Feuille d'exercices : corrigé

Exercice 1 (* à **)

- Pour I_1, intégration directe :$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{t^2}\ dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$
- Pour I_2, on reconnait la forme $\frac{u'}{u}$, avec $u(x) = \ln x$, donc $I_2 = \int_e^3 \frac{dx}{x \ln x} = [\ln(\ln x)]_e^3 = \ln(\ln 3)$
- Pour I_3, on reconnait exactement $u'e^u$, avec $u(x) = \sqrt{x}$, d'où
$I_3 = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\ dx = [e^{\sqrt{x}}]_1^2 = e^{\sqrt{2}} - e$
- Pour I_4, comme toujours avec les valeurs absolues, on découpe en utilisant la relation de Chasles :
$I_4 = \int_0^2 \left|x^2 - 3x + 2\right|\ dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\ dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = 1$
- Pour I_5, il suffit de développer pour faire apparaitre des puissances qu'on sait très bien intégrer :
$I_5 = \int_0^4 \sqrt{x}(x - 2\sqrt{x})\ dx = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} - 2x\ dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^2\right]_0^4 = \frac{2}{5}4^{\frac{5}{2}} - 16 = \frac{64}{5} - 16 = -\frac{16}{5}$
- Ici, on reconnait presque $u'e^u$, avec $u(z) = -z^5$:
$I_6 = \int_0^2 z^4 e^{-z^5}\ dz = -\frac{1}{5}\int_0^2 -5z^4 e^{-z^5}\ dz = -\frac{1}{5}[e^{-z^5}]_0^2 = -\frac{1}{5}(e^{-32} - e) = \frac{1}{5}\left(e - \frac{1}{e^{32}}\right)$
- Le plus simple dans le cas d'une fonction qui n'est pas continue, comme la partie entière, est de découper l'intervalle d'intégration en morceaux sur lesquels la fonction et continue (et même ici constante) :
$I_7 = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{2}} Ent(x)\ dx = \int_{-\frac{1}{3}}^0 -1\ dx + \int_0^1 0\ dx + \int_1^2 1\ dx + \int_2^{\frac{5}{2}} 2\ dx = -\frac{1}{3} + 0 + 1 + 1 = \frac{5}{3}$
- On a presque ici du $6u'u^5$ avec $u(s) = \ln s$, d'où le calcul suivant :
$I_8 = \int_1^e \frac{(lns)^5}{s}\ ds = \left[\frac{1}{6}(\ln s)^6\right]_1^e = \frac{1}{6}$
- Là, encore, quasiment une forme usuelle, en l'occurence $\frac{u'}{u}$ à un facteur 2 près :
$I_9 = \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 2}\ dt = \left[\frac{1}{2}\ln(e^{2t} + 2)\right]_0^{\frac{\ln 2}{2}} = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$
- Il faut faire un peu attention pour celle-ci, on est proche de la dérivée de $(x^3 + 1)^{\frac{5}{2}}$, mais il manque un facteur 3 dans la dérivée (puisqu'on a simplement x^2 au lieu de $3x^2$), **et** il manque aussi le facteur $\frac{5}{2}$ qui devrait apparaitre en dérivant la puissance, d'où finalement

$I_{10} = \int_0^2 x^2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\ dx = \frac{2}{15}[(x^3+1)^{\frac{5}{2}}]_0^2 = \frac{2}{15}(9^{\frac{5}{2}}-1) = \frac{2}{15}(3^5-1) = \frac{484}{15}$

- Là encore, il manque juste un petit facteur pour reconnaitre une forme usuelle (le ds au lieu du dv dans l'intégrale n'était pas un piège vicieux, mais simplement une faute de frappe) : $I_{11} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(\frac{-3}{v^2})}{v^3}\ ds = \left[\frac{1}{6}\exp\left(-\frac{3}{v^2}\right)\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}(e^{-1}-e^{-3}) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^3}\right)$
- Encore une forme usuelle, puisqu'on a presque la dérivée de $(q^2-2q)^{-3}$: il manque le facteur -3 de la dérivée de la puissance, et un facteur -2 pour que le numérateur soit exactement la dérivée de q^2-2q, d'où finalement $I_{12} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1-q}{(q^2-2q)^4}\ dq = \left[\frac{1}{6}(q^2-2q)^{-3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\left(\left(\frac{9}{4}-3\right)^{-3} - \left(\frac{1}{4}-1\right)^{-3}\right) = \frac{1}{6}\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} - \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}\right) = 0$
- Celle-là ressemble beaucoup à la numéro 3, à un petit signe et un facteur près : $I_{13} = \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}\ dz = [-2e^{-\sqrt{z}}]_1^4 = -2(e^{-2}-e^{-1}) = 2\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)$

