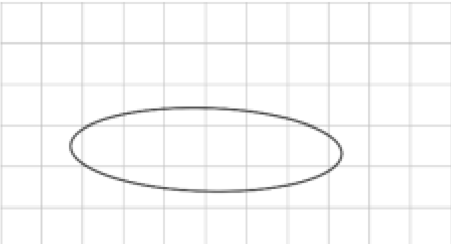
CALCULS INTEGRALES

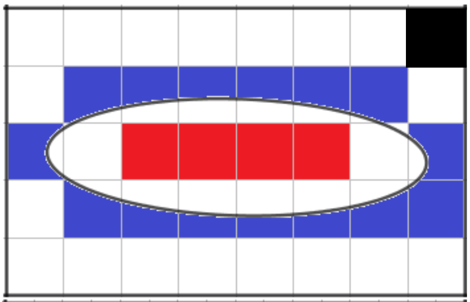
I) INTEGRATION D'UNE FONCTION CONTINUE.

1) Approche :

1.1 Les ensembles quarrable

On veut encadrer la surface S d'une ellipse, pour cela en va utiliser plusieurs niveaux quadrillage :

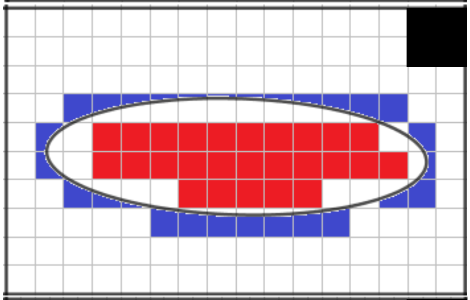




La surface d'un carré $=$ une unité de surface

$4 \leq S \leq 21$

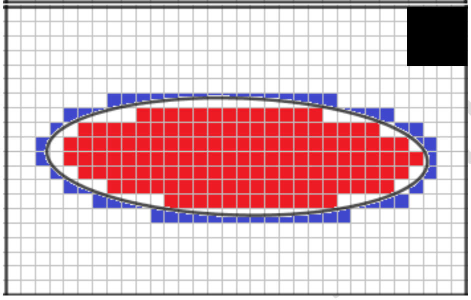
Un encadrement de S d'amplitude $21 - 4 = 17$



La surface d'un carré $= \frac{\text{une unité de surface}}{2^2}$

$\frac{26}{4} \leq S \leq \frac{60}{4}$

Un encadrement de S d'amplitude $\frac{60}{4} - \frac{26}{4} = \frac{17}{2}$



La surface d'un carré $= \frac{\text{une unité de surface}}{2^4}$

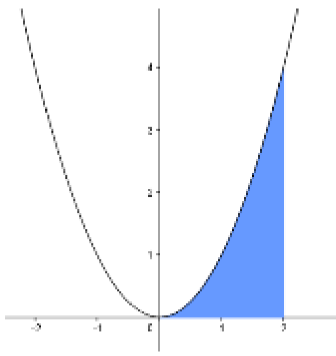
$\frac{138}{16} \leq S \leq \frac{209}{16}$

Un encadrement de S d'amplitude $\frac{209}{16} - \frac{138}{16} = \frac{71}{16}$

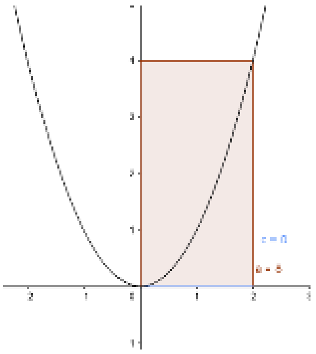
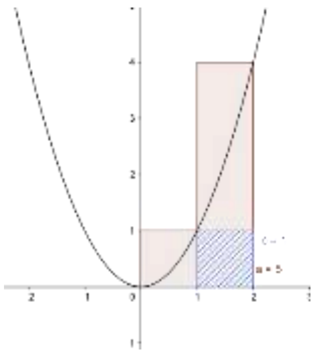
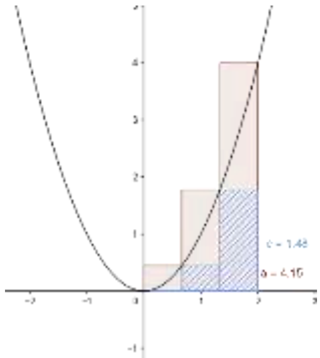
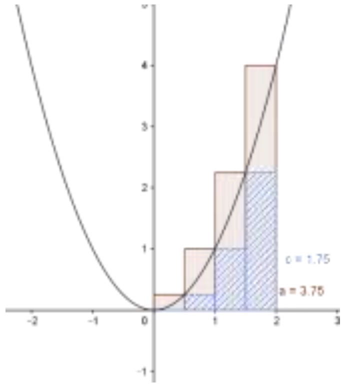
On peut continuer ainsi (tant qu'on a la patience), et à chaque fois on s'approche de la surface S. Théoriquement on obtient la surface S lorsque on divise l'unité de surface par 2^{2n} et on fait tendre n vers l'infinie dans ce cas l'amplitude de l'encadrement tend vers 0.

