Exercices d'applications et de réflexions *sur les nombres complexes (Partie 1)*

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

TD :NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 : Trouver la forme algébrique et déterminer la parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$z_1=(2+i)(-1+i)+(1+2i)^2$ $\quad z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$

$z_3=\dfrac{1-3i}{3-i}$ $\quad z_4=\dfrac{1+i}{3-2i}$ $\quad z_5=(1+i)^{10}$

Exercice 2 :soient dans le plan complexe les points : $A(1+i)$ et $B\left(\frac{1}{2}+2i\right)$ et $C(-1-i)$

Montrer que les les points A, B et C sont alignés.

Exercice 3 :soient dans le plan complexe les points : $A(2;-3)$ et $B(1;1)$ et $C(1;2)$

1)Determiner les affixes des points A et B et C ?

2)Determiner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

3) Déterminer l'affixe de I, milieu de $[AB]$.

4)Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) Déterminer le barycentre de $\{(A, 2); (B,-1), (C, 3)\}$

6) Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 4 : soient dans le plan complexe les points :A ; B ; C ; D ; E d'affixes respectivement :

$z_A=1+i$ et $z_B=3+2i$ et $z_C=2-i$ et $z_D=-2i$

et $z_E=2$

1)Représenter ces points dans le plan complexe

2) Déterminer l'affixe de I milieu de $[AB]$.

3)Determiner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

4)montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Exercice 5 :Démontrer que $S=(1+i)^5+(1-i)^5$ est un nombre réel.

Exercice 6 :on pose : $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

et $S=j^{2n}-j^n \quad n\in\mathbb{Z}$

1)montrer que : $j^2=\overline{j}$

2)Démontrer que : $S\in i\mathbb{R} \quad \forall n\in\mathbb{Z}$

Exercice 7 :soit $u\in\mathbb{C}$ tel que $u\notin\mathbb{R}$

Montrer que : $(\forall z\in\mathbb{C})\ |1+uz|=|1+\overline{u}\cdot z| \Rightarrow z\in\mathbb{R}$

Exercice8: $z\in\mathbb{C}$

Ecrire en fonction de $\overline{z}$ le conjugué des nombres complexes suivants :

1) $Z_1=(2+i)(5-i)$ 2) $Z_2=2z+5i$ 3) $Z_3=\dfrac{z-1}{-3z+i}$

Exercice 9: Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2z+i\overline{z}=5-4i$ 2) $z=2\overline{z}-2+6i$

Exercice10 : dans le plan complexe on considére le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U=(z-2i)(\overline{z}-1)$

Et $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

1)écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

3) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que : U est imaginaire pur

Exercice11 :

A) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2z-3\overline{z}+1+2i=0$ 2) $z+(1-i)\overline{z}+3-2i=0$

3) $(3+i)z+\overline{z}=-i$

B) Déterminer les ensembles suivants :

1) (E1) = $\{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in \mathbb{R}\}$

2) (E2) = $\{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in i\mathbb{R}\}$

Exercice12 : Démontrer que :

$S=\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}-\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}$ est un nombre réel $\forall n\in\mathbb{Z}$

Exercice13 : dans le plan complexe on considére le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U=2iz-\overline{z}$

Et $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

1)écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

Exercice 14 : calculer le module des nombres complexes suivants : 1) $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $z'=3-4i$

Exercice15 :

A) Déterminer les modules des complexes suivants :

1) $z_1=3+\sqrt{3}i$ 2) $z_2=\frac{1}{2}-\sqrt{3}i$ 3) $z_2=\frac{1}{1+i}$

4) $z_4=x$ où $x\in\mathbb{R}$

B) Ecrire sous la forme algébrique les complexes suivants puis déterminer leurs modules :

1) $u_1=\frac{2+5i}{1+3i}$ 2) $u_2=\frac{1+i}{i-3\sqrt{2}}$ 3) $u_3=\left(2-\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2}+i\right)$

C) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : A(z) ;B($\overline{z}$) et C($\frac{1}{z}$) soit alignés.

