Exercices de complexes type baccalauréat

Exercice 1

Soit a un nombre complexe différent de $-i$ et i

1) a) vérifier que $u = a + i$ est une solution de (E) : $z^2 - (1+a)(1+i)z + (1+a^2)i = 0$

b) déterminer l'autre solution v de l'équation (E)

2) on suppose que $|a| = 1$ a) montrer que $\frac{u}{v} \in \mathbb{R}$

b) vérifier que $u^2 = a\left[\left(a - \overline{a}\right) + 2i\right]$

c) déduire que $\arg(u) = \frac{1}{2}\arg(a) + \frac{\pi}{4}\ [\pi]$

3) montrer que $|u| + |v| \geq 2$

Exercice 2

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$.

on considère l'application r qui à tout point $M(z)$ fait associer le point $M_1(z_1)$

tel que $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ et l'application h qui associer $M(z)$ au point $M_2(z_2)$

tel que $z_2 = -2z + 3i$

1) déterminer la nature de r et h en déterminant leurs éléments caractéristiques

2) on considère les points $\Omega(i)$ et $A(a)$; a un nombre complexe différent de i .

On pose $D = F(C)$; $C = F(B)$; $B = F(A)$ avec $F = h \circ r$

a) Montrer que si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par F alors $z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z - i)$

b) vérifier que Ω est l'unique point vérifiant $F(\Omega) = \Omega$

3) a) déterminer en fonction de a les nombres d , c , b affixes des points D , C , B

b) montrer que les points D ; A ; Ω sont alignés

c) montrer que Ω est barycentre des points $(D,1)$, $(C,2)$, $(B,4)$

d) déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour que D appartient à l'axe des réels

Exercices de complexes type baccalauréat

Exercice 3

Soit a un complexe non nul ; $\bar{a}$ le conjugue de a

I) on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $iz^2+(a+\bar{a}-i)z-\bar{a}-ia\bar{a}=0$

1) a) vérifier que le discriminant de (E) s'écrit $\Delta=(a-\bar{a}-i)^2$

b) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) montrer que a est solution de (E) équivaut à $\mathrm{Re}(a)=\mathrm{Im}(a)$

II) le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

On suppose que $\mathrm{Re}(a)\neq\mathrm{Im}(a)$; on considère les points C ; B ; A d'affixes $1+ia$; $i\bar{a}$; a

1) On pose $Z=\dfrac{(1+ia)-a}{i\bar{a}-a}$

a) Vérifier que $\overline{Z}=\dfrac{(i-1)\bar{a}-i}{i\bar{a}-a}$

b) montrer que C ; B ; A sont alignés si et seulement si $\mathrm{Im}(a)=\dfrac{1}{2}$

2) on suppose que $\mathrm{Im}(a)\neq\dfrac{1}{2}$. soient R_1 la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On pose $B'=R_1(B)$ et $C'=R_2(C)$; E est le milieu du $[BC]$

a) Déterminer c' ; b' affixes des points C' ; B'

b) montrer que (AE) et $(B'C')$ sont perpendiculaire et que $B'C'=2AE$

Exercice 4

m un nombre complexe différent de 1.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(1-i)(m+1)z-i\left(m^2+1\right)=0$

I) a) vérifier que le discriminant de (E) s'écrit $\Delta=\left[(1+i)(m-1)\right]^2$

b) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

c) déterminer m sous forme algébrique pour que le produit des solutions soit égal à 1

Exercices de complexes type baccalauréat

2) on pose $z_1 = 1 - im$; $z_2 = m - i$ et on suppose que $m = e^{i\theta}$; $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Écrire z_2 , z_1 sous forme trigonométrique

$II)$ le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points M_2 , M_1 , M d'affixes $z_2 = m - i$, $z_1 = 1 - im$, m

1) déterminer l'ensemble des points M pour que M_2 , M_1 , M soient alignés

2) a) montrer que l'application qui associé $M(z)$ au point M' d'affixe $z' = 1 - iz$ est une rotation dont on déterminera l'affixe de son centre Ω est une mesure de son angle

b) montrer que : $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ est imaginaire s et seulement si $\text{Re}(m) + \text{Im}(m) = 1$

c) déduire l'ensemble des points M pour que M_2 , M_1 , M , Ω soient cocycliques

Exercice 5

Soit u un nombre complexe différent de $1 - i$

1) développer $(iu - 1 - i)^2$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(u + 1 - i)z + 2u^2 - 4i = 0$

2) le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

on considère les points $A((1+i)u - 2i)$; $B((1-i)u + 2)$; $U(u)$ et $\Omega(2 - 2i)$

a) déterminer l'affixe du point I milieu du $[AB]$ puis déterminer le vecteur de la translation t qui transforme le point I en U

b) soit R la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. montrer que $R(A) = B$

c) en déduire que (ΩI) et (AB) sont perpendiculaires

d) à partir du point U expliquer comment peut-on construire les poins B , A

3) on pose $u = a(1+i) - 2i$ avec $a \in \mathbb{R}$

a) déterminer l'affixes des vecteurs $\overrightarrow{AU}$, $\overrightarrow{AB}$ en fonction de a

b) en déduire que les points U , B , A sont alignés