Exercices d'applications et de réflexions *sur les nombres complexes (Partie 1)*
Exercices avec solutions

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 : Trouver la forme algébrique et déterminer la parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$z_1=(2+i)(-1+i)+(1+2i)^2$ $\quad z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$

$z_3=\dfrac{1-3i}{3-i}$ $\quad z_4=\dfrac{1+i}{3-2i}$ $\quad z_5=(1+i)^{10}$

Solution :1)

$z_1=-6+5i=a+bi$ donc $\mathrm{Re}(z_1)=-6$ et $\mathrm{Im}(z_1)=5$

2) $z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3=1^3+3\times1^2\times\left(\sqrt{3}i\right)+3\times1\times\left(\sqrt{3}i\right)^2+\left(\sqrt{3}i\right)^3$

$z_2=1+3\sqrt{3}i-3\times3-3\sqrt{3}i=-8+0i\in\mathbb{R}$

car $\mathrm{Im}(z_2)=0$

3) $z_3=\dfrac{1-3i}{3-i}=\dfrac{(1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{3+i-9i+3}{9-i^2}=\dfrac{6-8i}{10}$

$z_3=\dfrac{6}{10}-\dfrac{8i}{10}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4i}{5}$ donc $\mathrm{Re}(z_1)=\dfrac{3}{5}$ et $\mathrm{Im}(z_1)=-\dfrac{4}{5}$

4) $z_4=\dfrac{1+i}{3-2i}=\dfrac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{3+2i+3i-2}{9-4i^2}=\dfrac{1+5i}{13}=\dfrac{1}{13}+i\dfrac{5}{13}$

5) $z_5=(1+i)^{10}=\left((1+i)^2\right)^5=\left(1^2+2i\times1+i^2\right)^5=(2i)^5$

$z_5=(2i)^5=2^5\times i^5=32\times\left(i^2\right)^2\times i=32i$

est un imaginaire pur car $\mathrm{Re}(z_5)=0$

Exercice 2 :soient dans le plan complexe les points : $A(1+i)$ et $B\left(\dfrac{1}{2}+2i\right)$ et $C(-1-i)$

Montrer que les les points A, B et C sont alignés.

Solutions :

$$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\frac{1}{2}+2i-i}{-1-i-i}=\frac{\frac{1}{2}+i}{-1-2i}=\frac{\frac{1}{2}+i}{-2\left(\frac{1}{2}+i\right)}=-\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$$

Donc : les les points A, B et C sont alignés

Exercice 3 :soient dans le plan complexe les points : $A(2;-3)$ et $B(1;1)$ et $C(1;2)$

1)Determiner les affixes des points A et B et C ?

2)Determiner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

3) Déterminer l'affixe de I, milieu de $[AB]$.

4)Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) Déterminer le barycentre de $\{(A, 2); (B,-1), (C, 3)\}$

6) Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Solutions :1) l'affixe du point A est $z_A=2-3i$

l'affixe du point B est $z_B=1+i$

l'affixe du point C est $z_c=1+2i$

2) $aff(\overrightarrow{AB})=aff(B)-aff(A)=z_B-z_A$

$z_{\overrightarrow{AB}}=(1+i)-(2-3i)=-1+4i$

3) $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{2-3i+1+i}{2}=\dfrac{3-2i}{2}=\dfrac{3}{2}-i$

4) $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{(1+2i)-(2-3i)}{(1+i)-(2-3i)}=\dfrac{-1+5i}{-1+4i}$

$=\dfrac{(-1+5i)(-1-4i)}{(-1-4i)(-1+4i)}=\dfrac{1+4i-5i+20}{(-1)^2-(4i)^2}$

$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{21-i}{17}=\dfrac{21}{17}-\dfrac{1}{17}i\notin\mathbb{R}$

Donc : les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) le barycentre de $\{(A, 2); (B,-1), (C, 3)\}$?