Exercice 2 (**)

- On fait (ô surprise) une IPP en posant $\begin{cases} u(x) = x & v'(x) = e^{3x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$ pour obtenir $I_1 = \int_{-1}^1 xe^{3x}\ dx = \left[\frac{1}{3}xe^{3x}\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{3}e^{3x}\ dx = \frac{1}{3}(e^3+e^{-3}) - \left[\frac{1}{9}e^{3x}\right]_{-1}^1 = \frac{e^3}{3}+\frac{e^{-3}}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{e^{-3}}{9} = \frac{2}{9}e^3+\frac{4}{9}e^{-3}$
- Effectuons donc une IPP en posant $\begin{cases} u(s) = \ln s & v'(s) = \sqrt{s} \\ u'(s) = \frac{1}{s} & v(s) = \frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} \end{cases}$, on obtient $I_2 = \int_1^4 \sqrt{3s}\ln s\ ds = \sqrt{3}\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\ln s\right]_1^4 - \sqrt{3}\int_1^4 \frac{2}{3}\sqrt{s}\ ds = \frac{2}{3}\sqrt{3}\times 4^{\frac{3}{2}}\ln 4 - \sqrt{3}\left[\frac{4}{9}s^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{32\sqrt{3}}{3}\ln 2 - \frac{32}{9}\sqrt{3}+\frac{4}{9}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(32\ln 2-\frac{28}{3}\right)$ (on a utilisé $4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 8$)
- Commençons par poser $\begin{cases} u(z) = (\ln z)^3 & v'(t) = z^2 \\ u'(t) = 3\times\frac{1}{z}\times(\ln z)^2 & v(z) = \frac{z^3}{3} \end{cases}$ pour obtenir : $I_3 = \int_1^e z^2(\ln z)^3\ dz = \left[\frac{1}{3}z^3(\ln z)^3\right]_1^e - \int_1^e \frac{z^3}{3}\times\frac{3}{z}(\ln z)^2\ dz = \frac{e^3}{3} - \int_1^e z^2(\ln z)^2\ dz$
  Pour ce deuxième morceau, posons $\begin{cases} u(z) = (\ln z)^2 & v'(t) = z^2 \\ u'(t) = \frac{2}{z}\times\ln z & v(z) = \frac{z^3}{3} \end{cases}$:
  $\int_1^e z^2(\ln z)^2\ dz = \left[\frac{1}{3}z^3(\ln z)^2\right] - \int_1^e \frac{z^3}{3}\times\frac{2}{z}\ln z\ dz = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_1^e z^2\ln z\ dz$
  Les deux constantes sorties des deux premières IPP s'annulent, et il ne reste plus qu'à calculer une dernière intégrale en posant $\begin{cases} u(z) = \ln z & v'(t) = z^2 \\ u'(t) = \frac{1}{z} & v(z) = \frac{z^3}{3} \end{cases}$:
  $I_3 = \frac{2}{3}\int_1^e z^2\ln z\ dz = \frac{2}{3}\left[\frac{z^3}{3}\ln z\right]_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e \frac{z^2}{3}\ dz = \frac{2e^3}{9} - \frac{2}{9}\left[\frac{z^3}{3}\right]_1^e = \frac{2e^3}{9} - \frac{2e^3}{27} + \frac{2}{27} = \frac{4e^3+2}{27}$

