

## Etude d'une primitive

1 Déterminer le domaine de  $F$  dans chacun des cas suivants

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{t-1} dt \quad , \quad F(x) = \int_0^{\ln x} \frac{1}{t-1} dt \quad , \quad F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{\ln t} dt \quad , \quad F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t-4} dt$$

2 Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{1}{1+t^3} dt \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1} dt \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1} dt$$

3 On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \int_x^{4x} \frac{t}{\ln(t-1)} dt$

- 1) montrer que  $f$  est définie sur  $D = ]2, +\infty[$
- 2) montrer que  $f$  est dérivable sur  $D$  et calculer  $f'(x)$

4 Soit  $F$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $F(x) = \int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt$

- 1) a) déterminer le signe de  $F(x)$   
b) montrer que  $F$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et calculer  $F'(x)$  puis étudier le sens de variation de  $F$
- 2) a) montrer que  $(\forall t \in \mathbb{R}^+) \quad 2\sqrt{t} \leq t + 1$   
b) calculer  $\int_0^x (t+1)e^{-t} dt$  puis déduire que  $(\forall x > 0) \quad F(x) \leq 1$

5 Soit  $F$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt & ; \quad x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) a) montrer que  $\left( \forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[ \right) \quad 0 \leq F(x) \leq \ln 2 \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$   
b) en déduire que  $F$  est continue à droite de 0
- 2) montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et calculer  $F'(x)$
- 3)  $F$  est-elle dérivable à droite de 0 ?

## Etude d'une primitive

6

On considère la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} G(x) = \int_x^{2x} \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt & ; \quad x \neq 0 \\ G(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) étudier la parité de la fonction  $G$
- 2) a) montrer que  $(\forall x > 0) (\ln 2) \ln(1+x^2) \leq G(x) \leq (\ln 2) \ln(1+4x^2)$   
b) étudier la dérivabilité de  $G$  à droite de 0
- 3) étudier la branche infinie de la courbe de  $G$  au voisinage de  $+\infty$
- 4) a) montrer que  $G$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et calculer  $G'(x)$   
b) étudier les variations de  $G$  et dresser sa table de variation
- 5) tracer la courbe de la fonction  $G$

7

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$

- 1) montrer que le domaine de  $f$  est  $D_f = ]0, \frac{1}{2}[ \cup ]1, +\infty[$
- 2) a) montrer que  $(\forall x \in D_f) \quad \frac{x}{\ln 2x} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln x}$   
b) en déduire les limites  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 3) on pose  $g(x) = 2 - 2x + \ln x$  ;  $x > 0$   
a) étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur  $]0, +\infty[$   
b) en déduire que :  $\left( \exists ! \alpha \in ]0, \frac{1}{2}[ \right) g(\alpha) = 0$   
c) prouver que  $\forall t \in [\alpha, 1] : \ln t \geq 2t - 2$  en déduire que  $\left( \forall x \in \left[ \alpha, \frac{1}{2} \right] \right) f(x) \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}$   
d) déterminer  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$   
e) montrer que  $(\forall t \geq 1) \quad \ln t < t - 1$  puis déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$