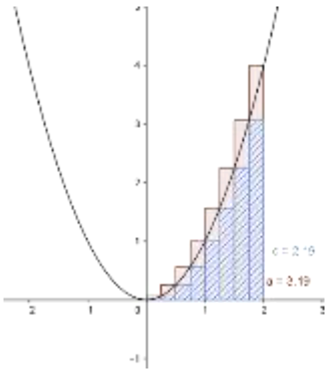
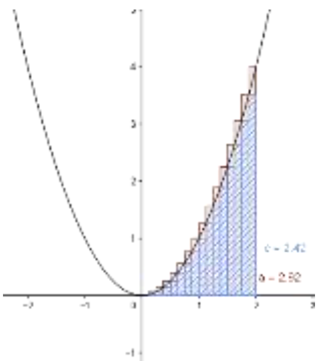
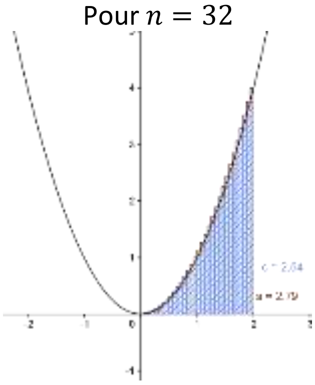
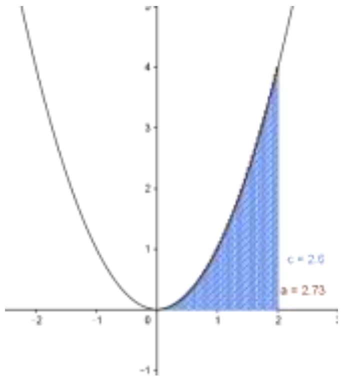
1.2 Calcul d'une aire sous une parabole

On veut encadrer l'aire du domaine (en bleu dans la figure) limité par : l'axe des abscisses les droites $(\Delta_1): x = 0$; $(\Delta_2): x = 2$ et la courbe (C_f) où $f(x) = x^2$. Pour cela on subdivise le segment $[0,2]$ selon des segments de même longueur.



Soient s_n l'aire des rectangles contenus dans le domaine $\mathcal{A}$ et S_n l'aire des rectangles qui contient dans le domaine $\mathcal{A}$

Pour $n = 1$	Pour $n = 2$	Pour $n = 3$	Pour $n = 4$
			
$s_1 = 0 \leq \mathcal{A} \leq S_1 = 8$ Amplitude $\delta_1 = S_1 - s_1 = 8$	$s_2 = 1 \leq \mathcal{A} \leq S_2 = 5$ Amplitude $\delta_2 = S_2 - s_2 = 4$	$s_3 = 1.48 \leq \mathcal{A} \leq S_3 = 4.15$ Amplitude $\delta_3 = S_3 - s_3 = 2.67$	$s_4 = 1.75 \leq \mathcal{A} \leq S_4 = 3.75$ Amplitude $\delta_4 = S_4 - s_4 = 2$

Pour $n = 8$	Pour $n = 16$	Pour $n = 32$	Pour $n = 64$
			
$s_8 = 2.19 \leq \mathcal{A} \leq S_8 = 3.19$ $\delta_8 = S_8 - s_8 = 1$	$s_{16} = 2.42 \leq \mathcal{A} \leq S_{16} = 2.92$ $\delta_{16} = S_{16} - s_{16} = 0.5$	$s_{32} = 2.54 \leq \mathcal{A} \leq S_{32} = 2.79$ $\delta_{32} = S_{32} - s_{32} = 0.27$	$s_{64} = 2.6 \leq \mathcal{A} \leq S_{64} = 2.73$ $\delta_{64} = S_{64} - s_{64} = 0.13$

Théoriquement ; lorsque on prend des valeurs "assez grand " de n la suite s_n tend vers S_n et si on fait tendre n vers l'infini on obtint la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

Activité :

1- Exprimer s_n et S_n en fonction de n.

2- a) Démontrer que pour $n \geq 1$ on a : $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) En déduire les limite de S_n et s_n $(n \to +\infty)$ puis en déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

3- Déterminer une fonction primitive F de la fonction $f(x) = x^2$ puis calculer $F(2) - F(0)$ que remarquez-vous ?

1.3 Intégral et primitive.

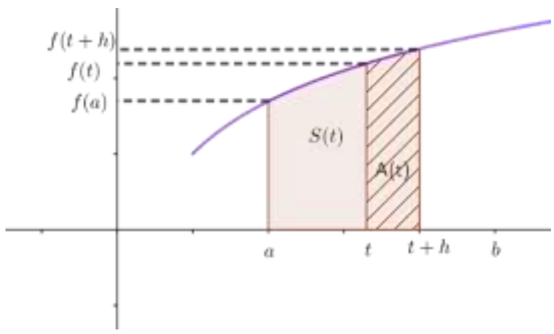
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $t \in [a, b]$, on suppose dans cette étude que f est strictement croissante.

- Considérons $S(t)$ l'aire du domaine défini par :

L'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites $x = a$ et $x = t$

- Considérons $A(t)$ l'aire du domaine défini par :

L'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites $x = t$ et $x = t + h$



On voit bien que $S(a) = 0$ et que $S(b)$ est l'aire du domaine définie par : L'axe des abscisses, la courbe C_f et les droites $x = a$ et $x = b$

On a $A(t) = S(t + h) - S(t)$

D'autre par :

- L'aire du plus grand rectangle contenu dans la surface $A(t)$ est $h \times f(t)$
- L'aire du plus petit rectangle qui contient la surface $A(t)$ est $h \times f(t+h)$

Et de ce fait on a : $h \times f(t) \leq A(t) \leq h \times f(t+h)$

D'où :

$$f(t) \leq \frac{A(t)}{h} \leq f(t+h) \text{ ce qui est équivalent à : } f(t) \leq \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \leq f(t+h)$$

Et comme f est continue sur $[a,b]$ alors :$\lim\limits_{h\to 0} f(t+h) = f(t)$

Donc :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(t+h)-S(t)}{h} = f(t)$$

De même on montre que :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(t+h)-S(t)}{h} = f(t)$$

Et finalement on peut conclure que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(t+h)-S(t)}{h} = f(t)$$

Et cela signifie que la fonction $t \mapsto S(t)$ est dérivable sur $[a,b]$ et que $(\forall t \in [a,b])(S'(t) = f(t))$

Donc S est une fonction primitive de f sur l'intervalle $[a,b]$.