- Allons-y pour une IPP en posant $\begin{cases} u(x) = \ln x & v'(x) = 2x^3 + 1 \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} & v(x) = \dfrac{x^4}{2} + x \end{cases}$
  $I_4 = \displaystyle\int_1^{e^2} (2x^3+1)\ln x \, dx = \left[\left(\frac{x^4}{2} + x\right)\ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{x^3}{2} + 1 \, dx = e^8 + 2e^2 - \left[\frac{x^4}{8} + x\right]_1^{e^2} = e^8 + 2e^2 - \frac{1}{8}e^8 - e^2 + \frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}e^8 + e^2 + \frac{9}{8}$
- Effectuons une IPP du dernier morceau en posant $\begin{cases} u(x) = x^2 & v'(x) = e^{2x} \\ u'(x) = 2x & v(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$:
  $I_5 = \displaystyle\int_0^1 (1+x+x^2)e^{2x} \, dx = \int_0^1 e^{2x} \, dx + \int_0^1 xe^{2x} \, dx + \int_0^1 x^2e^{2x} \, dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 xe^{2x} \, dx + \left[x^2\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\frac{e^{2x}}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} = e^2 - \frac{1}{2}$
- Ici, il faut faire apparaitre un produit par 1 pour effectuer l'IPP en posant donc
  $\begin{cases} u(t) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{t}\right) & v'(t) = 1 \\ u'(t) = \dfrac{-\frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t}} = -\dfrac{1}{t(t+1)} & v(t) = t \end{cases}$, ce qui donne :
  $I_6 = \displaystyle\int_1^2 \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \, dt = \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t+1} \, dt = 2\ln\frac{3}{2} - \ln 2 + [\ln(1+t)]_1^2 = 2\ln 3 - 3\ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = 3\ln 3 - 4\ln 2$
- On pose $\begin{cases} u(s) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{s}\right) & v'(t) = 1 + 2s \\ u'(s) = \dfrac{-\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{1}{s}} = -\dfrac{1}{s(s+1)} & v(s) = s + s^2 = s(s+1) \end{cases}$ pour obtenir :
  $I_7 = \displaystyle\int_1^2 (1+2s)\ln\left(1+\frac{1}{s}\right) \, ds = \left[s(s+1)\ln(1+\frac{1}{s})\right]_1^2 + \int_1^2 1 \, ds = 6\ln\frac{3}{2} - 2\ln 2 + 1 = 6\ln 3 - 8\ln 2 + 1$

Exercice 3 (**)

- Pour I_1, on pose $u = t+1$, donc $du = dt$, les bornes de l'intégrale deviennent 1 et 2 et le $t-2$ qui traine encore est égal à $u-3$:
  $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (t-2)(t+1)^5 \, dt = \int_1^2 (u-3)u^5 \, du = \left[\frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{2}\right]_1^2 = \frac{128}{7} - 32 - \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = -\frac{193}{14}$
- Pour I_2, on pose $u = t^3 + 8$, donc $du = 3t^2 \, dt$ (ce qui élimine au passage le problème du t^2 au numérateur), et les bornes deviennent 8 et 16 :
  $I_2 = \displaystyle\int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8} \, dt = \int_8^{16} \frac{1}{3u} \, du = \frac{1}{3}[\ln u]_8^{16} = \frac{1}{3}(\ln 16 - \ln 8) = \frac{\ln 2}{3}$
- Pour I_3, on pose $t = \dfrac{x}{x+1}$, donc $dt = \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, ce qui simplifie à merveille le quotient présent dans l'intégrale, puisque $\dfrac{1}{x(x+1)}dx = \dfrac{x+1}{x} \times \dfrac{1}{(x+1)^2}dx = \dfrac{dt}{t}$. Par ailleurs les bornes bornes deviennent $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$:
  $I_3 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)} \, dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t} \, dt = [\ln t]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{1}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{2}{3}$

- Pour I_4, on pose $u = s^3$, donc $du = 3s^2 ds$, le quotient dans l'intégrale pouvant s'écrire $\dfrac{s^2}{s^3(s^3+1)} = \dfrac{s^2}{u(u+1)}$. Les bornes deviennent 1 et 8, et on utilise pour terminer le calcul l'égalité $\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{u+1} = \dfrac{1}{u(u+1)}$:
$I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{ds}{s(s^3+1)} = \int_1^8 \frac{1}{3u(u+1)}\,du = \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\,du = \frac{1}{3}[\ln u - \ln(u+1)]_1^8 = \frac{1}{3}(\ln 8 - \ln 9 + \ln 2) = \frac{4\ln 2 - 2\ln 3}{3}$