$z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\dfrac{2z_A-1z_B+3z_C}{2-1+3}$

$$z_G=\frac{2(2-3i)-1(1+i)+3(1+2i)}{2-1+3}=\frac{6-i}{4}=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}i$$

6) ABCD est un parallélogramme si et seulement

Si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ c'est-à-dire : $z_B-z_A=z_C-z_D$

$z_D=z_C+z_A-z_B$

On en déduit en remplaçant par les données :

$z_D=1+2i+2-3i-1-i=2-2i$

Exercice 4 : soient dans le plan complexe les points :A ; B ; C ; D ; E d'affixes respectivement :

$z_A=1+i$ et $z_B=3+2i$ et $z_C=2-i$ et $z_D=-2i$

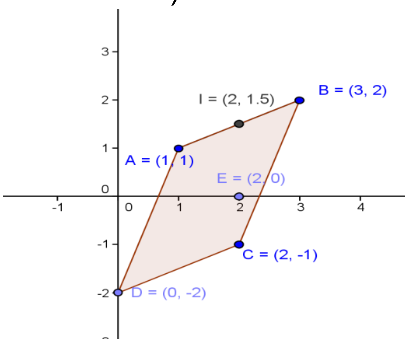
et $z_E=2$

1)Représenter ces points dans le plan complexe
2) Déterminer l'affixe de I milieu de $[AB]$.

3)Determiner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

4)montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Solution : 1)



I milieu de $[AB]$. Donc : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ donc $z_I-z_A=z_B-z_I$

Donc : $z_I=\frac{z_B+z_A}{2}$ donc : $z_I=\frac{3+2i+1+i}{2}=2+\frac{3}{2}i$

Donc : $I\left(2;\frac{3}{2}\right)$

3) $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=3+2i-(1+i)=3+2i-1-i=2+i$

4)il suffit de monter que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

On a : $z_{\overrightarrow{AB}}=2+i$

$z_{\overrightarrow{DC}}=z_C-z_D=2-i-(-2i)=2+i$

Donc : $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}$ par suite : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Donc : le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Exercice 5 :Démontrer que $S=(1+i)^5+(1-i)^5$ est un nombre réel.

Solution : On a :

$\overline{S}=\overline{(1+i)^5+(1-i)^5}=\overline{(1+i)^5}+\overline{(1-i)^5}=\overline{(1+i)}^5+\overline{(1-i)}^5$

$\overline{S}=(1-i)^5+(1+i)^5=S$

S est donc bien un nombre réel.

Exercice 6 :on pose : $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

et $S=j^{2n}-j^n \quad n\in\mathbb{Z}$

1)montrer que : $j^2=\overline{j}$

2)Démontrer que : $S\in i\mathbb{R} \quad \forall n\in\mathbb{Z}$

Solution :1)

$$j^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\frac{1}{2}i\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{j}$$

2)il suffit de montrer que : $S+\overline{S}=0$

$$S+\overline{S}=j^{2n}-j^n+\overline{j^{2n}-j^n}=\left(j^2\right)^n-j^n+\overline{\left(j^2\right)^n-j^n}$$

$$S+\overline{S}=\left(\overline{j}\right)^n-j^n+\overline{\left(j^2\right)^n}-\overline{j^n}=\left(\overline{j}\right)^n-j^n+\left(\overline{\overline{j}}\right)^n-\overline{j}^n$$

$$S+\overline{S}=\overline{j}^n-j^n+j^n-\overline{j}^n=0$$

S est donc bien un imaginaire pur

Exercice 7 :soit $u\in\mathbb{C}$ tel que $u\notin\mathbb{R}$

Montrer que : $(\forall z\in\mathbb{C})\ |1+uz|=|1+\overline{u}\cdot z|\Rightarrow z\in\mathbb{R}$

Solution :1) soit $z\in\mathbb{C}$ tel que : $|1+uz|=|1+\overline{u}\cdot z|$

Donc : $|1+uz|^2=|1+\overline{u}\cdot z|^2$

Donc : $(1+uz)\overline{(1+uz)}=(1+\overline{u}\cdot z)\overline{(1+\overline{u}\cdot z)}$

Donc : $(1+uz)(1+\overline{u}\,\overline{z})=(1+\overline{u}\cdot z)(1+u\cdot\overline{z})$ Car : $\overline{\overline{u}}=u$

Donc : $1+uz+\overline{u}\,\overline{z}+u\overline{u}z\overline{z}=1+u\overline{z}+\overline{u}z+u\overline{u}z\overline{z}$

Donc : $uz+\overline{u}\overline{z}=u\overline{z}+\overline{u}z$

Donc : $\left(u-\overline{u}\right)z+\left(\overline{u}-u\right)\overline{z}=0$

Donc : $\left(u-\overline{u}\right)\left(z-\overline{z}\right)=0$

Et puisque : $u-\overline{u}\neq 0$ car $u\notin\mathbb{R}$

Donc : $z-\overline{z}=0$ Donc : $z=\overline{z}$

Donc : $z\in\mathbb{R}$

Exercice8: $z\in\mathbb{C}$

Ecrire en fonction de $\overline{z}$ le conjugué des nombres complexes suivants :

