

Etude d'une primitive

1

Déterminer le domaine de F dans chacun des cas suivants

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{t-1} dt \quad ; \quad F(x) = \int_0^{\ln x} \frac{1}{t-1} dt \quad ; \quad F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{\ln t} dt \quad ; \quad F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-4} dt$$

2

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{1}{1+t^3} dt \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1} dt \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1} dt$$

3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \int_x^{4x} \frac{t}{\ln(t-1)} dt$

1) montrer que f est définie sur $D = [2, +\infty[$

2) montrer que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$

4

Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt$

1) a) déterminer le signe de $F(x)$

b) montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ puis étudier le sens de variation de F

2) a) montrer que $(\forall t \in \mathbb{R}^+) \quad 2\sqrt{t} \leq t+1$

b) calculer $\int_0^x (t+1) e^{-t} dt$ puis déduire que $(\forall x > 0) \quad F(x) \leq 1$

5

Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt & ; \quad x \neq 0 \\ F(0) = 0 & \end{cases}$

1) a) montrer que $(\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}[) \quad 0 \leq F(x) \leq \ln 2 \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$

b) en déduire que F est continue à droite de 0

2) montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$

3) F est-elle dérivable à droite de 0 ?

Etude d'une primitive

6

On considère la fonction G définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} G(x) = \int_x^{2x} \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt & ; \quad x \neq 0 \\ G(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) étudier la parité de la fonction G
- 2) a) montrer que $(\forall x > 0) (\ln 2) \ln(1+x^2) \leq G(x) \leq (\ln 2) \ln(1+4x^2)$
b) étudier la dérivable de G à droite de 0
- 3) étudier la branche infinie de la courbe de G au voisinage de $+\infty$
- 4) a) montrer que G est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $G'(x)$
b) étudier les variation de G et dresser sa table de variation
- 5) tracer la courbe de la fonction G

7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$

- 1) montrer que le domaine de f est $D_f = \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$
- 2) a) montrer que $(\forall x \in D_f) \frac{x}{\ln 2x} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln x}$
b) en déduire les limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 3) on pose $g(x) = 2 - 2x + \ln x$; $x > 0$
 - a) étudier le sens de variation de la fonction g sur $]0, +\infty[$
 - b) en déduire que : $\left(\exists! \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\right) g(\alpha) = 0$
 - c) prouver que $\forall t \in [\alpha, 1] : \ln t \geq 2t - 2$ en déduire que $\left(\forall x \in \left[\alpha, \frac{1}{2}\right] \right) f(x) \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}$
 - d) déterminer $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$
 - e) montrer que $(\forall t \geq 1) \ln t < t - 1$ puis déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$