CALCULS INTEGRALES **: Exercices d'applications et de réflexions avec solutions**

PROF: ATMANI NAJIB 2BAC SM

CALCULS INTEGRALES: *Exercices avec solutions*

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_2^4 3x\,dx$ **2)** $J=\int_0^1(2x+3)\,dx$

3) $K=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}dt$ 4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)d\theta$

Solution :1)la fonction $x\mapsto 3x$ est continue sur $[2;4]$

Une primitive sur $[2;4]$ est : $x\mapsto\frac{3}{2}x^2$

Donc : $I=\int_2^4 3x\,dx=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_2^4=\frac{3}{2}\times4^2-\frac{3}{2}\times2^2=18$

2) $J=\int_0^1(2x+3)\,dx=\left[x^2+3x\right]_0^1=(1+3)-(0)=4$

3) $K=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}dt=[\ln t]_e^{e^2}=\ln e^2-\ln e=2-1=1$

4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin0=\frac{1}{2}$

Exercice2 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1=\int_0^2(2x-1)\,dx$ 2) $I_2=\int_{-1}^1\left(x^4-4x^3+2\right)dx$

3) $I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$ 4) $I_4=\int_0^{\ln 2}e^{2t}dt$

5) $I_5=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}te^{-t^2}dt$ 6) $I_6=\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx$

7) $I_7=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx$ 8) $I_8=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$

9) $I_9=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$ 10) $I_{10}=\int_2^3\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$

11) $I_{11}=\int_0^1\sqrt{2x+1}dx$ 12) $I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3 x\,dx$

13 $I_{13}=\int_1^2\frac{3}{(3x-4)^5}dx$ 14) $I_{14}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-\cos3x)\,dx$

15) $I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ 16) $I_{16}=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x+1}\right)dx$

17) $I_{17}=\int_1^e\frac{\ln^3 x}{x}dx$ 18) $I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx$

19) $I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx$ 20) $I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^2\,dx$

21) $I_{21}=\int_1^e\frac{8x^9-4x+2}{x}dx$

Solution :1) $I_1=\int_0^2(2x-1)\,dx=\left[2\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2=\left[x^2-x\right]_0^2$

$I_1=\left(2^2-2\right)-\left(0^2-0\right)=4-2=2$

$I_2=\int_{-1}^1\left(x^4-4x^3+2\right)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{4}x^4+2x\right]_{-1}^1=\left[\frac{1}{5}x^5-1x^4+2x\right]_{-1}^1$

$I_2=\left[\frac{1}{5}x^5-1x^4+2x\right]_{-1}^1=\left(\frac{1}{5}1^5-1^4+2\right)-\left(\frac{1}{5}(-1)^5-(-1)^4-2\right)$

$I_2=\left(\frac{1}{5}-1+2\right)-\left(-\frac{1}{5}-1-2\right)=\frac{1}{5}-1+2+\frac{1}{5}+1+2=\frac{2}{5}+4=\frac{22}{5}$

3) $I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

4) $I_4=\int_0^{\ln 2}e^{2t}dt=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}(2t)'e^{2t}dt=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-\frac{1}{2}e^{2\times0}$

$I_4=\frac{1}{2}e^{\ln 2^2}-\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}4-\frac{1}{2}e^0=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

5) $I_5=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}te^{-t^2}dt=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}-\frac{1}{2}\left(-t^2\right)'e^{-t^2}dt=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}$

$I_5=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}=-\frac{1}{2}e^{-\left(\sqrt{\ln 2}\right)^2}+\frac{1}{2}e^{-0^2}=-\frac{1}{2}e^{-\left(\sqrt{\ln 2}\right)^2}+\frac{1}{2}$

$I_5=-\frac{1}{2}e^{-\ln 2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{e^{\ln 2}}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

6) $I_6=\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx=\int_1^e \frac{1}{x}\times\ln^2 x dx=\int_1^e \ln' x\times\ln^2 x dx$

$I_6=\left[\frac{1}{2+1}\ln^{2+1}x\right]_1^e=\frac13\ln^3 e-\frac13\ln^3 1=\frac13$

7) $I_7=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx=\left[\ln|e^x+1|\right]_0^{\ln 2}$

$I_7=\ln|e^{\ln 2}+1|-\ln|e^0+1|=\ln|3|-\ln|2|=\ln 3-\ln 2=\ln\left(\frac32\right)$

8) $I_8=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{(e^x-e^{-x})'}{e^x-e^{-x}}dx=\left[\ln|e^x-e^{-x}|\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$

$I_8=\ln|e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}|-\ln|e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}|=\ln\left|3-\frac{1}{e^{\ln 3}}\right|-\ln\left|e^{\ln 2}-\frac{1}{e^{\ln 2}}\right|$

$I_8=\ln\left|3-\frac13\right|-\ln\left|2-\frac12\right|=\ln\left(\frac83\right)-\ln\left(\frac32\right)=\ln\left(\frac{\frac83}{\frac32}\right)=\ln\left(\frac{16}{9}\right)$

9) $I_9=\int_1^e\frac1x\ln x dx=\int_1^e(\ln x)'(\ln x)^1 dx=\left[\frac{1}{1+1}(\ln x)^{1+1}\right]_1^e$