- Pour I_5, on pose $u = \sqrt{t}$, donc $du = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$, et les bornes deviennent 1 et $\sqrt{2}$:
$I_5 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^{\sqrt{2}} 2\ln(u^2)\,du = \int_1^{\sqrt{2}} 4\ln u\,du = 4[u\ln u - u]_1^{\sqrt{2}} = 4(\sqrt{2}\ln\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2}\ln 2 + 4 - 4\sqrt{2}$

- Pour I_6, on pose $u = \ln t$, donc $du = \dfrac{dt}{t}$, et les bornes deviennent 0 et 1 :
$I_6 = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{t\sqrt{\ln t + 1}}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u+1}}\,du = [2\sqrt{u+1}]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$

Exercice 4 (* à **)

- Par intégration directe, $F_1(t) = t + 2e^{-t}$.
- Encore par intégration directe, $F_2(t) = \sqrt{1+t^2}$.
- On reconnait cette fois-ci un produit uu', qui a pour primitive $\dfrac{1}{2}u^2$, donc $F_3(t) = \dfrac{1}{2}(\ln t)^2$
- On a du $\dfrac{u'}{u}$ à un facteur près : $F_4(t) = \dfrac{1}{3}\ln(t^3+2)$
- Cette fois-ci, on difficilement échapper à une écriture sous forme d'intégrale, et à une double intégration par partie : commençons par intégrer par partie le premier morceau en posant $\begin{cases} u(x) = x^2 & v'(x) = e^{-t} \\ u'(x) = 2x & v(x) = -e^{-x} \end{cases}$, ce qui nous donne :
$F_5(t) = \displaystyle\int_0^t (x^2 - x + 1)e^{-x}\;dx = \int_0^t x^2e^{-x}dx - \int_0^t xe^{-x}dx + \int_0^t e^{-x}dx = [-x^2e^{-x}]_0^t + \int_0^t 2xe^{-x}dx - \int_0^t xe^{-x}dx + [-e^{-x}]_0^t = -t^2e^{-t} - e^{-t} + 1 + \int_0^t xe^{-x}dx$
Ne reste plus qu'à intégrer ce morceau par parties, en posant $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$, ce qui donne $\displaystyle\int_0^t xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^t - \int_0^t -e^{-x}dx = -te^{-t} + [-e^{-x}]_0^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1$, soit finalement $F_5(t) = -t^2e^{-t} - te^{-t} - 2e^{-t} + 2$.

- Il va falloir user (et presque abuser) de l'IPP, en posant pour commencer $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^3 & v'(x) = 1 \\ u'(x) = 3 \times \dfrac{1}{x} \times (\ln x)^2 & v(x) = x \end{cases}$ pour obtenir (on prend 1 comme borne inférieure de l'intégrale pour ne pas avoir de souci avec le ln) :
$F_5(t) = \displaystyle\int_1^t (\ln x)^3 dx = [x(\ln x)^3]_1^t - \int_1^t x \times \frac{3}{x}(\ln x)^2 dx = t(\ln t)^3 - 3\int_1^t (\ln x)^2 dx$
Cette deuxième intégrale se calcule essentiellement comme la précédente, en posant toujours $v(x) = 1$, ce qui donne :
$\displaystyle\int_1^t (\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2]_1^t - \int_1^t x \times \frac{2}{x}\ln x = t(\ln t)^2 - 2\int_1^t \ln t = t(\ln t)^2 - 2[x\ln x - x]_1^t = t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t - 2$; et finalement $F_6(t) = t(\ln t)^3 - 3t(\ln t)^2 + 6t\ln t - 6t + 6$.

- Posons donc $u = e^x$, d'où $du = e^x dx$, et on peut transformer l'intégrale ainsi : $F_7(t) = \int_0^t \frac{e^{2x}}{e^x+1}\, dx = \int_0^t \frac{e^x}{e^x+1} \times e^x dx \int_1^{e^t} \frac{u}{u+1}\, du = \int_1^{e^t} 1 - \frac{1}{u+1}\, du = [u - ln(u+1)]_1^{e^t} = e^t - \ln(e^t+1) - 1 + \ln 2$
- Posons $u = \ln x$, donc $du = \frac{1}{x}dx$, ce qui tombe bien puisqu'on peut mettre un $\frac{1}{t}$ en facteur dans l'intégrale, obtenant : $F_8(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x + x(\ln x)^2}\, dx = \int_0^{\ln t} \frac{u}{1+u^2}\, du = \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_0^{\ln t} = \frac{1}{2}\ln(1+(\ln t)^2)$