2) Définition et interprétation géométrique.

2.1 Définition

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I ; et F une fonction primitive de f sur I. Le nombre $\boldsymbol{F(b)-F(a)}$ s'appelle **l'intégrale de la fonction $\boldsymbol{f}$ entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$** on écrit :

$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$ on lit **somme $\boldsymbol{f(t)\ d(t)}$ de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$**

Le réel a s'appelle la borne inférieure de l'intégrale et le réel b s'appelle la borne supérieure de l'intégrale.

Remarque :

❶Dans l'écriture : $\int_a^b f(t)\,dt$ la variable t s'appelle une variable **muette,** on peut le changer par n'importe qu'elle variable tant qu'elle ne figure pas dans l'une des deux bornes.

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx = \cdots = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

❷ Si F_1 et F_2 sont deux fonctions primitive de f sur I alors :$(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + C\ )\ (C\ constante\ )$

Et on aura : $F_2(b) - F_2(a) = (F_1(b) + C) - (F_1(a) - C) = F_1(b) - F_1(a)$ donc pour le calcul d'une intégrale, on prend $C = 0$.

Propriété :

Toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$ c'est-à-dire $\int_a^b f(t)\,dt$ existe et finie.

2.2 L'interprétation géométrique de l'intégrale.

Propriété :

Soit f une fonction continue, strictement monotone et positive sur $[a,b]$ et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonale $(O,\vec{i},\vec{j}\,)$. L'aire du domaine limité par : L'axe des abscisses, la courbe C_f et les droite $x = a$ et $x = b$ est $\mathcal{A} = \int_a^b f(t)\,dt\ \ (u.m.s)$

$(u.m.s)$ unité de mesure des surface égale à $||\vec{i}|| \times ||\vec{j}||$

3) Règles de calculs

Propriété :

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c trois éléments de I et α un réel, on a :

- $\int_a^a f(t)\,dt = 0$
- $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$
- $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$
- $\int_a^b \alpha f(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt$
- $\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$ (Relation de Chasles)

Preuve : (En exercice)

Généralisation :

- Soient $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de fonctions contenues sur $[a,b]$ on a :

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(t)dt\right) = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(t)\,dt$$

- Soit f une fonction continue sur les intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ $k \in \{1,2,\ldots.,n\}$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_n} f(x)\,dx$$

II) TECHNIQUES DE CALCULS D'UNE INTEGRALE.

1) L'utilisation directe des fonctions primitives :

1.1 Rappelle

Tableau des fonctions primitives usuelles

La fonction	Sa fonction primitive	Intervalles
$\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + c$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$	$\mathbb{R}^+$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^+$
$x^r \quad (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$	$\mathbb{R}^{*+}$
$sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}cos(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}sin(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times arctan(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$ln(x)$	$]0, \infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions primitives.

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u'u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u\prime}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + C^{te}$
$\frac{u\prime}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u'\sqrt[n]{u} \ \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1} \ \sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$
$u'u^r \ (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v'ou$	$vou + C^{te}$
$\frac{u\prime}{u^2+1}$	$arctan(u) + C$
$\frac{u\prime}{u}$	$ln(\|u\|)$
$u'e^u$	e^u

1.2 Applications :

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-1}^{1} 3x(2x^2+3)^3\,dx$ $\qquad I_2 = \int_{1}^{e} \frac{1}{xln^4(x)}\,dx$ $\qquad I_3 = \int_{0}^{1} x^2\sqrt[3]{x}\,dx$

$I_4 = \int_{-1}^{1} |3x^2 - x|\,dx$ $\qquad I_5 = \int_{-1}^{1} x\sqrt[3]{x+1}\,dx$ $\qquad I_6 = \int_{0}^{1} \frac{x^3+3}{x+1}\,dx$

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes :

$J_1 = \int_{1}^{ln2} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ $\qquad J_2 = \int_{1}^{ln2} \frac{1}{1+e^x}\,dx$ $\qquad J_3 = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (tanx)^4\,dx$

$J_4 = \int_{0}^{1} x\sqrt[3]{2x+1}\,dx$ $\qquad J_5 = \int_{1}^{ln2} \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}}\,dx$

Exercice 3 :

Considérons les intégrales suivantes : $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (cos^4 x)dx$; $J = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (sin^4 x)dx$ et $K = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (cos^2 x \ sin^2 x)dx$

1- Calculer $I - J$; $I + J + 2K$ et $I + J - 2K$

2- En déduire les valeurs de I, J et K.

2) Intégration par partie :

Introduction :

Considérons l'intégrale $I = \int_{1}^{e} x\,ln(x)\ dx$; on ne peut pas trouver une fonction primitive usuelle de la fonction $x \mapsto x\,ln(x)$ donc on ne peut pas calculer I en se basant directement sur le tableau des fonctions usuelles.

Preuve : (d'une propriété)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continue sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I.

On sait que $(\forall x \in I)(\,(u\,.\,v)'(x) = u'(x).v(x) + v'(x).u(x)$

Par suite : $(\forall x \in I)(u'(x).v(x) = \ (u\,.\,v)'(x) - v'(x).u(x)$

En passant à l'intégrale :

$$\int_a^b u'(x).v(x)\,dx = \int_a^b (u\,.v)'(x)\,dx - \int_a^b v'(x).u(x)$$

Or $u.v$ est une fonction primitive de $(u.v)'$ donc :

$$\int_a^b u'(x).v(x)\,dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x).u(x)$$

Cette égalité porte le nom d'une **intégration par partie**

Propriété :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continue sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I on a :

$$\int_a^b u'(x).v(x)\,dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x).u(x)$$

Exemple :