$I_9=\int_1^e\frac1x\ln x dx=\frac12(\ln e)^2-\frac12(\ln 1)^2$

$I_9=\int_1^e\frac1x\ln x dx=\frac12-0=\frac12$

$I_{10}=\int_2^3\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx=2\int_2^3\frac{(x^2+3x-4)'}{2\sqrt{x^2+3x-4}}dx=2\left[\sqrt{x^2+3x-4}\right]_2^3$

$I_{10}=2\left[\sqrt{x^2+3x-4}\right]_2^3=2\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)$

$I_{11}=\int_0^1\sqrt{2x+1}dx=\frac12\int_0^1(2x+1)'(2x+1)^{\frac12}dx=2\left[\frac{1}{\frac12+1}(2x+1)^{\frac12+1}\right]_0^1$

$I_{11}=2\left[\frac23(2x+1)^{\frac32}\right]_0^1=\frac43(3)^{\frac32}-\frac43(1)^{\frac32}=\frac43\left(\left(\sqrt{(3)}\right)^3-1\right)=\frac43\left(3\sqrt{(3)}-1\right)$

12) $I_{12}=\int_0^{\frac\pi2}\cos x\sin^3 x dx=\int_0^{\frac\pi2}(\sin x)'\sin^3 x dx=\left[\frac14\sin x^{3+1}\right]_0^{\frac\pi2}$

$I_{12}=\frac14\sin^4\frac\pi2-\frac14\sin^4 0=\frac14-0=\frac14$

$I_{13}=\int_1^2\frac{3}{(3x-4)^5}dx=3\int_1^2(3x-4)^{-5}dx=\int_1^2(3x-4)'(3x-4)^{-5}dx$

$I_{13}=\left[\frac{1}{-5+1}(3x-4)^{-5+1}\right]_1^2=\left[\frac{1}{-4}(3x-4)^{-4}\right]_1^2=\frac{1}{-4}(2)^{-4}-\frac{1}{-4}(-1)^{-4}$

$I_{13}=\frac{1}{-4}\times\frac{1}{16}+\frac14=-\frac{1}{64}+\frac{16}{64}=\frac{15}{64}$

14) $I_{14}=\int_0^{\frac\pi3}(2-\cos 3x)dx=\left[2x-\frac13\sin 3x\right]_0^{\frac\pi3}$

$I_{14}=\left(2\frac\pi3-\frac13\sin\pi\right)-0=\frac{2\pi}{3}$

15) $I_{15}=\int_0^{\frac\pi4}\cos^2 x dx$

(on a : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$: linearization) Donc:

$I_{15}=\int_0^{\frac\pi4}\cos^2 x dx=\int_0^{\frac\pi4}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac12\int_0^{\frac\pi4}(1+\cos 2x)dx$

$I_{15}=\frac12\int_0^{\frac\pi4}(1+\cos 2x)dx=\frac12\left[x+\frac12\sin 2x\right]_0^{\frac\pi4}=\frac12\left(\frac\pi4+\frac12\sin\frac\pi2\right)$

$I_{15}=\frac{\pi+2}{8}$

16) $I_{16}=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x+1}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}+\frac12\frac{(2x+1)'}{2x+1}\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{x+1}+\frac12\ln|2x+1|\right]_0^1=-\frac12+\frac12\ln|3|+1-\frac12\ln|1|=\frac12+\frac12\ln 3$

17) $I_{17}=\int_1^e\frac{\ln^3 x}{x}dx=\int_1^e\frac1x\times\ln^3 x dx=\int_1^e\ln' x\times\ln^3 x dx$

$I_{17}=\left[\frac{1}{3+1}\ln^{3+1}x\right]_1^e=\frac14\ln^4 e-\frac14\ln^4 1=\frac14$

$I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx=\int_0^1\frac12\left((x-1)^2\right)'e^{(x-1)^2}dt=\left[\frac12 e^{(x-1)^2}\right]_0^1$

$=\frac12e^0-\frac12e^1=\frac12-\frac12e=\frac12(1-e)$

19) $I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^2\frac{\frac1x}{(1+\ln x)}dx$

$I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^2\frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)}dx=\left[\ln|1+\ln x|\right]_1^2$

$I_{19} = \ln|1+\ln 2| - \ln|1+\ln 1| = \ln|1+\ln 2| = \ln(1+\ln 2)$

20) $I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + (\tan x)^2 - 1 dx$

$I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left(1+(\tan x)^2\right) - 1\right) dx = [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$I_{20} = \tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$

21) $I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx = \int_1^e \left(8x^8 - 4 + \frac{2}{x}\right) dx$

$= \left[\frac{8}{9}x^9 - 4x + 2\ln x\right]_1^e = \frac{8}{9}e^9 - 4e + \frac{46}{9}$

Formules importantes : $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$; $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$; $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

$\sin(2a) = 2\sin a \times \cos a$

Exercice3 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^3 |x-1| dx$ 2) $J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$

Solution :1)on a $x \in [0,3]$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ on va étudier le signe de : $x - 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

la Relation de Chasles donne :

$I = \int_0^3 |x-1| dx = \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^3 |x-1| dx$

$I = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx$

$I = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{5}{2}$

2) $J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$

$x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$

on va étudier le signe de : $x(x+1)$

a)si $x \in [-2;-1]$ alors : $x(x+1) \geq 0$

donc : $|x(x+1)| = x(x+1)$

b)si $x \in [-1;0]$ alors : $x(x+1) \leq 0$

$|x(x+1)| = -x(x+1)$

La Relation de Chasles donne :