Exercice 5 (*)

1. Le plus simple est de partir du résultat et d'identifier. Comme on a $(x+3)(x-2) = x^2+x-6$, on peut écrire $a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3} = \frac{a(x^2+2x-x-6)+b(x+3)+c(x-2)}{x^2+x-6}$ $= \frac{ax^2+(a+b+c)x+(-6a+3b-2c)}{x^2+x-6}$
   Par identification, on a $a = 3$; $a+b+c = -4$ et $-6a+3b-2c = -25$. On en déduit que $b+c = -7$ et $3b-2c = -7$; en multipliant la première équation par 2 et en l'additionnant à la seconde, on a donc $5b = -21$, soit $b = -\frac{21}{5}$ puis $c = -7-b = -\frac{14}{5}$.
2. La deuxième expression permet d'obtenir une primitive (en faisant attention au fait que sur $]-3;2[$, $x+3>0$ et $x-2<0$) : $F(x) = 3x - \frac{21}{5}\ln(2-x) - \frac{14}{5}\ln(x+3)$. Si on veut obtenir la primitive de f s'annulant en 1, il suffit de retrancher une constante égale à la valeur de la primitive précédente en 1, c'est-à-dire $3 - \frac{14}{5}\ln 4$.

Exercice 6 (**)

1. On a $I_{n,0} = \int_0^1 x^n\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
2. On effectue une IPP en posant $\begin{cases} u(x) = (1-x)^{p+1} & v'(x) = x^n \\ u'(x) = -(p+1)(1-x)^p & v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$, et on obtient : $I_{n,p+1} = \int_0^1 x^n(1-x)^{p+1}\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(1-x)^{p+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}(p+1)(1-x)^p\, dx = \frac{p+1}{n+1}I_{n+1,p}$ (le crochet s'annulant en 0 et en 1).
3. En utilisant plusieurs fois de suite la relation précédente et le résultat de la première question, on obtient
   $I_{n,p} = \frac{p}{n+1}I_{n+1,p-1} = \frac{p(p-1)}{(n+1)(n+2)}I_{n+2,p-2} = \cdots = \frac{p(p-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}I_{n+p,0} = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}$

Exercice 7 (**)

1. La fonction intégrée étant positive sur $[0;1]$ (puisque $1-x$ y est positif), la suite (I_n) est positive. De plus, $\forall x \in [0;1]$, $(1-x)^n e^x \leqslant e$ (majoration brutale mais largement suffisante), donc $I_n \leqslant \int_0^1 \frac{e}{n!}\, dx = \frac{e}{n!}$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que (I_n) converge vers 0.

2. Pour obtenir exactement l'égalité voulue, il faut effectuer une IPP en dérivant l'exponentielle et en primitivant la puissance, donc en posant $\left\{\begin{array}{ll} u(x)=e^x & v'(x)=(1-x)^n \\ u'(x)=e^x & u(x)=-\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \end{array}\right.$, d'où : $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x\,dx=\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\right]_0^1+\int_0^1\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)\times n!}e^x\,dx=\frac{1}{(n+1)!}+I_{n+1}$
3. On déduit de la question précédente que $I_0=\dfrac{1}{1!}+I_1=\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+I_2=\cdots=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k!}+I_n$. Or, on a $I_0=\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx=[e^x]_0^1=e-1=e-\frac{1}{0!}$. On en déduit donc que $e-I_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!}$, ce qui en passant à la limite donne bien $e=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!}$.

Exercice 8 (***)

1. $J_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{\ln 2}{2}$. De plus, $\forall x\in[0;1]$, $1+x^2\geqslant 1$, donc $\dfrac{x^n}{1+x^2}\leqslant x^n$ et $J_n\leqslant\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$. La positivité de J_n découle simplement, comme d'habitude, de celle de la fonction intégrée.
2. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer la convergence de J_n vers 0.
3. On pose $\left\{\begin{array}{ll} u(x)=\ln(1+x^2) & v'(x)=x^n \\ u'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2} & v(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{array}\right.$, et on obtient $I_n=\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x^2)\right]_0^1-\displaystyle\int_0^1\frac{2x^{n+2}}{(n+1)(1+x^2)}\,dx=\frac{\ln 2}{n+1}-\frac{2J_{n+2}}{n+1}$
4. Les deux termes du membre de droite de l'égalité précédente tendent manifestement vers 0 (en utilisant la question 2), donc I_n également.
5. On a $I_n=\dfrac{1}{n+1}(\ln 2-2J_{n+2})$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}J_{n+2}=0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln 2-2J_{n+2}=\ln 2$. On en déduit que $I_n\sim\dfrac{\ln 2}{n+1}\sim\dfrac{\ln 2}{n}$.