On se propose de calculer $I = \int_1^e x\,ln(x)\ dx$

On pose $\begin{cases} v(x) = \ln(x) \\ u'(x) = x \end{cases}$ donc $\begin{cases} v'(x) = \frac{1}{x} \\ u(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$$I = \int_1^e x\,ln(x)\ dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \times ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2.\frac{1}{x}\right)\,dx$$

$$I = \int_1^e x\,ln(x)\ dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}[x^2]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{e^2+1}{4}$$

Remarque :

Pour le choix des fonctions on utilise $A.L.P.E.T$

A: Arctangente L: logarithme P: polynôme E: exponentielle T: fonctions trigonométrique

Exercice :

En utilisant une intégration par partie calculer :

① $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{e^x}\ dx$ ② $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2 sinx)dx$ ③$I_3 = \int_1^e (xlnx)dx$ ④ $\int_0^1 xArctanx\,dx$

⑤$I_5 = \int_1^e \cos(lnx)\,dx$

3) Intégration par changement de variable :

Propriété :

Soient g une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que g' continue sur $[a,b]$ et f une fonction continue sur $g([a,b])$ on a :

$$\int_a^b (fog)(t).g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

Cette propriété s'appelle **propriété du changement de variable.**

Preuve :

Soit F une fonction primitive de la fonction f sur $g([a,b])$ on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b (fog)(t).g'(t)dt &= \int_a^b (F'og)(t)g'(t)dt \\ &= \int_a^b (Fog)'(t)\,dt \\ &= [(Fog)(t)]_a^b \\ &= F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) \\ &= [F(x)]_{g(a)}^{g(b)}\end{aligned}$$

$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$

Exemples.

❶Calculer : $I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$ poser : $x = \sqrt{t}$

On a : $x = \sqrt{t}$ donc $\begin{cases} t = 1 \Rightarrow x = 1 \\ t = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \end{cases}$ et $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$ on en déduit que : $dt = 2x\,dx$

Donc : $I_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x\,dx}{(1+x^2)x} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2}\,dx = [2Arctanx]_1^{\sqrt{3}} = 2Arctan(\sqrt{3}) - 2Arctan(1) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

❷ Calculer : $I_2 = \int_0^{ln2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ poser : $t = e^x$

On a : $t = e^x$ donc $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = ln2 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$ et $dt = e^x\,dx$ on en déduit que : $dx = \frac{dt}{t}$

$$\begin{aligned} I_2 = \int_0^{ln2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}\,dx &= \int_1^2 \frac{t^3+t^2+3t}{1+t^2} \times \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^2 \frac{t^2+t+3}{1+t^2}\,dt \\ &= \int_1^2 \left(t + \frac{3}{1+t^2}\right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 + 3Arctant\right]_1^2 \end{aligned}$$ (Continuer les calculs)

Exercice :

En utilisant les changements de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ poser : $t = \sqrt{x}$

$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$ poser : $t = 2 + \sqrt{x}$

$I_3 = \int_{-1}^{-2} \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}\,dx$ poser : $t = \frac{1}{x}$

$I_4 = \int_4^5 \sqrt{x^3 - 12x - 16}\,dx$ poser : $t = \sqrt{x-4}$

$I_5 = \int_0^{ln2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ poser : $t = e^x$

$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sinx}{sin^2x+2cos^2x}\,dx$ poser : $t = cosx$

$I_7 = \int_0^1 Arctan\sqrt[3]{x}\,dx$ poser : $t = \sqrt[3]{x}$

$I_8 = \int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{x^2 lnx\,dx}{(1+x^3)^3}$ poser : $t = 1 + x^3$

III) ORDRE ET INTEGRATION

Propriété :

> Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tels que : $a < b$. Si f est positive sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx$ est positif

Preuve :

Soit F une fonction primitive de la fonction f sur I. on a : $\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Et comme $f(x) = F'(x)$ est positive alors F est croissante et par suite $(a < b)$ $F(b) - F(a) \geq 0$

Corollaire :

> Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tels que : $a < b$.
> Si $f \geq g$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Preuve :

On pose $h(x) = f(x) - g(x)$ et on applique la propriété précédente

Exercice :

On pose $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3}\,dx$ Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$; $I_n = \int_0^1 x^n\,\sqrt{3+x}\,dx$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat, montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ on a : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Preuve :

On a $(\forall x \in [a,b])(-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|)$ on passant à l'intégrale on en déduit :

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Et par suite :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Exercice :

On définie la suite (u_n) par : $(\forall n \in \mathbb{N})\left(u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,dx\right)$

1- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [0,1])\ \left(\frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}\right)$

2- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{e^n}\right)$

IV) DERIVATION DE $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

1) La fonction primitive d'une fonction continue sur I et qui s'annule en a

Considérons une fonction f continue sur I et $a \in I$. Soit F la fonction primitive de f sur I et qui s'annule en a on a :

$(\forall t \in I)(F'(t) = f(t))$ et par suite $\int_a^x F'(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$ et par suite :

$\int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a) = F(x) \quad (F(a) = 0)$

Propriété :

Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$; la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la fonction primitive de la fonction f qui s'annule en a.

La fonction F est dérivable sur I et $(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$

Exemple :

On veut déterminer la fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e.

La fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e est $F(x) = \int_e^x lnt\,dt$

On va procéder par une I.P.P

$$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = lnt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_e^x lnt\,dt &= [tlnt]_e^x - \int_e^x t \times \frac{1}{t}\,dt \\ &= xlnx - x - [t]_e^x \\ &= x\,lnx - x - x + e \\ &= x\,lx - 2x + e \end{aligned}$$

La fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e est $F(x) = x\,lx - 2x + e$

Dérivée de la fonction $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

Preuve : d'une propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle J, u et v deux fonctions définie, dérivable sur I telles que $u(I)\subset J$ et $v(I)\subset J$. On définit sur I la fonction : $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$; Montrons que F est dérivable sur I et déterminons sa fonction dérivée.