$J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx = \int_{-2}^{-1} |x(x+1)| dx + \int_{-1}^0 |x(x+1)| dx$

$J = \int_{-2}^{-1} (x^2 + x) dx + \int_{-1}^0 (-x^2 - x) dx$

$J = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0$

$J = \left(\frac{1}{6} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) + \left(0 - \left(-\frac{1}{6}\right)\right) = 1$

Exercice4 : on pose: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

Calculer $I + J$ et $I - J$ et en déduire I et J

Solution :

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) dx$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) dx$

$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{4} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases}$ par sommation on trouve: $2I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

donc : $I = \frac{\pi + 2}{8}$ et on replace dans dans la 1ére

équation et on trouve: $\frac{\pi + 2}{8} + J = \frac{\pi}{4}$

Donc: $J = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi + 2}{8} = \frac{2\pi - \pi - 2}{8} = \frac{\pi - 2}{8}$

Exercice5 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{\left(x^2 - 4x\right)^2} dx$ 2) $I = \int_0^{\ln 3} \left|2 - e^x\right| dx$

3) $I = \int_0^2 \left|x^2 - x - 2\right| dx$

Solution : 1) $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

étude du signe de: $x-2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

La Relation de Chasles donne :

$$I=\int_1^3 \frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx=\int_0^2 \frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\int_2^3 \frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$=\int_0^2 \frac{-(x-2)}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\int_2^3 \frac{x-2}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{-\left(x^2-4x\right)'}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{\left(x^2-4x\right)'}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-4x}\right]_1^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-4x}\right]_2^3$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-4}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{6}-\frac{2}{8}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

2) $I=\int_0^{\ln 3}\left|2-e^x\right|dx$

$$2-e^x\geq 0 \Leftrightarrow e^x\leq 2 \Leftrightarrow x\leq \ln 2$$

$$I=\int_0^{\ln 2}\left|2-e^x\right|dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left|2-e^x\right|dx$$

$$I=\int_0^{\ln 2}\left(2-e^x\right)dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x-2dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[2x-e^x\right]_0^{\ln 2}+\left[e^x-2x\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I=\left(\left(2\ln 2-2\right)+1\right)+\left(\left(3-2\ln 3\right)-\left(2-2\ln 2\right)\right)=\ln\left(\frac{16}{9}\right)$$

Exercice 6: Calculer l' intégrale suivante :

$$I=\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}dx$$

Solution : On remarque que : $\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)$

donc : $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}dx=\int_0^1 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

et la linéarité de l'intégrale donne :

$$I=\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx$$

$$I=\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx$$

$$I=\frac{1}{4}\left[\ln|x-2|\right]_0^1-\frac{1}{4}\left[\ln|x+2|\right]_0^1$$

$$I=-\frac{1}{4}\ln 2-\frac{1}{4}\left(\ln 3-\ln 2\right)=-\frac{1}{4}\ln 3$$

Exercice7 :on pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx$

1)montrer que : $\cos^4 x=\frac{1}{8}\left(\cos 4x+4\cos 2x+3\right)$

$\forall x\in\mathbb{R}$ (linéarisation de $\cos^4 x$)

2)en déduire l' intégrale I

Solution :1)on a : $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ donc :

$$\cos^4 x=\left(\frac{e^{iX}+e^{-iX}}{2}\right)^4$$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(e^{ix}\right)^4+4\left(e^{ix}\right)^3\cdot\left(e^{-ix}\right)+6\left(e^{ix}\right)^2\cdot\left(e^{-ix}\right)^2+4\left(e^{ix}\right)^1\cdot\left(e^{-ix}\right)^3+\left(e^{-ix}\right)^4\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{i3x}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}+4e^{2ix}+4e^{2ix}+6\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+4\left(e^{2ix}+e^{2ix}\right)+6\right)$$

Or on sait que :

$2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$t $2\cos nx=e^{inx}+e^{-inx}$

Donc : $\cos^4\theta=\frac{1}{16}\left(\left(2\cos 4x\right)+4\left(2\cos 2x\right)+6\right)$

Donc: $\cos^4 x=\frac{1}{8}\left(\cos 4x+4\cos 2x+3\right)$

2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 4x+4\cos 2x+3\right)dx$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x+4\frac{1}{2}\sin 2x+3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 2\pi+4\frac{1}{2}\sin\pi+3\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{16}$$

Exercice8 :d'application Soit f : $x \to e^{-x^2}$

Définie sur R.

Pour tout réel $a \geq 1$, on s'intéresse à l'intégrale

$F(a) = \int_1^a f(x)dx$

1)Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$:

$0 \leq f(x) \leq e^{-x}$.

2) En déduire que pour tout réel $a \geq 1$:

$0 \leq F(a) \leq e^{-1}$.

Solution :1) Une exponentielle étant toujours positive : $0 \leq f(x)$ pour tout réel x et donc en particulier pour tout $x \geq 1$. De plus, si $x \geq 1$, alors $x \leq x^2$, c'est-à-dire $-x \geq -x^2$ et donc $e^{-x} \geq f(x)$ par croissance de la fonction exponentielle.