Exercice 9 (***)

1. Par une intégration par parties désormais classique consistant à poser $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^2$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$, on a $I_1 = \displaystyle\int_1^e x^2 \ln x\, dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \dfrac{x^2}{3}\, dx = \dfrac{e^3}{3} - \left[\dfrac{x^3}{9}\right]_1^e = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{e^3}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{2e^3+1}{9}$.
2. Sur $[1; e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant (\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$. On a donc $0 \leqslant x^2(\ln x)^{n+1} \leqslant x^2(\ln x)^n$, puis par intégration $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est décroissante.
3. La suite est décroissante minorée par 0, elle converge donc.
4. Le plus simple est d'étudier la fonction $f : x \mapsto \ln x - \dfrac{x}{e}$. On a $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e}$, qui est positif sur l'intervalle $[1; e]$. La fonction f est donc croissante sur $[1; e]$, et $f(e) = 1 - 1 = 0$, donc f est négative sur $[1; e]$. On en déduit que $I_n \leqslant \displaystyle\int_1^e x^2 \left(\dfrac{x}{e}\right)^n = \dfrac{1}{e^n}\int_1^e x^{n+2}\, dx = \dfrac{1}{e^n}\left[\dfrac{x^{n+3}}{n+3}\right]_1^e = \dfrac{e^{n+3}-1}{e^n(n+3)} = \dfrac{e^3 - \frac{1}{e^n}}{n+3}$. La majoration calculée tendant vers 0, notre cher théorème des gendarmes s'applique et (I_n) converge vers 0.
5. Il s'agit bien sûr d'une intégration par parties, avec $u(x) = (\ln x)^{n+1}$ et $v'(x) = x^2$, donc $u'(x) = (n+1) \times \dfrac{1}{x} \times (\ln x)^n$ et $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$:
$I_{n+1} = \left[\dfrac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e (n+1)\dfrac{x^2}{3}(\ln x)^n = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$ En faisant tendre n vers $+\infty$, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{3} I_n = \dfrac{e^3}{3}$, donc $I_n \sim \dfrac{e^3}{n+1} \sim \dfrac{e^3}{n}$.

Exercice 10 (**)

- Si on note $g(t) = e^{-3\sqrt{2\ln t}}$, et G une primitive de g sur $]1; +\infty[$ (il faudrait changer la borne inférieure dans l'énoncé pour mettre quelque chose de plus grand que 1, par exemple 2, la fonction g n'étant pas définie pour $x < 1$ ...), on aura (par définition de l'intégrale) $f_1(x) = G(2x) - G(2)$, donc en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées $f_1'(x) = 2g(2x) = 2e^{-3\sqrt{2\ln(2t)}}$
- Même principe que ci-dessus : on note $g(t) = \dfrac{1}{1+t+t^2}$ (qui est pour le coup définie sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur a un discriminant négatif), et G une primitive de g, on a alors $f_2(x) = G(x^2) - G(x)$, donc $f_2'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2+x^4} - \dfrac{1}{1+x+x^2}$.
- Posons donc $g(t) = \sqrt{1+t^2}$ (encore une fois définie sur $\mathbb{R}$) et G une primitive ; $f_3(x) = G(-x) - G(x)$, donc $f_3'(x) = -g(-x) - g(x) = -\sqrt{1+(-x)^2} - \sqrt{1+x^2} = -2\sqrt{1+x^2}$

- Cette fois, $g(t) = \dfrac{t}{\ln t}$ (définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$), et f_4 n'est définie nulle part puisque $-\sqrt{x}$ est toujours négatif quand la valeur existe. Inutile donc de chercher à dériver f_4.