1) $Z_1=(2+i)(5-i)$ 2) $Z_2=2z+5i$ 3) $Z_3=\dfrac{z-1}{-3z+i}$

Solution :

1) $\overline{Z_1}=\overline{(2+i)(5-i)}=\overline{(2+i)}\times\overline{(5-i)}=(2-i)(5+i)$

2) $\overline{Z_2}=\overline{2z+5i}=\overline{2z}+\overline{5i}=2\overline{z}-5i$

3) $\overline{Z_3}=\overline{\left(\dfrac{z-1}{-3z+i}\right)}=\dfrac{\overline{z-1}}{\overline{-3z+i}}=\dfrac{\overline{z}-1}{-3\overline{z}-i}$

Exercice 9: Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2z+i\overline{z}=5-4i$ 2) $z=2\overline{z}-2+6i$

Solution :1) $z\in\mathbb{C}$

donc : $\exists x\in\mathbb{R}$ et $\exists y\in\mathbb{R}\,/\,z=x+yi$

$2z+i\overline{z}=5-4i\Leftrightarrow 2\left(x+yi\right)+i\left(x-yi\right)=5-4i$

$\left(2x+y\right)+i\left(2y+x\right)=5-4i\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=5\\2y+x=-4\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}2x+y=5\\-4y-2x=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=5\\-4y-2x+2x+y=8+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=5\\-3y=13\Leftrightarrow y=-\dfrac{13}{3}\end{cases}$

Donc : $x=\dfrac{14}{3}$ par suite: $z=\dfrac{14}{3}-\dfrac{13}{3}i$

Donc : $S=\left\{\dfrac{14}{3}-\dfrac{13}{3}i\right\}$

2) $z\in\mathbb{C}$ donc : $\exists x\in\mathbb{R}$ et $\exists y\in\mathbb{R}\,/\,z=x+yi$

$z=2\overline{z}-2+6i\Leftrightarrow x+yi=2\left(x-yi\right)-2+6i$

Donc : $S=\{2+2i\}$

Exercice10 : dans le plan complexe on considére le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U=\left(z-2i\right)\left(\overline{z}-1\right)$

Et $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

1)écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

3) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que : U est imaginaire pur

Solution :1) $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Donc : $U=\left(x+yi-2i\right)\left(x-yi-1\right)$

Donc : $U=\left(x+i\left(y-2\right)\right)\left(\left(x-1\right)-yi\right)$

Donc : $U=\left(x^2+y^2-x-2y\right)+i\left(-y-2x+2\right)$

Donc : $\mathrm{Re}\left(U\right)=x^2+y^2-x-2y$ et $\mathrm{Im}\left(U\right)=-y-2x+2$

2) U est réel ssi $\mathrm{Im}\left(U\right)=0\Leftrightarrow(\Delta):-y-2x+2=0$

Donc : l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel est la droite d'équation :

$(\Delta):-y-2x+2=0$

3) U est imaginaire pur ssi $\mathrm{Re}\left(U\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-x-2y=0$

$\Leftrightarrow x^2-2\times\dfrac{1}{2}x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2-2\times 1y+1^2-1^2=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que : U est imaginaire pur est le cercle de centre : $\Omega\left(\frac{1}{2};1\right)$ et de rayon : $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$

Exercice11 :

A) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2z-3\bar{z}+1+2i=0$ 2) $z+(1-i)\bar{z}+3-2i=0$

3) $(3+i)z+\bar{z}=-i$

B) Déterminer les ensembles suivants :

1) (E1) = $\{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in \mathbb{R}\}$

2) (E2) = $\{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in i\mathbb{R}\}$

Exercice12 : Démontrer que :

$S=\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}-\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}$ est un nombre réel $\forall n\in\mathbb{Z}$

Solution : On a :

$\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}=\left(-\left(\sqrt{3}-i\right)\right)^{2n+1}=(-1)^{2n+1}\times\left(\sqrt{3}-i\right)^{2n+1}$

Donc: $\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}=-\left(\sqrt{3}-i\right)^{2n+1}$ car $(-1)^{2n+1}=-1$

Donc : $S=\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}+\left(\sqrt{3}-i\right)^{2n+1}$

$\bar{S}=\overline{\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}-\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}}=\overline{\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}}-\overline{\left(i-\sqrt{3}\right)^{2n+1}}$

$\bar{S}=\left(\overline{\sqrt{3}+i}\right)^{2n+1}-\left(\overline{i-\sqrt{3}}\right)^{2n+1}=\left(\sqrt{3}-i\right)^{2n+1}+\left(\sqrt{3}+i\right)^{2n+1}$

Donc : $\bar{S}=S$

donc S est bien un nombre réel.