On en déduit donc que pour tout réel $x \geq 1$

$0 \leq f(x) \leq e^{-x}$

2) À partir de l'inégalité obtenue, on utilise la propriété précédente sur l'intervalle [1 ; a] et ainsi

$\int_1^a 0dx \leq \int_1^a f(x)dx \leq \int_1^a e^{-x}dx$

$0 \leq F(a) \leq \left[-e^{-x}\right]_1^a$ Donc

$0 \leq F(a) \leq -e^{-a} + e^{-1} \leq e^{-1}$ donc : $0 \leq F(a) \leq e^{-1}$

ce qui démontre l'inégalité voulue.

Exercice9 : Montrer que : $\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx \leq \frac{1}{3}$

Solution :on a $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$

Donc : $\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2$

Donc : $\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx \leq \int_0^1 x^2dx$

Donc : $\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 \leq I \leq \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$ Donc : $\frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3}$

Exercice10 :soit la suite numérique (u_n)définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Montrer que (u_n)est croissante

2) Montrer que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solution :1) $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}}dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$

$= \int_0^1 \left(\frac{1+x^n-1-x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx$

On sait que : $0 \leq x \leq 1$ donc : $0 \leq 1-x$

Et on a: $\frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0$ car $0 \leq x$

Donc : $\frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0$

Donc: $\int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx \geq 0$

Donc: $u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc:(u_n)est croissante

2) Montrons que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a : $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^n \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq x^n + 1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^n+1} \leq 1$

Donc: $\int_0^1 \frac{1}{2}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx \leq \int_0^1 1dx$

Donc: $\frac{1}{2}[x]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx \leq [x]_0^1$

Donc : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice11 :soit la suite numérique (u_n)

définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \ \forall x\in[0;1]\ :\ \frac{e^{nx}}{1+e}\le\frac{e^{nx}}{1+e^{x}}\le\frac{e^{nx}}{2}$$

2) En déduire: $\lim_{n\to+\infty}u_n$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{e^n}\right)$

Exercice12 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $A=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$ 2) $B=\int_1^e\frac{(\ln x)^3}{x}dx$

3) $C=\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}dx$

Solution : 1) $A=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$

$=[ar\tan t]_0^1=ar\tan 1-ar\tan 0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$

2) $B=\int_1^e\frac{(\ln x)^3}{x}dx=\int_1^e(\ln x)'(\ln x)^3dx$

$=\left[\frac{(\ln x)^4}{4}\right]_1^e=\frac{(\ln e)^4}{4}-\frac{(\ln 1)^4}{4}=\frac{1}{4}$

3) $C=\int_0^{\sqrt{3}}2x\sqrt{x^2+1}dx=\int_0^{\sqrt{3}}(x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$=\left[\frac{(x^2+1)^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}\right]_1^{\sqrt{3}}=\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}(2-1)=\frac{2}{3}$

Exercice13 : Calculer l' intégrale suivante :

1) $I=\int_0^{\pi}x\sin x dx$ 2) $J=\int_0^{\ln 2}xe^xdx$

3) $K=\int_1^e\ln x dx$

Solution : 1) $I=\int_0^{\pi}x\sin x dx$

On pose : $u'(x)=\sin x$ et $v(x)=x$

Donc $u(x)=-\cos x$ et $v'(x)=1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0;\pi]$ et u' et v' sont continue sur $[0;\pi]$

Donc : $I=[-x\cos x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos x dx=[-x\cos x]_0^{\pi}-[-\sin x]_0^{\pi}=\pi$

2) $J=\int_0^{\ln 2}xe^xdx$

On pose : $u'(x)=e^x$ et $v(x)=x$

Donc $u(x)=e^x$ et $v'(x)=1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0;\ln 2]$ et u' et v' sont continue sur $[0;\ln 2]$

Donc : $J=\left[xe^x\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}1e^xdx=\ln 2e^{\ln 2}-\left[e^x\right]_0^{\ln 2}$

$J=2\ln 2-(e^{\ln 2}-1)=2\ln 2-(2-1)=2\ln 2-1$

3) $K=\int_1^e\ln x dx$ on a $K=\int_1^e\ln x dx=\int_1^e 1\times\ln x dx$

On pose : $u'(x)=1$ et $v(x)=\ln x$

Donc : $u(x)=x$ et $v'(x)=1/x$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[1;e]$ et u' et v' sont continue sur $[1;e]$

Donc : $K=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx=e\ln e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx$

$K=e-\int_1^e 1dx=e-[x]_1^e=e-e+1=1$

Exercice14 : En utilisant une intégration par partie calculer :

1) $I=\int_0^1 xe^{2x}dx$ 2) $J=\int_1^{e^3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

3) $K=\int_0^1 x\sqrt{e^x}dx$ 4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x dx$

5) $M=\int_1^e(x\ln x)dx$ 6) $N=\int_1^e\cos(\ln x)dx$

Solution :1) $I=\int_0^1 xe^{2x}dx$ la démarche est la même : $I=\int_0^1 xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx$

$I=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{4}(e^2+1)$

$I=\int_1^{e^3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_1^{e^3}x^{-\frac{2}{3}}\ln x dx$

$=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-\int_1^{e^3}3x^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}dx=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-3\int_1^{e^3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

$$= \left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3} - 9\left[x^{\frac{1}{3}}\right]_1^{e^3} = 9$$

Exercice15 : En utilisant une intégration par partie calculer : $J = \int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$

$K = \int_0^1 \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

$M = \int_1^e x(1-\ln x)dx \qquad N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$

$R = \int_1^e x\ln x dx \qquad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