Exercice 11 (***)

1. La fonction f est la primitive de $\dfrac{e^x}{x}$ s'annulant en 1. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{e^x}{x}$. Cette dérivée étant positive sur $\mathbb{R}_+^*$, f y est croissante.
2. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{e^x - 1}{x}$. Cette dérivée est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc g y est croissante. Comme $g(1) = f(1) - \ln 1 = 0$, la fonction g est donc négative sur $]0;1]$ et positive sur $[1;+\infty[$ ($f(1) = 0$ car on effectue alors une intégrale sur l'intervalle $[1;1]$).
3. D'après la question précédente, on a $f(x) \leqslant \ln x$ sur $]0;1[$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$; de même, $f(x) \geqslant \ln x$ si $x \geqslant 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 12 (** à ***)

- Le but est donc de faire apparaitre une somme de Riemann, ce qui consiste en gros à sortir un $\dfrac{1}{n}$ de la somme et à exprimer ce qui reste dans la somme en fonction de $\dfrac{k}{n}$ uniquement : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2(1+(\frac{k}{n})^2)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Le théorème de convergence des sommes de Riemann permet alors d'affirmer que (u_n) converge et que sa limite vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.
- Même méthode : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$, donc (v_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1$.
- Pour w_n, c'est un peu plus subtil, il vaut mieux étudier $\ln(w_n)$ et surtout se rendre compte que $\ln(n!) = \ln(1\times 2\times\cdots\times n) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n$. On a alors : $\ln w_n = \dfrac{1}{n}(\ln((2n)!) - n\ln n - \ln(n!)) = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=2n}\ln k - n\ln n - \sum_{k=1}^{k=n}\ln k\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=2n}(\ln k - \ln n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{k=2n}\ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\frac{n+k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, donc $(\ln w_n)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \int_1^2 \ln u\,du = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1$, et (w_n) converge vers $e^{2\ln 2 - 1} = \dfrac{4}{e}$.

Exercice 13 (**)

1. Il suffit pour cela de dire que le dénominateur $1+t+t^n$ ne s'annule jamais sut l'intervalle $[0;1]$ (il est toujours supérieur à 1), donc que la fonction à intégrer est continue sur $[0;1]$, ce qui assure l'existence de son intégrale.
2. Calculons donc : $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+t}dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2$; et $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2t}dt =$

$\left[\frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$.

3. (a) Pour tout t dans $[0;1]$, on a $t^{n+1} \leqslant t^n$, donc $1+t+t^{n+1} \leqslant 1+t+t^n$ puis (tout étant positif) $\frac{1}{1+t+t^{n+1}} \geqslant \frac{1}{1+t+t^n}$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient $u_{n+1} \geqslant u_n$, la suite (u_n) est donc croissante.

   (b) Il faut réussir à majorer intelligemment ce qui se trouve sous l'intégrale, en l'occurence en constatant que $\forall t \in [0;1]$, $1+t+t^n \geqslant 1+t$, donc $\frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t}$. En intégrant l'inegalité, on obtient $u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$.

   (c) La suite (u_n) est donc croissante et majorée, elle converge.

4. (a) En utilisant le calcul fait un peu plus haut, on a $\ln 2 - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

   (b) Il suffit d'arriver à majorer ce qui se trouve sous l'intégrale : $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} = \frac{1+t+t^n-(1+t)}{(1+t)(1+t+t^n)} = \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}$. Or, ce magnifique dénominateur est certainement plus grand que 1 quand $t \in [0;1]$, donc $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \leqslant t^n$, et en intégrant cette inégalité on a $\ln 2 - u_n \leqslant \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

   (c) On a vu plus haut que $u_n \leqslant \ln 2$, donc $\ln 2 - u_n \geqslant 0$. Comme on vient de majorer par ailleurs cette même expression par quelque chose qui tend vers 0, un coup de théorème des gendarmes nous donnes $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln 2 - u_n) = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 14 (ESCP 92) (****)

1. (a) Prenons deux réels x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$. On a alors $e^{-tx} > e^{-ty}$ pour tout $t \in [0;1]$. De même $t^k e^{-tx} > t^k e^{-ty}$ et on peut intégrer cette inégalité, ce qui donne exactement $f_k(x) > f_k(y)$, donc f_k est bien décroissante.