Exercice13 : dans le plan complexe on considére le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U=2iz-\bar{z}$

Et $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

1)écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

Solution : 1) $z=x+yi$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Donc : $U=2i(x+yi)-(x-yi)=2ix-2y-x+yi$

Donc : $U=(-2y-x)+i(y+2x)$

Donc : $\mathrm{Re}(U)=-2y-x$ et $\mathrm{Im}(U)=y+2x$

2) U est réel ssi $\mathrm{Im}(U)=0 \Leftrightarrow (\Delta): y+2x=0$

Donc : l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel est la droite d'équation :

$(\Delta): y=-2x$

Exercice 14 : calculer le module des nombres complexes suivants : 1) $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $z'=3-4i$

Solution :

$|z|=\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$

$|z'|=|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5;|-2i|=\sqrt{(-2)^2}=2$

Exercice15 :

A) Déterminer les modules des complexes suivants :

1) $z_1=3+\sqrt{3}i$ 2) $z_2=\frac{1}{2}-\sqrt{3}i$ 3) $z_2=\frac{1}{1+i}$

4) $z_4=x$ où $x\in\mathbb{R}$

B) Ecrire sous la forme algébrique les complexes suivants puis déterminer leurs modules :

1) $u_1=\frac{2+5i}{1+3i}$ 2) $u_2=\frac{1+i}{i-3\sqrt{2}}$ 3) $u_3=\left(2-\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2}+i\right)$

C) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : A(z) ;B($\bar{z}$) et C($\frac{1}{z}$) soit alignés.

Exercice16 : calculer le module des nombres complexes suivants : 1) $z_1=5\left(1+i\sqrt{3}\right)$

2) $z_2=(1+i)(\sqrt{3}-i)$ 3) $z_3=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3$

Solution :

1) $|z_1|=\left|-5\left(1+i\sqrt{3}\right)\right|=|-5|\left|1+i\sqrt{3}\right|=5\sqrt{1+3}=10$

2) $|z_2|=\left|(1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)\right|=|1+i|\times\left|\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{2}\times\sqrt{4}=2\sqrt{2}$

3) $|z_3|=\left|\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3\right|=\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right|^3=\left(\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right|\right)^3=\left(\frac{\left|1+i\sqrt{3}\right|}{|1-i|}\right)^3$

$|z_3|=\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)^3=2\sqrt{2}$

Exercice17 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$; les points A, B et C ont pour affixes: $z_A=2$ et $z_B=1+\sqrt{3}i$ et $z_C=3+i\sqrt{3}$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral

Solution : il suffit de montrer que : $AC=AB=BC$

$AB=|z_B-z_A|=\left|1+\sqrt{3}i-2\right|=\left|-1+\sqrt{3}i\right|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

$AC=|z_C-z_A|=\left|3+\sqrt{3}i-2\right|=\left|1+\sqrt{3}i\right|=\sqrt{(1)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

$BC=|z_C-z_B|=\left|3+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i\right|=|2|=2$

Donc : $AC=AB=BC$

Exercice18 : Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que : $|z-1-2i|=|z-7+2i|$

Solution :

Methode1 : Méthode géométrique :

$|z-1-2i|=|z-7+2i|\Leftrightarrow|z-(1+2i)|=|z-(7-2i)|$

On pose : $A(z_A=1+2i)$ et $B(z_B=7-2i)$

$\Leftrightarrow|z_M-z_A|=|z_M-z_B|\Leftrightarrow AM=BM$

L'ensemble (Δ) cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

Methode1 : Méthode algébrique :

$z\in\mathbb{C}$ donc $\exists x\in\mathbb{R}$ et $\exists y\in\mathbb{R}$ tel que : $z=x+yi$

$|z-1-2i|=|z-7+2i|\Leftrightarrow|x+yi-1-2i|=|x+yi-7+2i|$

$\Leftrightarrow|x-1+i(y-2)|=|x-7+i(y+2)|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-7)^2+(y+2)^2}\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=(x-7)^2+(y+2)^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4=x^2-14x+49+y^2+4y+4$