Soit φ une fonction primitive de f sur J on a : φ est dérivable sur J et $(\forall x\in J)(\varphi'(x)=f(x))$. d'autre part :

$$\begin{aligned} F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt &= [\varphi(t)]_{u(x)}^{v(x)} \\ &= \varphi(v(x))-\varphi(u(x)) \\ &= (\varphi o v)(x)-(\varphi o u)(x) \end{aligned}$$

La fonction $(\varphi o v)$ et $(\varphi o u)$ sont dérivables sur I car φ est dérivable sur J et u et v sont dérivable sur I et $u(I)\subset J$ et $v(I)\subset J$ et :

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\varphi o v)'(x)-(\varphi o u)'(x) \\ &= v'(x)\times\varphi'(v(x))-u'(x)\times\varphi'(u(x)) \\ &= v'(x)\times f(v(x))-u'(x)\times f(u(x)) \end{aligned}$$

Propriété :

> Soit f une fonction continue sur un intervalle J, u et v deux fonctions définie, dérivable sur I telles que $u(I)\subset J$ et $v(I)\subset J$. La fonction $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable sur I et :
>
> $$(\forall x\in I)(F'(x)=v'(x)\times f(v(x))-u'(x)\times f(u(x))$$

Exemple :

$F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{lnx} e^{-t^2}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ car $x\mapsto\frac{1}{x}$ et $x\mapsto lnx$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$ et la fonction $f: t\mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ soit φ une fonction primitive de f.

On a: $$\begin{aligned}(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})(F(x) &= [\varphi(t)]_{\frac{1}{x}}^{lnx}\,) \\ &= \varphi(lnx)-\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})(F'(x) &= (ln'(x)\varphi'(lnx)-\left(\frac{1}{x}\right)'\varphi'\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \varphi'=f \\ &= \frac{1}{x}\,e^{-ln^2x}+\frac{1}{x^2}e^{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}\end{aligned}$$

Exercice :

Soit la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $(\forall t\in]0,+\infty[)\ \left(f(t)=e^{\frac{1}{lnt}}\right)$

1- Etudier les variations de f sur $]1,+\infty[$.

2- Considérons la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $F(x)=\int_x^{x+1} f(t)$.

 a) Montrer que $(\forall x\in]1,+\infty[)(f(x+1)\le F(x)\le f(x))$

 b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

3- a) Montrer que $(\forall t\in]0,+\infty[)(e^t\ge t+1)$

 b) En déduire que : $(\forall x>1)(F(x)-1\ge\int_x^{x+1}\frac{1}{lnt}dt$

4- a) Montrer que : $(\forall t\in]0,+\infty[)(lnt\le t-1)$

 b) En déduire que $(\forall x>1)(F(x)-1\ge ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

 c) En déduire $\lim\limits_{x\to1^+} F(x)$

5- Montrer que F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x>1$

6- Dresser la tableau de variation de la fonction F

7- Construire la courbe C_F.

V) LA VALEUR MOYENNE ET THEOREME DE LA MEDIANE

Théorème et définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.
Il existe au moins un élément c de $]a,b[$ tel que : $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$
Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ s'appelle **la valeur moyenne de la fonction f entre a et b.**

Preuve :
On a : f est continue sur $[a,b]$ donc $\exists(m,M)\in\mathbb{R}^2$ tels que $m\leq f(x)\leq M$ en passant à l'intégrale :

$$\int_a^b m\,dt \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dt$$

d'où :

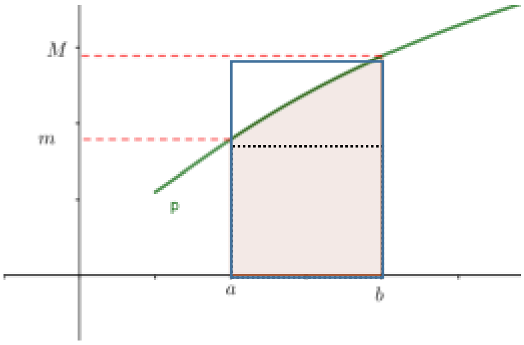
$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Finalement :

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

Donc et d'après le T.V.I Il existe au moins un élément c de $]a,b[$ tel que : $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Interprétation géométrique :
Si f est positive alors : $(b-a)f(c)=\int_a^b f(x)dx$ qui est la surface (en rose dans la figure) du domaine limité par : $x=a$; $x=b$; (Ox) et C_f
est **contenue** dans le rectangle de dimension M et $(b-a)$ et **contient** le rectangle de dimension m et $(b-a)$.



Exercice :
Considérons la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(0)=0$ et $(\forall x>0)\left(F(x)=\int_x^{4x}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt\right.$

1- a) Montrer que $(\forall x>0)(\exists c\in]x,4x[)\ \left(F(x)=3x\ \frac{e^{-c}}{\sqrt{c}}\right)$
   b) En déduire que : $(\forall x>0)\ \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\,e^{-4x}\leq F(x)\leq 3\sqrt{x}\,e^{-x}\right)$
   c) Calculer les limites $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim_{x\to0^+}F(x)$
   d) Calculer : $\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{x}$.que pouvez-vous en déduire ?
2- a) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$
   b) Dresser la tableau de variation de F.
   c) Construire la courbe C_F

VI) SOMMES DE RIEMANN

Théorème définition :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
On pose : $s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$ et $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$
Les sommes s_n et S_n s'appelle **les somme de Riemann.**
Les suites $(s_n)_n$ et $(S_n)_n$ sont convergentes et :

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

Preuve :

On suppose que f est positive.