Exercice16: On pose : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3}dx$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{x+3}dx$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \le I_n \le \frac{2}{n+1}$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

Exercice17 : En utilisant une intégration par changement de variable.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$ on pose $x = \sqrt{t}$

2) $I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}dx$ on pose $t = e^x$

3) $I_3 = \int_{e^{-2}}^e \frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}}dt$ on pose $x = \ln t$

4) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$ on pose $x = \frac{\pi}{4} - t$

Solution : 1) $I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$ on pose $x = \sqrt{t}$

On a : $x = \sqrt{t}$ donc : $\begin{cases} t=1 \Rightarrow x=1 \\ t=3 \Rightarrow x=\sqrt{3} \end{cases}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{(1+x^2)x}dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2}dt$

$I_1 = \left[2\arctan x\right]_1^{\sqrt{3}} = 2\arctan\sqrt{3} - 2\arctan 1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

2) $I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}dx$ on pose $t = e^x$

On a : $t = e^x$ donc : $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\ln 2 \Rightarrow t=2 \end{cases}$

$\frac{dt}{dx} = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$ on en déduit que : $\frac{dt}{t} = dx$

$I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_1^2 \frac{t^3+t^2+3t}{1+t^2}\frac{dt}{t}$

$I_2 = \int_1^2 \frac{t^2+t+3}{1+t^2}dt = \int_1^2 \left(t + \frac{3}{1+t^2}\right)dt$

$I_2 = \left[\frac{1}{2}t^2 + 3\arctan x\right]_1^2$ (Continuer les calculs)

3) $I_3 = \int_{e^{-2}}^e \frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}}dt$

On a $I_3 = \int_{e^{-2}}^e \frac{(\ln t)'}{\sqrt{3+\ln t}}dt$ on pose $x = \ln t$

$x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

On a : $x = \ln t$ donc : $\begin{cases} t=e^{-2} \Rightarrow x=-2 \\ t=e \Rightarrow x=1 \end{cases}$

$I_3 = \int_{e^{-2}}^e \frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}}dt = \int_{-2}^1 \frac{1}{\sqrt{3+x}}dx$

On sait que: $x \to 2\sqrt{3+x}$ est une primitive de :

$x \to \frac{1}{\sqrt{3+x}}$ donc : $I_3 = \left[2\sqrt{3+x}\right]_{-2}^{1}$ donc : $I_3 = 2$

4) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$ on pose $x = \frac{\pi}{4} - t$

On trouve :

$$I_4 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) - dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) dt$$

On sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan t}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan t} = \frac{1-\tan t}{1+\tan t}$

Donc : $1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right) = \frac{2}{1+\tan t}$

Donc : $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\ln 2 - \ln(1+\tan t)\right) dt$

Donc: $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\ln(1+\tan t)\right) dt$

$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dt - I_4$ Donc:

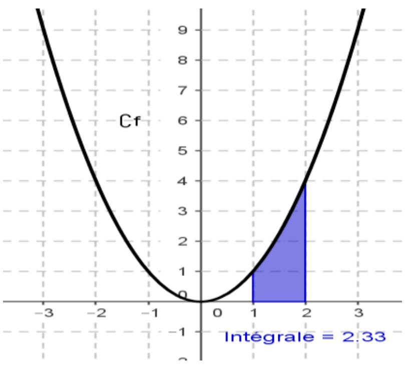
$$2I_4 = \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dt \Rightarrow 2I_4 = \frac{\pi}{4}\ln 2 \Rightarrow I_4 = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

Exercice18 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et Soit f définit par : $f(x) = x^2$

1)tracer C_f la courbe représentative de f
2) calculer S la surface du domaine limité par :
Cf, l'axe des abscisses et les droites : x = 1 et x = 2

Solution :1)

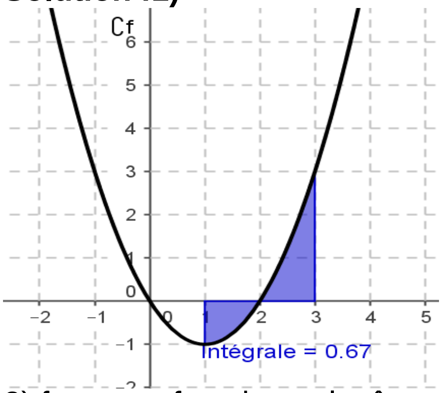


2) f est continue et positif sur $[1;3]$ on a donc :
$A = \int_1^2 |f(x)|dx = \int_1^2 |x^2|dx = \int_1^2 x^2 dx$

$$A = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}\times 2^3 - \frac{1}{3}\times 1^3 = \frac{7}{3}\times 2cm \times 2cm = \frac{28}{3}c^2m$$

Exercice19 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthogonale avec
$\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 3cm$
Soit f définit par : $f(x) = x^2 - 2x$
1)tracer Cf la courbe représentative de f
2) calculer S la surface du domaine limité par :
Cf, l'axe des abscisses et les droites :
x = 1 et $x = 3$

Solution :1)



