

Théorème :

Si p est un nombre premier positif alors tout élément $\bar{x} \neq \bar{0}$ admet un inverse dans $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} - \{\bar{0}\}$

Preuve :

Soit p un nombre premier positif ; on pose $E = \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} - \{\bar{0}\}$

$\dot{x} \in E \Leftrightarrow (\exists \alpha \in \{1,2, \dots, p-1\})(\ \bar{x} = \ \bar{\alpha})$

p étant, premier donc p ne divise aucun nombre de l'ensemble $\{1,2, \dots, p-1\}$ d'où $p \wedge \alpha = 1$

Et d'après la propriété précédente : $(\exists y \in \mathbb{Z}^*)(y\alpha \equiv 1[p])$

Donc : $\overline{\alpha y} = \bar{1}$

D'où : $\bar{\alpha}\ \bar{y} = \bar{1}$ et comme $\bar{x} = \bar{\alpha}$ donc $\bar{x}\ \bar{y} = \bar{1}$