On pose : $\begin{cases} x_0 = a \text{ et } x_n = b \\ x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \end{cases}$

On a :

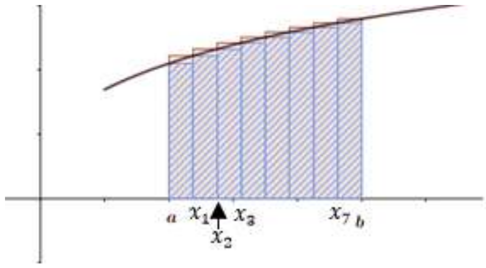
$$x_1 - x_0 = \frac{b-a}{n}$$
$$x_2 - x_3 = \frac{b-a}{n}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

En faisant la somme

$$x_k - x_0 = k\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Or $x_0 = a$

Donc : $x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$



Dans la figure ci-dessus :
$s_8 = \frac{b-a}{8}\sum_{k=0}^{7} f\left(a+\frac{k}{8}(b-a)\right)$
$S_8 = \frac{b-a}{8}\sum_{k=1}^{8} f\left(a+\frac{k}{8}(b-a)\right)$

- s_n est la somme des rectangles **contenus** le domaine $(\mathcal{D})$ la largeur de chaque rectangle est $\left(\frac{b-a}{n}\right)$ et sa longueur est $f(x_k) = f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$ où $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$

  L'air de chaque rectangle est $a_k = \left(\frac{b-a}{n}\right) f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$donc :

  $$s_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}\right) f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$$

- S_n est la somme des rectangles **qui contient** le domaine $(\mathcal{D})$ la largeur de chaque rectangle est $\left(\frac{b-a}{n}\right)$ et sa longueur est $f(x_k) = f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$ où $k \in \{1,2,\dots,n\}$

  L'air de chaque rectangle est $\mathcal{A}_k = \left(\frac{b-a}{n}\right) f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$donc donc :

  $$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$$

On a $S_n - s_n = \left(\frac{b-a}{n}\right)(f(x_n) - f(x_0))$ (Tous les termes vont se simplifier sauf le premier et le dernier)

Or $x_n = b$ et $x_0 = a$: donc : $S_n - s_n = \left(\frac{b-a}{n}\right)(f(b) - f(a))$

Donc $\lim_{n\to+\infty}(S_n - s_n) = 0$ donc : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} s_n$

Finalement et puisque : l'aire du domaine $(\mathcal{D})$ est $\int_a^b f(x)dx$ (f positive)

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple :

1- En utilisant les somme de Riemann calculons :

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

Pour cet exemple il faut faire apparaitre les bornes (a et b) puis l'expression de la fonction f:
Si on factorise par n à l'intérieur de la somme on aura :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)$$

et d'après cette expression on conclut que : $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ f(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$

On aura : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= [Arctanx]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Exemple 2 :

Calculons : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+n}$

On pose (changement d'indice) $j = k - n$ on obtient : $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+2n}$ $\quad (n + k = n + j + n = 2n + j)$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+2n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{j}{n}\right)+2}$$

de l'expression on peut remarquer que : $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2+x} \end{cases}$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2+x}dx$$

$$= [ln(2+x)]_0^1 = ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Remarque : Dans le calcul de la $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{j}{n}\right)+2}$ est aussi somme de Riemann de la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[2,3]$ car : $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{j}{n}\right)+2} = \frac{3-2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\left(j\frac{(3-2)}{n}\right)}$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3-2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\left(j\frac{(3-2)}{n}\right)} = \int_2^3 \frac{1}{x}dx = ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Exercices :

❶Calculer les limites des sommes suivantes :

$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n\sqrt{4n^2-k^2}}$

$S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2}$

❷

1- Calculer en utilisant un intégration par partie :$\int_0^1 ln(1+x^2)dx$

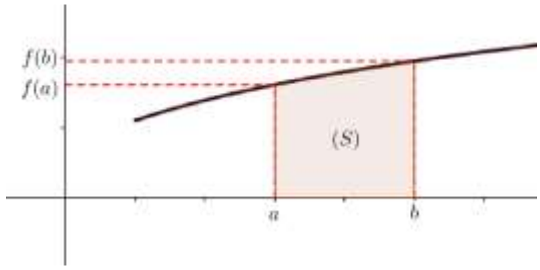
2-En déduire la limite de la suite : $u_n = \frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$ (Introduire ln dans l'expression de u_n)

VII) INTEGRALE ET SURFACE.

Dans tout ce qui va suivre : C_f est la courbe représentative de la fonction f sur $[a,b]$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$; S est la surface du domaine limité par :C_f , l'axe des abscisses et les droites : $x = a$ et $x = b$ et $u^2 = \|\vec{\imath}\|\|\vec{\jmath}\|$

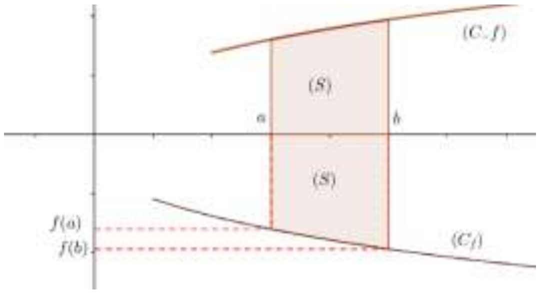
Rappel :

Si f est continue positive sur $[a,b]$ alors $S = \int_a^b f(x)dx \;\; u^2$



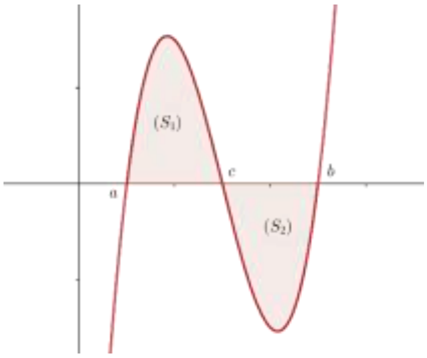
Propriété :