2) f est une fonction polynôme donc continue sur
$[1;3]$ donc : $A = \int_1^3 |f(x)|dx = \int_1^3 |x^2 - 2x|dx$
Etudions le signe de : $x^2 - 2x$ dans $[1;3]$
$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
$x2-2x$	+ 0 − 0 +

$$A = \int_1^3 |x^2 - 2x|dx = \int_1^2 |x^2 - 2x|dx + \int_2^3 |x^2 - 2x|dx$$

$$A = \int_1^2 -(x^2 - 2x)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)dx$$

$$A = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_2^3 = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_2^3$$

$$= -\frac{1}{3}\times 2^3 + 2^2 + \frac{1}{3}\times 1^3 - 1^2 + \frac{1}{3}\times 3^3 - 3^2 - \frac{1}{3}\times 2^3 + 2^2$$

$$= -\frac{2}{3}\times 2^3 + 8 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{27}{3} - 9 = -\frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{27}{3} - 2$$

$$A = 2\times 2cm \times 3cm = 12c^2m$$

Exercice20 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et soit f définit par : $f(x) = 1 - e^x$

Calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites :
$x = \ln 2$ et $x = \ln 4$

Solution : il suffit de calculer : $I=\int_{\ln 2}^{\ln 4}|f(x)|dx$

$I=\int_{\ln 2}^{\ln 4}|f(x)|dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}|1-e^{x}|dx$

On sait que : $\ln 2\le x\le \ln 4$ donc : $e^{\ln 2}\le e^{x}\le e^{\ln 4}$

Donc : $2\le e^{x}\le 4$ donc $e^{x}>1$ par suite: $1-e^{x}<0$

Donc:

$I=\int_{\ln 2}^{\ln 4}|1-e^{x}|dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}-(1-e^{x})dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}(e^{x}-1)dx$

$I=\left[e^{x}-x\right]_{\ln 2}^{\ln 4}=\left(e^{\ln 4}-\ln 4\right)-\left(e^{\ln 2}-\ln 2\right)$

$I=(4-2\ln 2)-(2-\ln 2)=4-2\ln 2-2+\ln 2=2-\ln 2$

Donc : $A=(2-\ln 2)\times 2cm\times 2cm=4(2-\ln 2)c^{2}m$

Exercice21 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\|=2cm$

Soit f et g deux fonctions tels que:

$f(x)=\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}+e^{-x}$ et $g(x)=e^{-x}$

calculer en cm^{2} S la surface du domaine limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=\ln 2$

Solution : il suffit de calculer :

$I=\int_{1}^{e}|f(x)-g(x)|dx$

$I=\int_{0}^{\ln 2}\left|\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}+e^{-x}-e^{-x}\right|dx=\int_{0}^{\ln 2}\left|\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}\right|dx=\int_{0}^{\ln 2}\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}dx$

Car : $\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}>0$

Donc: $I=\int_{0}^{\ln 2}\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}dx=2\int_{0}^{\ln 2}\frac{(e^{x}+1)'}{e^{x}+1}dx=\left[2\ln|e^{x}+1|\right]_{0}^{\ln 2}$

Donc :

$I=2\ln|e^{\ln 2}+1|-2\ln|e^{0}+1|=2\ln 3-2\ln 2=2\ln\frac{3}{2}$

Donc : $A=2\ln\frac{3}{2}\times 2cm\times 2cm=8\ln\frac{3}{2}c^{2}m$

Exercice22 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\|=0.5cm$ et Soit f définit par : $f(x)=x^{2}-8x+12$

et (D) la tangente à la courbe (C_f) au point $A(3;f(3))$

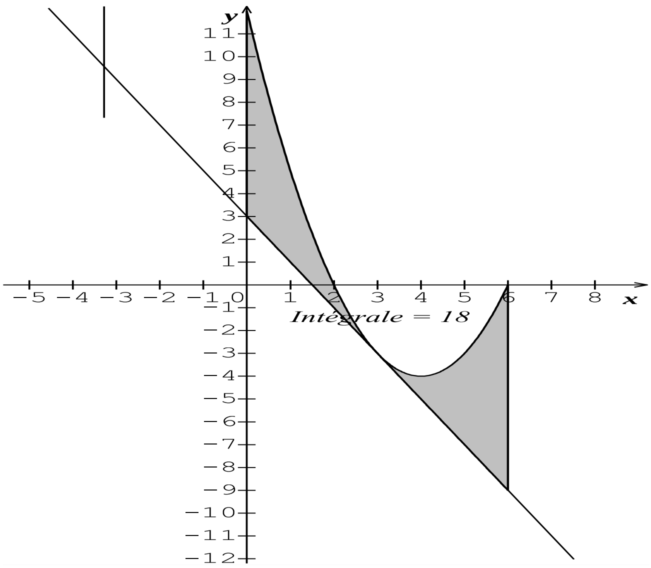
Calculer A la surface du domaine limité par :

(C_f) et les droites : (D) et $x=1$ et $x=e$

Solution : l'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point $A(3;f(3))$ est : $y=f(3)+f'(3)(x-3)$

$f'(x)=2x-8$ et $f'(3)=-2$ et $f(3)=-3$

$(D):y=-2x+3$



il suffit de calculer :

$I=\int_{0}^{6}|f(x)-y|dx=\int_{0}^{6}(x^{2}-6x+9)dx=\int_{0}^{6}(x+3)'(x+3)^{2}dx$

$I=\left[\frac{(x+3)^{3}}{3}\right]_{0}^{6}=18$ donc :

$A=18\times(0.5cm)^{2}=4.5cm^{2}$

Exercice 23: $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\|=1cm$ et Soit f définit par : $f(x)=x-1+\frac{\ln x}{x}$