   (b) On a $f_k(0) = \int_0^1 t^k\, dt = \frac{1}{k+1}$. La suite $(f_k(0))$ est donc décroissante et tend vers 0. Or, f_k étant positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\forall x > 0$, $0 \leqslant f_k(x) \leqslant \frac{1}{k+1}$, ce qui suffit à assurer via le théorème des gendarmes que $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

2. (a) Il s'agit de faire une IPP en posant $u(t) = t^{k+1}$ et $v'(t) = e^{-tx}$, donc $u'(t) = (k+1)t^k$ et $v(t) = -\frac{e^{-tx}}{x}$ (faites bien gaffe que la variable ici est t et x est donc une constante). On obtient $f_{k+1}(x) = \left[-t^{k+1}\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 + (k+1)\int_0^1 t^k \frac{e^{-tx}}{x}\, dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{k+1}{x}f_k(x)$.

   (b) On a $f_0(x) = \int_0^1 e^{-tx}\, dt = \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1-e^{-x}}{x}$. On peut utiliser la question précédente pour calculer les fonctions suivantes : $f_1(x) = \frac{1}{x}f_0(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x^2}(1 - e^{-x} - xe^{-x})$, puis $f_2(x) = \frac{2}{x}f_1(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x^3}(2 - 2e^{-x} - 2xe^{-x} - x^2e^{-x})$.

   (c) Il suffit de reprendre l'expression trouvée : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$, donc $f_0 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

(d) Il faut faire une récurrence : on vient de montrer le résultat pour $k = 0$. Supposons le vrai pour f_k, on a alors $f_{k+1}(x) = \dfrac{f_k(x)}{x}\left(k+1-\dfrac{e^{-x}}{f_k(x)}\right)$. La parenthèse tend vers $k+1$ car l'exponentielle négative, par croissance comparée, l'emporte sur f_k qui est par hypothèse de récurrence équivalente à une fonction puissance. On a donc $f_{k+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k+1}{x} f_k \sim \dfrac{k+1}{x}\dfrac{k!}{x^{k+1}} \sim \dfrac{(k+1)!}{x^{k+2}}$, ce qui achève la récurrence.

3. (a) Le changement de variable est $u = tx$, qui donne $du = x\ dt$, et change les bornes de l'intégrale en 0 et x, ce qui donne donc $f_k(x) = \displaystyle\int_0^1 t^k e^{-tx} dt = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k e^{-u}\ \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x u^k e^{-u}\ du$.

(b) On vient décrire $f_k(x)$ sous la forme d'un produit $g(x)h(x)$, où $g(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}}$, et donc $g'(x) = -\dfrac{k+1}{x^{k+2}}$, et $h(x) = \displaystyle\int_0^x u^k e^{-u}\ du$, donc $h'(x) = x^k e^{-x}$. On en déduit que $f_k'(x) = -\dfrac{k+1}{x^{k+2}}h(x) + \dfrac{1}{x^{k+1}}x^k e^{-x} = -\dfrac{k+1}{x}f_k(x) + \dfrac{e^{-x}}{x}$. On vient donc de montrer, en reprenant le résultat de la question 2.a, que $f_k' = -f_{k+1}$.

(c) On étudie la fonction $y \mapsto 1 - e^{-y} - y$ sur $\mathbb{R}^+$. sa dérivée vaut $e^{-y} - 1$, qui est négative sur l'intervalle d'étude. Or, pour $y = 0$, la fonction est nulle. Elle est donc bien négative sur $\mathbb{R}^+$.

On a donc $f_k(x) - f_k(0) = \displaystyle\int_0^1 t^k e^{-tx}\ dt - \int_0^1 t^k\ dt = \int_0^1 t^k(e^{-tx} - 1)\ dt \geqslant \int_0^1 t^{k+1} x\ dt = \frac{x}{k+2}$. Quand x tend vers 0, ceci tend vers 0. Comme par ailleurs $f_k(x) - f_k(0)$ est négatif puisque f_k est décroissante, la fonction f_k est bien continue en 0.

Pour la dérivée, on utilise ce bon vieux théorème du prolongement C^1 ! La fonction f_k est dérivable et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_k' = -f_{k+1}$. On vient de voir que f_{k+1} était continue en 0, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_{k+1}(x) = f_{k+1}(0) = \frac{1}{k+2}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_k'(x) = -\frac{1}{k+2}$ puis que f_k est dérivable en 0, de dérivée $f_k'(0) = -\dfrac{1}{k+2}$.