Si f est continue **négative** sur $[a, b]$ alors $S = \int_a^b -f(x)dx \quad u^2$



Propriété :

Si f est continue sur $[a, b]$ alors $S = \int_a^b |f(x)| \; dx \;\; u^2$

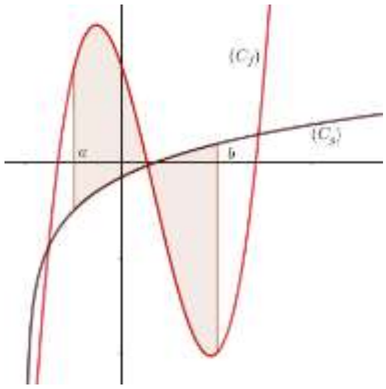


Preuve :

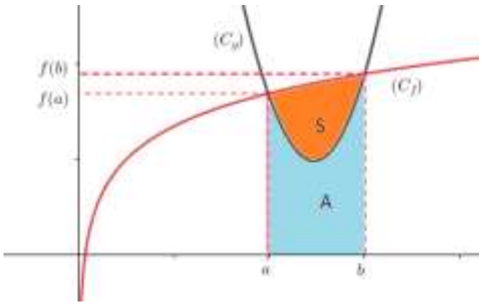
Il suffit de déterminer les racines de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ et d'appliquer les deux propriétés précédentes et la relation de Chasles.

Propriété :

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et soit S la surface du domaine limité par C_f ; C_g et les droites $x = a$; $x = b$ on a :
$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$



Preuve :



Il suffit d'étudier les cas :
Par exemple si $f \geq 0$ et $g \geq 0$ et $f \geq g$ sur $[a, b]$
On aura :
$S = \int_a^b f(t)dt - A = \int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt$
Et de la même façon on étudie les autres cas.

Exercice :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{xe^x + x + 1}{e^x + 1}$

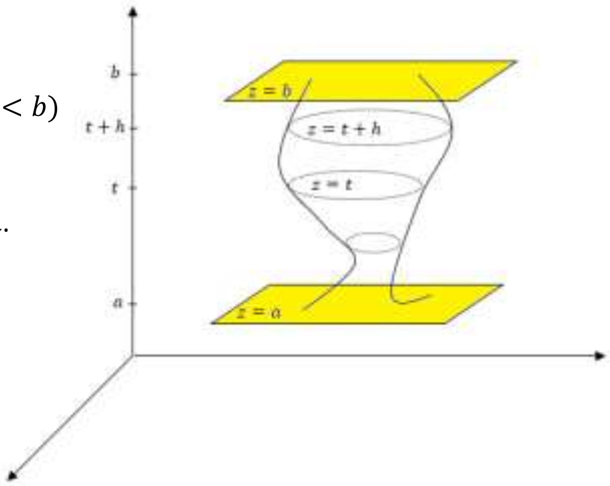
1- Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier qu'elle est strictement croissante.

2- Déterminer la surface S_1 du domaine limité par l'axe (Ox) ; la courbe C_f et les droite $x = 0$ et $x = 1$.

3- Déterminer la surface S_2 du domaine limité par la droite (Δ) $y = x$; la courbe C_f et les droite $x = 0$ et $x = 1$.

VIII) INTEGRALE ET CALCUL DES VOLUMES

1) Volume d'un solide



L'espace est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$
On considère un solide $\mathcal{S}$ compris entre les plan $z=a$ et $z=b$ $(a<b)$
Soit t un élément de $[a,b]$ et $h>0$ tel que $t+h\in[a,b]$
Soit $S(t)$ la surface de l'intersection du solide $\mathcal{S}$ et du plan $z=t$.
$v(t)$ le volume du solide compris entre les plans $z=t$ et $z=t+h$.
$V(t)$ le volume du solide compris entre les plans $z=a$ et $z=t$.
Remarquez que $V(t+h)-V(t)=v(t)$
D'autre part : (pour $h>0$)

$$h\times S(t)\leq v(t)\leq h\times S(t+h)$$

Donc :

$$S(t)\leq\frac{v(t)}{h}\leq S(t+h)$$

Et donc :

$$S(t)\leq\frac{V(t+h)-V(t)}{h}\leq S(t+h)$$

Et comme la fonction $t\mapsto S(t)$ et continue sur $[a,b]$ alors : $\lim\limits_{h\to0^+}S(t+h)=S(t)$ On aura donc :

$$\lim_{h\to0^+}\frac{V(t+h)-V(t)}{h}=S(t)$$

De la même façon on montre que : $\lim\limits_{h\to0^-}\frac{V(t+h)-V(t)}{h}=S(t)$

Donc :

$\lim\limits_{h\to0}\frac{V(t+h)-V(t)}{h}=S(t)$ et donc $t\mapsto V(t)$ est dérivable sur $[a,b]$ et $(\forall t\in[a,b])(V'(t)=S(t))$ et par suite :

$$\int_a^b V'(t)dt=\int_a^b S(t)dt$$

Ce qui signifie que :

$$\int_a^b S(t)dt=[V(t)]_a^b=V(b)-V(a)$$

Et comme $V(a)=0$ et $V(b)=V_{\mathcal{S}}$ le volume du solide, alors :

$$V_{\mathcal{S}}=\int_a^b S(t)dt$$

Propriété :

Soit $\mathcal{S}$ un solide compris entre les plans $Z=a$ et $z=b$ e volume par unité de volume du solide $\mathcal{S}$ est

$$V_{\mathcal{S}}=\int_a^b S(t)dt$$

Où $S(t)$ est la surface de l'intersection du solide $\mathcal{S}$ et du plan $z=t$