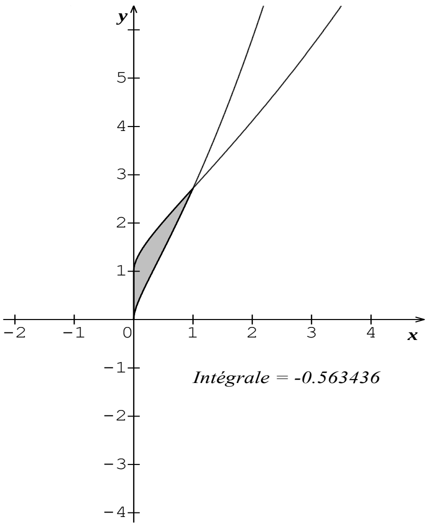
Calculer A la surface du domaine limité par :

C_f et les droites : $y=x-1$ et $x=1$ et $x=e$

Exercice24 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé

Soit f et g deux fonctions tels que: $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ et $g(x)=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ Calculer A la surface du domaine limité par : (C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=1$

Solution :



$S = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ Ua

$S = \int_0^1 \left|e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\right| dx = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \left|1 - \sqrt{x}\right| dx$

On sait que : $0 \le x \le 1$ donc : $0 \le \sqrt{x} \le 1$ donc :

$0 \le 1 - \sqrt{x}$ donc : $S == \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \left(1 - \sqrt{x}\right) dx$

On utilisant deux intégration l'une par changement de variable et l'autre par partie on trouve :

$S == \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \left(1 - \sqrt{x}\right) dx = \left[\left(6\left(\sqrt{x} - 1\right) - 2x\right) e^{\sqrt{x}}\right]_0^1$

$S = 6 - 2e$ Ua

Exercice25 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \dfrac{xe^x + x + 1}{e^x + 1}$

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier qu'elle est strictement croissante.
2) Déterminer la surface S_1 du domaine limité par l'axe (Ox) ; la courbe C_f et les droites: $x = 0$ et $x = 1$.
3) Déterminer la surface S_2 du domaine limité par la droite (Δ) $y = x$; la courbe C_f et les droites: $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice26 : $\left(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

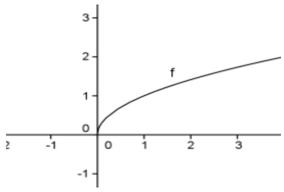
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x}$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$

Solution : La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$ engendre un solide :

$I = \int_0^4 \pi \left(f(x)\right)^2 dx = \int_0^4 \pi \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$

$I = \pi \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$ et on a :



$u.v = \left\|\vec{i}\right\| \left\|\vec{j}\right\| \left\|\vec{k}\right\| = 8cm^3$

Donc le volume est : $V = 8\pi \times 8cm^3 = 64\pi cm^3$

Exercice27 : $\left(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = \dfrac{2}{3}cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \sqrt{x\left(e^x - 1\right)}$ et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[0;1]$

Solution :on calcul : $\int_0^1 x\left(e^x - 1\right) dx$

$I = \int_0^1 \pi \left(f(x)\right)^2 dx = \int_0^1 \pi \left(\sqrt{x\left(e^x - 1\right)}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 x\left(e^x - 1\right) dx$

On utilise une intégration par partie :

On pose : $u'(x) = e^x - 1$ et $v(x) = x$

Donc : $u(x) = e^x - x$ et $v'(x) = 1$

Donc : $\int_0^1 x\left(e^x - 1\right) dx = \left[x\left(e^x - x\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1\left(e^x - x\right) dx$

$\int_0^1 x\left(e^x - 1\right) dx = e - 1 - \left[e^x - \dfrac{x^2}{2}\right]_0^1$

$\int_0^1 x\left(e^x - 1\right) dx = e - 1 - e + \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}$

Donc : $I = \dfrac{1}{2}\pi$ par suite :

$V = \dfrac{1}{2}\pi \times \dfrac{8}{27} c^3m = \dfrac{4\pi}{27} c^3m$

Exercice28: $\left(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{\ln x}$

et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1;e]$

Exercice29: $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définit par :

$f(x) = x\sqrt{1-lnx}$ et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1;e]$

Exercice30: En utilisant les somme de Riemann calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

Solution : Pour cet exemple il faut faire apparaitre les bornes (a et b) puis l'expression de la fonction f:

Si on factorise par n à l'intérieur de la somme on aura :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

et d'après cette expression on conclut que :

$a=0$ et $a=1$ et $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

On aura : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= [ar\tan x]_0^1 = ar\tan 1 - ar\tan 0 = \frac{\pi}{4}$$

Exercice31:

En utilisant les somme de Riemann calculer :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$

Solution : 1)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

De l'expression on peut remarquer que :

$a=1$ et $b=2$ et $f(x)=\frac{1}{x}$ et puisque f est continue sur $[1;2]$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \int_1^2\frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

2) On pose (changement d'indice)

$j = k - n$ on obtient : $\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+2n}$

$(n + k = n + j + n = 2n + j)$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+2n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{j}{n}\right)+2}$$

De l'expression on peut remarquer que :

$a=0$ et $b=1$ et $f(x)=\frac{1}{2+x}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k} = \int_0^1\frac{1}{2+x}dx$

$$= [\ln(2+x)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

De l'expression on peut remarquer que :

$a=1$ et $b=2$ et $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$

Exercices 32 :

1)Calculer les limites des sommes suivantes :

$$S_1=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n\sqrt{4n^2-k^2}} \quad \text{et} \quad S_2=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2+k^2}$$

2) a) Calculer en utilisant une intégration par partie : $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$

b) En déduire la limite de la suite :

$$u_n=\frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}\left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$$

(Introduire ln dans l'expression de u_n)

Exercice33: Déterminer la fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e.