Exercice16 : calculer le module des nombres complexes suivants : 1) $z_1=5\left(1+i\sqrt{3}\right)$

2) $z_2=(1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)$ 3) $z_3=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3$

Exercice17 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$; les points A, B et C ont pour affixes: $z_A=2$ et $z_B=1+\sqrt{3}i$ et $z_C=3+i\sqrt{3}$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral

Exercice18 : Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que : $|z-1-2i|=|z-7+2i|$

Exercice19: Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :a) $|z-3+i|=5$

b) $|z-4-5i|=|z+2|$

Exercice20 : Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que : $|z-2i|=3$

Exercice21 : Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que : $|iz+3|=\left|\frac{1}{i}z-4i+1\right|$

Exercice22 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$;

on considère les points A ; B ;C ;D ;E ;F qui ont pour affixes: $z_A=2$ et $z_B=-2i$ et $z_C=2+2i$ et $z_D=3i$ et $z_E=-3$ et $z_F=-2+2i$

1)Représenter les points A ; B ;C ;D ;E ;Fdans Le plan complexe

2)on utilisant la représentions déterminer l'argument des complexe : z_A et z_B et z_C et z_D et z_E et z_F

Exercice23 :Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants :

1) $z_1=\sqrt{3}+i$ 2) $z_2=1-i$ 3) $z_3=-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i$

4) $z_3=-1-\sqrt{3}i$ 5) $z=7$ 6) $z=-12$

Exercice24: Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants avec $\theta\in\left]-\pi;\pi\right[-\{0\}$

1) $z_1=\sin\theta+i\cos\theta$ 2) $z_2=1-\cos\theta-i\sin\theta$

3) $z_3=\sin\theta+2i\sin^2\frac{\theta}{2}$

Exercice25 : on considère les nombres complexes : $z_1=\sqrt{3}-i$ et $z_2=1-i$ et $Z=\frac{z_1}{z_2}$ et $U=z_1^6\times z_2^2$

1)Ecrivez les nombres complexe z_1 ; z_2 et Z et Sous leurs formes trigonométriques.

2) Ecrire le complexe Z Sous sa forme algébrique puis en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice26 : Ecrire le complexe $Z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^8$ Sous sa forme algébrique

Exercice 27 : Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z dans les cas suivants :

1) $z=\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 2) $z=-5-5i$ 3) $z=-6+6\sqrt{3}i$

4) $z=(3-3i)^4$ 5) $z=-2-2\sqrt{3}i$ 6) $z=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$

7) $z=\left(\sqrt{3}+3i\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 8) $z=\frac{1}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}$

9) $z=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}$

Exercice28 : Déterminer les racines carrées de $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

Exercice29 : Soit le complexe : $u=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$

1) Calculer u^2 puis déterminer la forme trigonométrique de u^2

2) En déduire la forme trigonométrique de u

Exercice30 : Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $z_A=3+5i$, $z_B=3-5i$ et $z_C=7+3i$

1)montrer que : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2i$

2)monter que ABC est un triangle rectangle et que : $BC=2AC$

Exercice31 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$;

Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $a=2i$, $b=\sqrt{2}(1+i)$ et $c=a+b$

1)Montrer que OBCA est un losange

2) Montrer que : $\arg c\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$

Exercice32 : Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $a=2+i$, $b=3+2i$ et $c=5-i$

Soit α une mesure de l'angle orienté : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Calculer $\tan\alpha$

Exercice33 : On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_1=-\sqrt{2}$ et $z_2=1+i$ et $z_3=1-i$

1) Placer dans le repère $\mathcal{R}$ les points A, B et C

2) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ et déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$

3) Montrer que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[BC]$ et en déduire que :
$\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

4) Ecrivez le nombre $\frac{z_1 - z_2}{z_1}$ sous sa forme algébrique puis en déduire cos $(\frac{\pi}{8})$ et sin $(\frac{\pi}{8})$

Exercice34 :1° Vérifier que les points $A(5+3i)$; $B(2+i)$ et $C(-1-i)$ sont alignés
2° Est ce que les points $M(-2+2i)$, $N(2-i)$ et $N(1-i)$ sont alignés ?

Exercice35 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$Z = \frac{5z - 2}{z - 1}$ Soit un imaginaire pur.

Exercices36 :
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $\left|\frac{z - 2}{z + 1 - i}\right| = 1$

Exercice37 :soit a et b et c des nombres complexes tels que : $|a| = |b| = |c| = 1$ et $a \neq c$ et $b \neq c$

1)Montrer que : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2)en déduire que : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$

$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

Bon courage