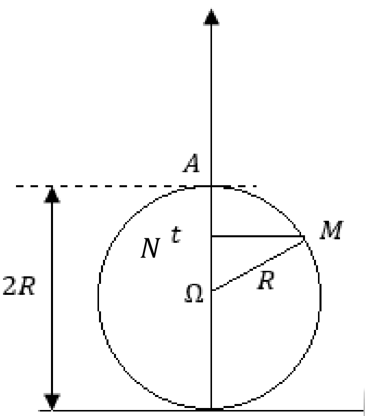
Applications

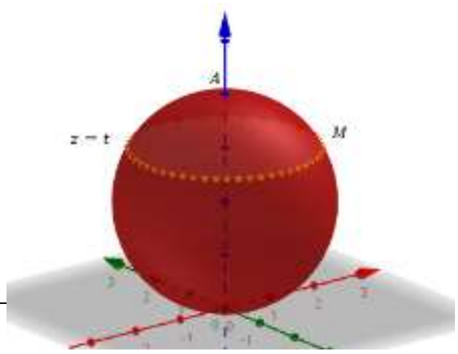
❶ Volume d'une sphère :

Soit S la sphère de centre Ω et de rayon R
Après découpage de la sphère (suivant le plan $x=0$)
on obtient la figure suivante :
Le plan $z=t$ coupe la sphère suivant un cercle de rayon r
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ΩMN on a :

$MN^2=R^2-\Omega N^2$ donc $r^2=R^2-(t-R)^2$
$=2tR-t^2$

D'où $s(t)=\pi r^2=2\pi tR-\pi t^2$
et le volume de la sphère S est :





$$
\begin{aligned}
V = \int_0^{2R} s(t)dt = \int_0^{2R}(2\pi tR - \pi t^2)dt \\
&= \left[\pi t^2 R - \frac{1}{3}\pi t^3\right]_0^{2R} \\
&= \frac{4}{3}\pi R^2
\end{aligned}
$$

Remarque :

On pouvait prendre $\Omega = O$ le centre du repère et le volume de la sphère sera : $V = \int_{-R}^{R} s(t)dt = \int_{-R}^{R}(R^2 - t^2)dt$ et on trouvera le même résultat.

❷ Volume d'un cône

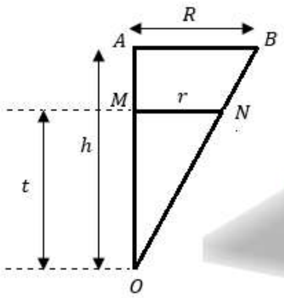
Soit $(\mathcal{C})$ le cône de rayon R et de hauteur h

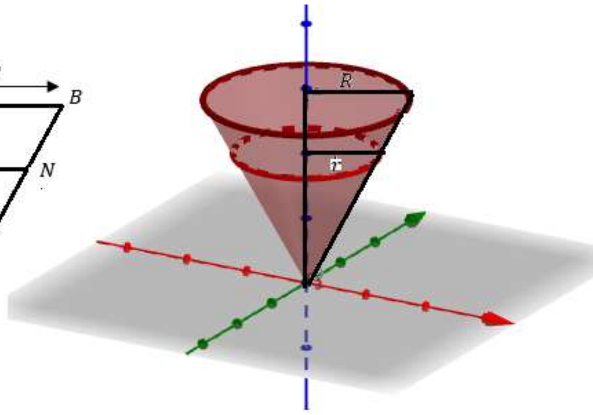
$z = t$ coupe le cône $(\mathcal{C})$ suivant un cercle $\Gamma(t)$ de rayon r

1- En utilisant le théorème de Thalès, déterminer r en fonction de h, R et t

2- Déterminer la surface $S(t)$ de $\Gamma(t)$

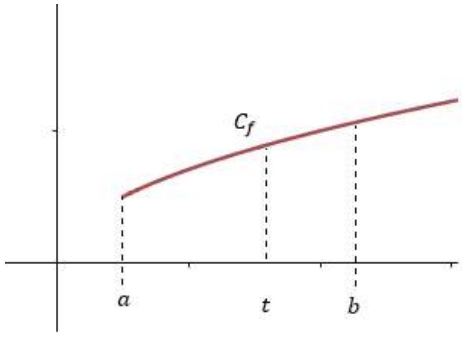
3- Calculer le volume du cône $(\mathcal{C})$

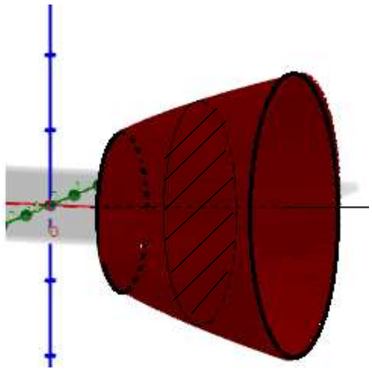




2) Volume d'un solide engendré par la rotation d'une courbe

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$
La rotation de la courbe C_f engendre un solide $(\mathcal{S})$.
Le plan $x = t$ coupe le solide $(\mathcal{S})$ suivant un cercle de rayon $f(t)$ donc
$s(t) = \pi(f(t))^2$
Et le volume du solide $(\mathcal{S})$ est
$V = \int_a^b \pi(f(t))^2 \ dt$





Propriété :

> Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
> La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses engendre un solide de volume (par unité de volume)
> $V = \int_a^b \pi(f(t))^2 \ dt$

Exemple :

$f(x) = \sqrt{x}$

La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 1$ et $b = 3$ engendre un solide de volume (par unité de volume)

$$
\begin{aligned}
V = \int_1^3 \pi\left(\sqrt{t}\right)^2 \ dt = \int_1^3 \pi t \, dt \\
&= \frac{1}{2}[\pi t^2]_1^3 \\
&= 4\pi \, u^3 \qquad (u^3 \text{ unité de volume})
\end{aligned}
$$