$\Leftrightarrow 12x-8y-48=0\Leftrightarrow(\Delta):3x-2y-12=0$

Exercice19: Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :a) $|z-3+i|=5$

b) $|z-4-5i|=|z+2|$

Solution :

a) Soit A le point d'affixe $3-i$

$|z-3+i|=5\Leftrightarrow AM=5$

L'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 5.

b) Soient B et C les points d'affixes $4+5i$ et -2

$|z-4-5i|=|z+2|\Leftrightarrow BM=CM$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[BC]$

Exercice20 : Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que : $|z-2i|=3$

Solution :

Methode1 : Méthode géométrique :

$|z-2i|=3$ On pose : $A(z_A=2i)$

$\Leftrightarrow|z_M-z_A|=3\Leftrightarrow AM=3$

L'ensemble (C) cherché est le cercle de centre : $A(0;2)$ et de rayon : $R=3$

Methode1 : Méthode algébrique :

$z\in\mathbb{C}$ donc $\exists x\in\mathbb{R}$ et $\exists y\in\mathbb{R}$ tel que : $z=x+yi$

$|z-2i|=3\Leftrightarrow|x+yi-2i|=3\Leftrightarrow|x+i(y-2)|=3$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-2)^2}=3\Leftrightarrow(x-0)^2+(y-2)^2=3^2$

L'ensemble (C) cherché est le cercle de centre :

$A(0;2)$ et de rayon : $R=3$

Exercice21 : Déterminer l'ensemble (Δ) des

points M d'affixe z tels que : $|iz+3|=\left|\frac{1}{i}z-4i+1\right|$

Solution :

Methode1 : Méthode géométrique :

$$|iz+3|=\left|\frac{1}{i}z-4i+1\right| \Leftrightarrow |i(z-3i)|=\left|\frac{1}{i}(z+4+i)\right|$$

$$\Leftrightarrow |z-3i|=|z+4+i| \text{ car } |i|=\left|\frac{1}{i}\right|=1$$

$$\Leftrightarrow |z-3i|=|z-(-4-i)|$$

On pose : $A(z_A=3i)$ et $B(z_B=-4-i)$

$$\Leftrightarrow |z_M-z_A|=|z_M-z_B| \Leftrightarrow AM=BM$$

L'ensemble (Δ) cherché est la médiatrice du

segment $[AB]$

Exercice22 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$;

on considère les points A ; B ;C ;D ;E ;F qui ont pour affixes: $z_A=2$ et $z_B=-2i$ et $z_C=2+2i$ et

$z_D=3i$ et $z_E=-3$ et $z_F=-2+2i$

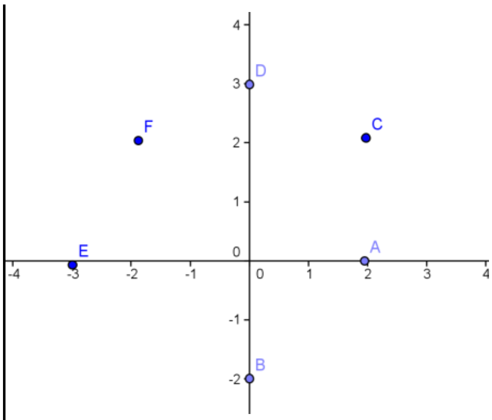
1)Représenter les points A ; B ;C ;D ;E ;Fdans Le plan complexe

2)on utilisant la représentions déterminer

l'argument des complexe : z_A et z_B et z_C et z_D et

z_E et z_F

Solution :1)



2) $\arg z_A=0[2\pi]$ et $\arg z_B=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg z_C=\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\arg z_D=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg z_E=\pi[2\pi]$ et $\arg z_F=\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Exercice23 :Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants :

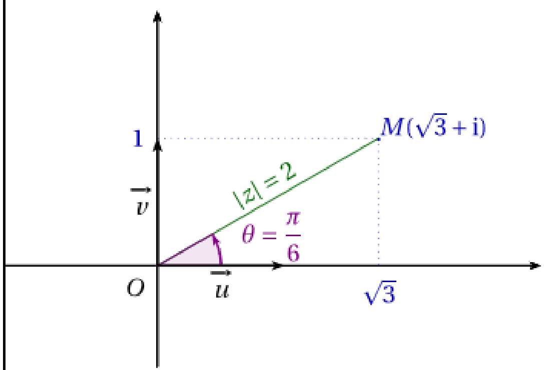
1) $z_1=\sqrt{3}+i$ 2) $z_2=1-i$ 3) $z_3=-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i$

4) $z_3=-1-\sqrt{3}i$ 5) $z=7$ 6) $z=-12$

Solution :1) $|z_1|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

$$z_1=\sqrt{3}+1i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\arg z_1\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$$