Solution : La fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e est $F(x)=\int_e^x \ln t dt$ On va procéder par une I.P.P

on a $[e;x]$ On pose : $u'(t)=1$ et $v(t)=\ln t$

Donc : $u(t)=t$ et $v'(t)=1/t$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[e;x]$ et u' et v' sont continue sur $[e;x]$

Donc :

$$F(x)=\int_e^x \ln t dt=[t\ln t]_e^x-\int_e^x t\times\frac{1}{t}dt=x\ln x-e-\int_1^e 1dt$$

$$F(x)=x\ln x-e-[t]_e^x=x\ln x-e-x+e=x\ln x-x$$

La fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e est : $F(x)=x\ln x-x$

Exercice34: étudier la dérivabilité de la fonction F définit par : $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} e^{-t^2}dt$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et

calculer $F'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$

Solution :est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$

car $x\to\frac{1}{x}$ et $x\mapsto lnx$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$ et la fonction f: $t\to e^{-t^2}$ est Continue sur $\mathbb{R}$ soit φ une fonction primitive de f.

$$F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} e^{-t^2}dt=\left[\varphi(t)\right]_{\frac{1}{x}}^{\ln x}$$

$\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$ $F'(x)=(\varphi o v)'(x)-(\varphi o u)'(x)$

$=v'(x)\times\varphi'(v(x))-u'(x)\times\varphi'(u(x))$

$=v'(x)\times f(v(x))-u'(x)\times f(u(x))$

$$=(\ln x)'\,e^{-(\ln x)^2}-\left(\frac{1}{x}\right)'e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$F'(x)=\frac{1}{x}e^{-(\ln x)^2}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Exercice35: soit la fonction F définit par :

$$F(x)=\int_0^{x^2+2x}\sqrt{1+t}\,dt \quad \forall x\in[-1;+\infty[$$

1)Étudier la dérivabilité de la fonction F et calculer $F'(x)$ $\forall x\in[-1;+\infty[$

2) calculer $F(x)$ sans intégrale

Solution :

la fonction $x\to\sqrt{1+x}$ est continue sur $[-1;+\infty[$ et la fonction: $v:x\to x^2+2x$ est est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v(\mathbb{R})=[-1;+\infty[$

donc F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$F'(x)=v'(x)f(v(x))=2(x+1)|x+1|$$

2) $F(x)=\int_0^{x^2+2x}\sqrt{1+t}\,dt=\int_0^{x^2+2x}(1+t)'(1+t)^{\frac{1}{2}}dt$

$$=\left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{x^2+2x}=\left[\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t}\right]_0^{x^2+2x}$$

$$F(x)=\frac{2}{3}(x+1)^2|x+1|$$

Exercice36: étudier les variations de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^x e^{t^2}\left(t^2-4\right)dt$

Solution : la fonction: $t\to e^{t^2}\left(t^2-4\right)$ est Continue sur $\mathbb{R}$ donc Fest dérivable sur $\mathbb{R}$

$F'(x)=e^{x^2}\left(x^2-4\right)$ le signe de $F'(x)$est le signe de x^2-4 donc :

a)Sur $[2;+\infty[$ et $]-\infty;-2]$ F est croissante

b)Sur $[-2;2]$ F est décroissante

Exercice37: soit h la fonction définie sur :

$\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $h(x)=(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ si $x\neq 0$

et $h(0)=e^2$

1)Montrer que h est Continue sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et en déduire que :

$H:x\to\int_0^x h(t)dt$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

2)calculer : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt$

Solution :1) $h(x)=(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)}$

$\lim\limits_{x\to 0}h(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)}$

On a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+2x)=\lim\limits_{x\to 0}2\frac{\ln(1+2x)}{2x}=2$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=e^2=h(0)$ donc h est Continue

Et puisque h est la composée de fonction sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ continues

alors h est Continue sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

Donc : $H:x\to\int_0^x h(t)dt$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

2)on a: $H'(x)=h(x)-h(0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt=H'(0)=e^2$

Exercice38: Soit la fonction f définie sur $]1,+\infty[$

par $(\forall t\in]0,+\infty[)$ $(f(t)=e^{\frac{1}{\ln t}}$

1) Etudier les variations de f sur $]1,+\infty[$.
2) Considérons la fonction définie sur $]1,+\infty[$

par : $F(x)=\int_x^{x+1}f(t)\,dt$

a) Montrer que $(\forall x\in]1,+\infty[)$:

$(f(x+1)\leq F(x)\leq f(x))$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

3) a) Montrer que $(\forall t\in]0,+\infty[)(e^t\geq t+1)$

b) En déduire que : $(\forall x>1)$: ln

$F(x)-1\geq\int_x^{x+1}\frac{1}{\ln t}dt$

4)a) Montrer que : $(\forall t\in]0,+\infty[)(\ln t\leq t-1)$

b) En déduire que $(\forall x>1)(F(x)-1\geq\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)$

5) Montrer que F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x>1$
6) Dresser le tableau de variation de la Fonction F
7) Construire la courbe CF.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien