

TD : CALCULS INTEGRALES

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_2^4 3x dx \quad 2) J = \int_0^1 (2x+3) dx$$

$$3) K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt \quad 4) L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta$$

Exercice2 : Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx \quad 2) I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx$$

$$3) I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \quad 4) I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt$$

$$5) I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} te^{-t^2} dt \quad 6) I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$7) I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx \quad 8) I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$$

$$9) I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \quad 10) I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} dx$$

$$11) I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx \quad 12) I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$$

$$13) I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx \quad 14) I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx$$

$$15) I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx \quad 16) I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx$$

$$17) I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx \quad 18) I_{18} = \int_0^1 (x-1) e^{(x-1)^2} dx$$

$$19) I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx \quad 20) I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx$$

$$21) I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx$$

Exercice3 : Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_0^3 |x-1| dx \quad 2) J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$$

Calculer $I+J$ et $I-J$ et en déduire I et J

Exercice5 : Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2 - 4x)^2} dx \quad 2) I = \int_0^{\ln 3} |2 - e^x| dx$$

$$3) I = \int_0^2 |x^2 - x - 2| dx$$

Exercice 6: Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 4} dx$$

Exercice7 : on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

$$1) \text{montrer que : } \cos^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ (linéarisation de $\cos^4 x$)

2) en déduire l'intégrale I

Exercice8 : d'application Soit $f : x \rightarrow e^{-x^2}$

Définie sur \mathbb{R} .

Pour tout réel $a \geq 1$, on s'intéresse à l'intégrale

$$F(a) = \int_1^a f(x) dx$$

1) Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$:

$$0 \leq f(x) \leq e^{-x}.$$

2) En déduire que pour tout réel $a \geq 1$:

$$0 \leq F(a) \leq e^{-1}.$$

Exercice9 : Montrer que : $\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \frac{1}{3}$

Exercice10 : soit la suite numérique (u_n) définie

$$\text{par : } u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que (u_n) est croissante

$$2) \text{Montrer que : } \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice11 :soit la suite numérique (u_n)

définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0;1] : \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$$

$$2) \text{ En déduire: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{e^n} \right)$$

Exercice12 :Calculer les intégrales suivantes :

$$1) A = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \quad 2) B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx$$

$$3) C = \int_0^1 2x\sqrt{x^2+1} dx$$

Exercice13 :Calculer l' intégrale suivante :

$$1) I = \int_0^{\pi} x \sin x dx \quad 2) J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx$$

$$3) K = \int_1^e \ln x dx$$

Exercice14 : En utilisant une intégration par partie calculer :

$$1) I = \int_0^1 x e^{2x} dx \quad 2) J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$3) K = \int_0^1 x \sqrt{e^x} dx \quad 4) L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$5) M = \int_1^e (x \ln x) dx \quad 6) N = \int_1^e \cos(\ln x) dx$$

Exercice15 : En utilisant une intégration par partie calculer : $J = \int_0^1 (x-1) e^{-x} dx$

$$K = \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) dx$$

$$M = \int_1^e x(1-\ln x) dx \quad N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$R = \int_1^e x \ln x dx \quad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$\text{Exercice16: On pose : } I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3} dx$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx$$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

$$\text{montrer que : } \frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

Exercice17 : En utilisant une intégration par changement de variable.

Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} \quad \text{on pose } x = \sqrt{t}$$

$$2) I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x} + e^{2x} + 3e^x}{1+e^{2x}} dx \quad \text{on pose } t = e^x$$

$$3) I_3 = \int_{e^{-2}}^e \frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}} dt \quad \text{on pose } x = \ln t$$

$$4) I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x) dx \quad \text{on pose } x = \frac{\pi}{4} - t$$

Exercice18 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et Soit f définit par : $f(x) = x^2$

1) tracer C_f la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 2$

Exercice19 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthogonale avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 3cm$

Soit f définit par : $f(x) = x^2 - 2x$

1) tracer C_f la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 3$

Exercice20 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et soit f définit par : $f(x) = 1 - e^x$

Calculer S la surface du domaine limité par : C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = \ln 2$ et $x = \ln 4$

Exercice21 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

Soit f et g deux fonctions tels que:

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x} \text{ et } g(x) = e^{-x}$$

calculer en cm^2 S la surface du domaine limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=\ln 2$

Exercice22 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$$\|\vec{i}\| = 0.5\text{cm} \text{ et Soit } f \text{ définit par : } f(x) = x^2 - 8x + 12$$

et (D) la tangente à la courbe (C_f) au point

$$A(3; f(3))$$

Calculer A la surface du domaine limité par :

(C_f) et les droites : (D) et $x=1$ et $x=e$

Exercice 23: $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé avec

$$\|\vec{i}\| = 1\text{cm} \text{ et Soit } f \text{ définit par : } f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$$

Calculer A la surface du domaine limité par :

C_f et les droites : $y = x - 1$ et $x = 1$ et $x = e$

Exercice24 : $(o; \vec{i}; \vec{j})$ repère orthonormé

Soit f et g deux fonctions tels que: $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ Calculer A la surface du domaine limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=1$

Exercice25 : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{xe^x + x + 1}{e^x + 1}$$

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier qu'elle est strictement croissante.

2) Déterminer la surface S_1 du domaine limité par l'axe (Ox) ; la courbe C_f et les droites: $x = 0$ et $x = 1$.

3) Déterminer la surface S_2 du domaine limité par la droite (Δ) $y = x$; la courbe C_f et les droites: $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice26 : $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par : $f(x) = \sqrt{x}$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$

Exercice27 : $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = \frac{2}{3}\text{cm}$

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)} \text{ et } (C) \text{ la courbe de } f$$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[0; 1]$

Exercice28: $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \sqrt{\ln x}$

et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1; e]$

Exercice29: $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x\sqrt{1 - \ln x} \text{ et } (C) \text{ la courbe de } f$$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1; e]$

Exercice30: En utilisant les sommes de Riemann

$$\text{calculer : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

Exercice31:

En utilisant les sommes de Riemann calculer :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$$

Exercices 32 :

1) Calculer les limites des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n\sqrt{4n^2 - k^2}} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2}$$

2) a) Calculer en utilisant une intégration par partie : $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$

b) En déduire la limite de la suite :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}}$$

(Introduire \ln dans l'expression de u_n)

Exercice33: Déterminer la fonction primitive de la fonction $\ln x$ qui s'annule en e .

Exercice34: étudier la dérivable de la fonction

F définit par : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} e^{-t^2} dt$ sur \mathbb{R}^{*+} et

calculer $F'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{*+}$

Exercice35: soit la fonction F définit par :

$$F(x) = \int_0^{x^2+2x} \sqrt{1+t} dt \quad \forall x \in [-1; +\infty[$$

1) Étudier la dérivable de la fonction F

et calculer $F'(x) \quad \forall x \in [-1; +\infty[$

2) calculer $F(x)$ sans intégrale

Exercice36: étudier les variations de la fonction

F définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} (t^2 - 4) dt$

Exercice37: soit h la fonction définie sur :

$$\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ par : } h(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0$$

et $h(0) = e^2$

1) Montrer que h est Continue sur $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ et en

déduire que :

$$H : x \rightarrow \int_0^x h(t) dt \text{ est dérivable sur } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$2) \text{calculer : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x h(t) dt$$

Exercice38: Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$

$$\text{par } (\forall t \in]0, +\infty[) (f(t) = e^{\frac{1}{\ln t}})$$

1) Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$.

2) Considérons la fonction définie sur $]1, +\infty[$

$$\text{par : } F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

a) Montrer que $(\forall x \in]1, +\infty[) (f(x+1) \leq F(x) \leq f(x))$

$$\text{b) En déduire } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

3) a) Montrer que $(\forall t \in]0, +\infty[) (e^t \geq t+1)$

b) En déduire que : $(\forall x > 1) : \ln$

$$F(x) - 1 \geq \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt$$

4) a) Montrer que : $(\forall t \in]0, +\infty[) (\ln t \leq t-1)$

$$\text{b) En déduire que } (\forall x > 1) (F(x) - 1 \geq \ln \left(\frac{x}{x-1} \right))$$

$$\text{c) En déduire } \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$$

5) Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x > 1$

6) Dresser le tableau de variation de la Fonction F

7) Construire la courbe CF .

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron
Dit un proverbe.*

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et

exercices

Que l'on devient un mathématicien