2) $|z_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$$z_1=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Et on a : $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$ donc :

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \qquad \arg z_2\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

3) $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$ $\quad |z_3| = \sqrt{\frac{3}{36} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Et on a : $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$

Donc:

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

4) $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$

$$|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_3 = -1 - \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$ et $\cos(\pi + x) = -\cos x$

$$z_4 = 2\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

Exercice24: Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants avec $\theta \in \left]-\pi;\pi\right[- \{0\}$

1) $z_1 = \sin\theta + i\cos\theta$ $\quad$ 2) $z_2 = 1 - \cos\theta - i\sin\theta$

3) $z_3 = \sin\theta + 2i\sin^2\frac{\theta}{2}$

Solution : 1)

$$z_1 = \sin\theta + i\cos\theta = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$$

Donc : c'est forme trigonométrique du nombre complexe z_1 donc $|z_1| = 1$ et $\arg z \equiv \frac{\pi}{2} - \theta\,[2\pi]$

2) $z_2 = 1 - \cos\theta - i\sin\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} - i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$$z_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$z_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$z_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

• Si $\theta \in \left]0;\pi\right[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2} \succ 0$

Donc : la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 est :

$$z_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$|z| = 2\sin\frac{\theta}{2}$ et $\arg z \equiv \frac{\theta - \pi}{2}\,[2\pi]$

• Si $\theta \in \left]-\pi;0\right[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2} \prec 0$

$$z_2 = -2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$z_2 = -2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$z_2 = -2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi + \theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + \theta}{2}\right)\right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 et on a :

$|z| = -2\sin\frac{\theta}{2}$ et $\arg z \equiv \frac{\theta + \pi}{2}\,[2\pi]$

3) $z_3 = \sin\theta + 2i\sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + 2i\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$z_3 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

• Si $\theta \in \left]0;\pi\right[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2} \succ 0$

Donc : la forme trigonométrique du nombre complexe z_3 est : $z_3 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$|z| = 2\sin\frac{\theta}{2}$ et $\arg z \equiv \frac{\theta}{2}\,[2\pi]$

• Si $\theta \in]-\pi ;0[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ donc $2\sin\frac{\theta}{2} \prec 0$

$$z_2 = -2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$z_2 = -2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 et on a :

$$|z| = -2\sin\frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z \equiv \pi + \frac{\theta}{2}[2\pi]$$

Exercice25 : on considère les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$ et

$U = z_1^6 \times z_2^2$

1)Ecrivez les nombres complexe z_1 ; z_2 et Z et Sous leurs formes trigonométriques.

2) Ecrire le complexe Z Sous sa forme algébrique puis en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Solution :1) $z_1 = \sqrt{3} - i$

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Donc : $\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

On a : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

Donc : $z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left[2;-\frac{\pi}{6}\right]$

On a : $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$U = z_1^6 \times z_2^2 = \left[2;-\frac{\pi}{6}\right]^6 \times \left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]^2$$

$$U = \left[2^6;-\pi\right] \times \left[2;-\frac{\pi}{2}\right] = \left[2^7;-\pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$U = 2^7\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 2^7(0 + 1i) = 2^7 i$$

2)

$$Z = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i-i+1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$Z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Donc : $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice26 : Ecrire le complexe $Z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^8$

Sous sa forme algébrique

Solution : On va d'abord écrire $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$

Sous la forme trigonométrique

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Donc : $Z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^8 = \left[\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]^8$

$Z=\left[\sqrt{2}^{8};\frac{8\pi}{3}\right]=16\left(\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3}\right)$

$Z=16\left(\cos\frac{6\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi+2\pi}{3}\right)$

$Z=16\left(\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$Z=16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=16\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$Z=-8+8\sqrt{3}i$

Exercice 27 : Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z dans les cas suivants :

1) $z=\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 2) $z=-5-5i$ 3) $z=-6+6\sqrt{3}i$

4) $z=(3-3i)^{4}$ 5) $z=-2-2\sqrt{3}i$ 6) $z=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$

7) $z=\left(\sqrt{3}+3i\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 8) $z=\frac{1}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}$

9) $z=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}$

Exercice28 : Déterminer les racines carrées de $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ **Solution :**

On a : $|z|=1$ et $\arg z\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Donc les racines carrées de z sont :

$u_1=\left[1;\frac{\pi}{12}\right]=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ et $u_2=-u_1$

Exercice29 : Soit le complexe :

$u=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$

1) Calculer u^2 puis déterminer la forme trigonométrique de u^2

2) En déduire la forme trigonométrique de u

Exercice30 : Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $z_A=3+5i$, $z_B=3-5i$ et $z_C=7+3i$

1)montrer que : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2i$

2)monter que ABC est un triangle rectangle et que : $BC=2AC$

Solution :1) $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{-4-8i}{-4+2i}=\frac{2i(-4+2i)}{-4+2i}=2i$

$\left(\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)[2\pi]$

$\left(\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\arg(2i)[2\pi]$

$\left(\overline{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : ABC est un triangle rectangle en C

On a : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2i$ donc: $\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=|2i|$

Donc : $\frac{|z_B-z_C|}{|z_A-z_C|}=2$ donc: $\frac{BC}{AC}=2$

Donc : $BC=2AC$

Exercice31 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$;

Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $a=2i$, $b=\sqrt{2}(1+i)$ et $c=a+b$

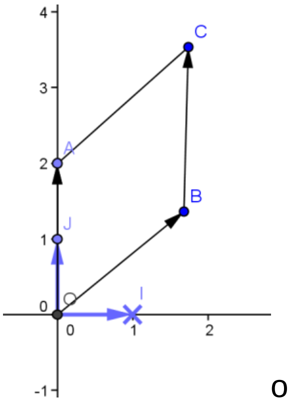
1)Montrer que OBCA est un losange

2) Montrer que : $\arg c\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$

Solution :

1)On a : $c=a+b$ donc : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

Donc OBCA est un parallélogramme



on a : $|a-0|=|2i|=2=OA$

$OB=|b-0|=\left|\sqrt{2}(1+i)\right|=\left|\sqrt{2}\right|\left|(1+i)\right|=\sqrt{2}\sqrt{2}=2$

alors : $OB=OA$

donc OBCA est un losange

2) $\arg c\equiv\left(\vec{i};\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]$

$\equiv\left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]$

$\equiv\left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)[2\pi]$ (OBCA : losange)

$\equiv\arg b+\frac{1}{2}\arg\frac{a}{b}[2\pi]$

$\equiv\arg b+\frac{1}{2}(\arg a-\arg b)[2\pi]$

Donc : $\arg c\equiv\frac{1}{2}(\arg a+\arg b)[2\pi]$

Or : $a=2i$ donc : $\arg a\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Et : $b=\sqrt{2}(1+i)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$b=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ donc $\arg b\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\arg c\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$

Donc : $\arg c\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$

Exercice32 : Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $a=2+i$, $b=3+2i$ et $c=5-i$

Soit α une mesure de l'angle orienté : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Calculer $\tan\alpha$

Solution : On a : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

Donc : $\alpha=\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

$\frac{c-a}{b-a}=\frac{3-2i}{1+i}=\frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-5i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

$\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=\frac{\sqrt{26}}{2}$

Donc : $\frac{c-a}{b-a}=\frac{\sqrt{26}}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

Donc : $\sqrt{26}\cos\alpha=1$ et $\sqrt{26}\sin\alpha=-5$

Donc : $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}$ et $\sin\alpha=\frac{-5}{\sqrt{26}}$

Donc : $\tan\alpha=-5$

Exercice33 : On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_1=-\sqrt{2}$ et $z_2=1+i$ et $z_3=1-i$

1) Placer dans le repère $\mathcal{R}$ les points A, B et C

2) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ et déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$

3) Montrer que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[BC]$ et en déduire que :

$\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$

4) Ecrivez le nombre $\frac{z_1 - z_2}{z_1}$ sous sa forme algébrique puis en déduire cos $(\frac{\pi}{8})$ et sin $(\frac{\pi}{8})$

Exercice34 :1° Vérifier que les points $A(5+3i)$; $B(2+i)$ et $C(-1-i)$ sont alignés

2° Est ce que les points $M(-2+2i)$, $N(2-i)$ et $N(1-i)$ sont alignés ?

Exercice35 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$Z = \frac{5z-2}{z-1}$ Soit un imaginaire pur.

Solution : Pour répondre à cette question, on peut écrire Z sous forme algébrique et dire que sa partie réelle est nulle ou il suffit de calculer la partie réelle.

Il faut que z≠1 . On note A(1)

$z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : $z = x + yi$

$$Z = \frac{5z-2}{z-1} = \frac{5x-2+5iy}{x-1+iy} = \frac{(5x-2+5iy)(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z = \frac{(5x^2-5x-2x+2+5y^2)+i(-5xy+2y+5xy-5y)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z = \frac{(5x^2-7x+2+5y^2)-3iy}{(x-1)^2+y^2}$$

Z est un imaginaire pur

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x^2+5y^2-7x+2}{(x-1)^2+y^2} = 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+5y^2-7x+2 = 0 \\ x \neq 1 ou y \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{10}\right)^2+y^2-\frac{49}{100}+\frac{2}{5} = 0$$

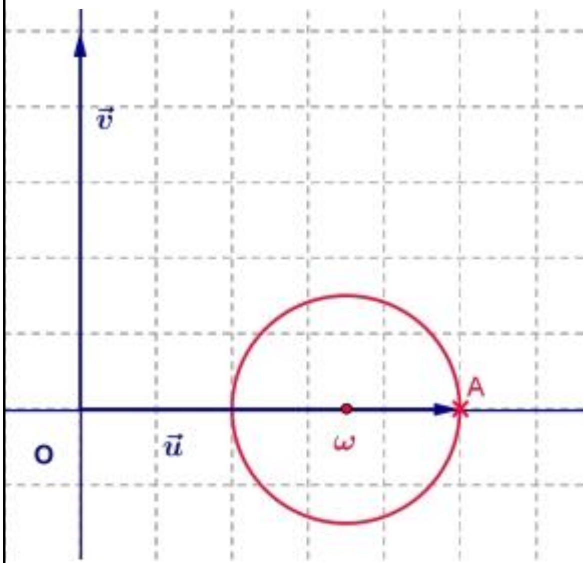
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{10}\right)^2+y^2 = \frac{9}{100}$$

Il s'agit de l'équation du cercle (C) de centre

ω($\frac{7}{10}$+0 i) et de rayon $\frac{3}{10}$.

Le point A(1) appartient à (c).

L'ensemble cherché est donc le cercle (C) privé de A.



Exercices36 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right| = 1$

Solution :

Première méthode (méthode algébrique)

$z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

On doit avoir : $z \neq -1+i$

$z-2 = x-2+yi$

$z+1-i = x+1+i(y-1)$

$$\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-2|}{|z+1-i|} = 1$$

$$\Leftrightarrow |z-2| = |z+1-i|$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow -6x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 3x - 1$$

L'ensemble cherché est la droite (D) d'équation

$y = 3x - 1$

Deuxième méthode (méthode géométrique)

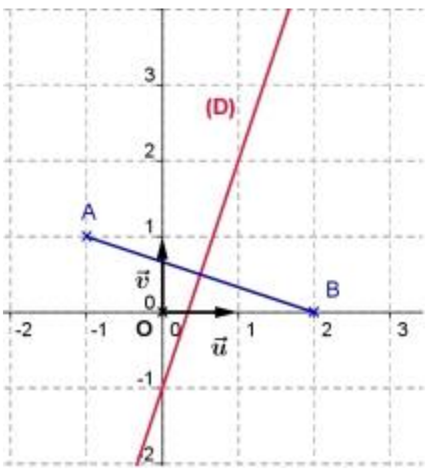
On pose : A(−1+i) et B(2) et M (z)

$\overrightarrow{AM}(z+1-i)$ donc $|z+1-i| = AM$

$\overrightarrow{BM}(z-2)$ donc $|z-2| = BM$

$$\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-2|}{|z+1-i|} = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow BM = AM$$

L'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment [AB].



Exercice37 : soit a et b et c des nombres complexes tels que : $|a| = |b| = |c| = 1$ et $a \neq c$ et $b \neq c$

1)Montrer que : $\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2)en déduire que : $\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \equiv \dfrac{1}{2}\arg\left(\dfrac{b}{a}\right)\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

Solution : $\overline{\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \dfrac{a}{b}} = \left(\dfrac{\bar{c}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{a}}\right)^2 \times \dfrac{\bar{a}}{\bar{b}}$

On a si : $|z| = 1$ alors : $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$ donc :

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}} = \left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2 \times \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \left(\frac{\frac{b-c}{bc}}{\frac{a-c}{ac}}\right)^2 \times \frac{b}{a}$$

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}} = \left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2 \times \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{b}{a}$$

Donc : $\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2)puisque : $\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}$ alors :

$$\arg\left(\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$$

Donc : $\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right)^2 + \arg\left(\dfrac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$

Donc : $2\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \equiv -\arg\left(\dfrac{a}{b}\right)[\pi]$

$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

Bon courage